Министерство науки и высшего образования РФ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

ТРУДЫ XX МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

Нижний Новгород, 23–27 ноября 2020 г.

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2020

УДК 004.942+519.876.5
ББК 22.181я43
М34

М34 **Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии.** Труды XX Международной конференции (Н. Новгород, 23–27 ноября 2020 г.) / Под ред. проф. В.П. Гергеля. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2020. – 438 с.

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

ISBN 978-5-91326-621-7

Сборник материалов Двадцатой Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», состоявшейся 23−27 ноября 2020 г. на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, содержит тезисы докладов и короткие статьи, посвященные математическому моделированию сложных процессов и явлений, численным методам их исследования, а также проблемам разработки методов суперкомпьютерных вычислений для решения актуальных задач в различных областях науки, промышленности и образования.

Подробную информацию о конференции можно найти в сети Интернет по адресу http://agora.guru.ru/hpc2020

Поддержка конференции

Корпорация Intel

Компания Huawei

Группа компаний РСК

Научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего»

ISBN 978-5-91326-621-7
ББК 22.181я43

© ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2020
© Авторы статей, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

23–27 ноября 2020 г. в рамках Международного конгресса «Суперкомпьютерные дни в России» на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского при поддержке корпорации Intel, компании Huawei и группы компаний РСК проведена XX Международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии».

Тематика конференции охватывала основные направления в математического моделирования и суперкомпьютерных технологий:

- математическое моделирование динамики систем и процессов управления;
- теория динамических систем и бифуркаций;
- колебательные процессы в динамических сетях;
- модели и методы поддержки принятия решений;
- модели и методы искусственного интеллекта;
- математическое модели в биологии и медицине;
- математическое моделирование природных процессов;
- технологии параллельных и распределенных вычислений;
- применение суперкомпьютерных технологий для решения вычислительно-сложных задач.

В рамках молодежной школы была организована двухдневная интенсивная программа обучения при поддержке и активном участии ведущих ИТ-компаний: лекции и мастер-классы экспертов из университетов и индустрии, виртуальные экскурсии в ИТ-компании, научный семинар участников школы.

Основными задачами проведения мероприятия являись представление актуальных результатов в области математического моделирования сложных процессов и явлений, обсуждение различных аспектов организации суперкомпьютерных вычислений, расширение контактов между специалистами для решения ресурсоемких прикладных задач, обмен опытом научно-образовательной деятельности при подготовке специалистов в области математического моделирования и параллельных вычислений.

Все перечисленные темы нашли отражение в настоящем сборнике тезисов докладов и коротких статей, представленных на конференцию (публикуются в авторской редакции).

M2H3D CODE: MOVING MESH HYDRODYNAMICS BY MEANS AVX-2 TECHNOLOGY[1*]

I. Kulikov[1], I. Chernykh[1], E. Vorobyov[2], V. Elbakan[3], L. Vshivkova[1]

[1]Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Lavrentieva ave., 6, Novosibirsk, 630090 Russia,
[2]Institute of Astronomy, University of Vienna,
Tuerkenschanzstrasse, 17, Vienna, 1180 Austria,
[3]Research Institute of Physics, Southern Federal Univeristy,
Stachki ave., 194, Rostov-on-Don, 344090 Russia

A new approach to vectorization of computational fluid dynamics algorithms adapted for astrophysical applications is proposed. A computational model is briefly described as an example of the approach. A review of papers on vectorization of calculations to simulate hydrodynamic processes and related problems is presented. The computational technology and vector instructions used to speed up the critical parts of the code are described. A performance of 90 gigaflops with a single Intel Cascade Lake processor using an AVX2 technology is achieved. Some numerical examples are given..

Keywords: High Performance Computing, Computational Astrophysics, SIMD intrinsics.

1. Introduction

Vector extensions can significantly speed up the calculations, of astrophysical problems in particular [1]. Vectorization is one of the basic components of Intel Xeon Phi processors that calls for a special design of the corresponding numerical methods and codes. In recent years, vector calculations have been widely used to organize computations in numerous problems of computational astrophysics. Vectorization has been effectively employed to simulate hydrodynamic flows [1] and plasma physics [2].

2. Numerical model

Consider the conservation laws of hydrodynamics in flux-conservative form

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u_x\\ \rho u_y\\ \rho u_z\\ \rho E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u_x\\ \rho u_x u_x+p\\ \rho u_y u_x\\ \rho u_z u_x\\ [\rho E+p]u_x\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho u_y\\ \rho u_x u_y\\ \rho u_y u_y+p\\ \rho u_z u_y\\ [\rho E+p]u_y\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\rho u_z\\ \rho u_x u_z\\ \rho u_y u_z\\ \rho u_z u_z+p\\ [\rho E+p]u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\rho''_{\ x}\Phi\\ -\rho''_{\ y}\Phi\\ -\rho''_{\ z}\Phi\\ -\rho(\vec{u},''\Phi)\end{pmatrix},$$

with the Poisson equation for the gravitational potential

$$\square\Phi = 4\pi G\rho .$$

To solve the equations of hydrodynamics, we use a Godunov-type scheme adapted for tetrahedral grids and to solve a Riemann problem, a Rusanov-type scheme with a piecewise linear reconstruction of the physical variables. To solve the Poisson equation, a potential defined at the calculation grid nodes and a finite element method in a weak formulation for a Laplace operator discretization are employed. When constructing a high-order accurate scheme for solving the hydrodynamic equations, the density function, as well as the potential, are considered at the tetrahedron nodes. On the domain boundary, a fundamental solution of the Laplace equation is used in the form of boundary conditions

[1*] Study was supported by RFBR and FWF under research projects 19-51-14002 (RFBR) and I 4311 (FWF).

of the first kind. The conjugate gradient method is used to solve the thus obtained sparse system of equations..

3. Code

In this section, the code design, main data structures, and vectorization of the calculations will be described. Some basic parts of the code in the C/C++ language or, for simplicity, in a pseudo-language (when it is more convenient) will be presented. We hope that these examples would help the readers to implement the code.

The main feature of polygonal grids is the use of analytical geometry procedures. A list of appropriate procedures will be presented below. All procedures are based on a three-dimensional vector:

```
struct vector3d
{
 double x, y, z;
};
```

Fig. 1. Three-dimensional vector structure

Let us define a set of physical variables, such as density, velocity vector, pressure, and speed of sound. Although the speed of sound is easy to reconstruct, it is also more convenient to use it. A set of conservative variables is chosen depending on the equations to be solved:

```
struct physics
{
   double density, pressure, sound,
          velocity_x, velocity_y, velocity_z;
};

struct conservative
{
   double density, energy,
          momentum_x, momentum_y, momentum_z
};
```

Fig. 2. Physical and conservative variables structures

A more complex construction for a new type called conservative was used in vector computations. A simpler hydrodynamic model without solving the equation for total energy will be used for vectorization. Such models (for instance, adiabatic or isothermal gas models) are widespread in astrophysics. For vectorization, we employed a C/C++ construction called union, in which the structure and the vector type of the data are used:

```
struct scalar_conservative
{
 double density, momentum_x, momentum_y, momentum_z
};

union conservative
{
   scalar_conservative scalar_vector;
  __m256d simd_vector;
};
```

Fig. 3. Physical and conservative variables structures for vectorization

To describe the nodes, we will store their coordinates, the number of neighboring nodes, an array of numbers of the neighboring nodes, the status (whether a node is a boundary one or not), the number of cells in which it is included, the set of the physical variables considered at the node, and the gravitational potential value:

```
struct node
{
 vector3d point;          // node coordinates
 int number_of_neigh;     // number and numbers of
```

```
                        // neighboring nodes
    int *neighbours;
    int in_border;          // status "on the boundary"
    int number_of_cells;    // number of adjacent cells
    physics hydro;          // physical variables
    double gravity;         // potential function
   };
```

Fig. 4. Structure for node

To reconstruct the potential by a finite element method, we need linear basic functions and the potential gradient. Data of this type will be used in a cell that will be described at the end of this subsection. Assume that each tetrahedral cell ABCD is constructed to be non-degenerate.

```
    struct gravity_term
    {
     // coefficients of linear functions
      double      a[A|B|C|D],
                  b[A|B|C|D],
                  c[A|B|C|D],
                  d[A|B|C|D];

     double phi[A|B|C|D];     //gravity values at nodes

     // potential gradient
     double gradfix,
                  gradfiy,
                  gradfiz;
    };
```

Fig. 5. Structure for gravity term

The structure notation is slightly shortened by listing the variants in the square brackets. The description of the data structures ends with a description of a cell:

```
    struct cell
    {
     int numA, numB, numC, numD;    // number of nodes
     int ngh[ABC|ABD|ACD|BCD];     // numbers of neighboring cells
     double vol;                   // cell volume
     double sq[ABC|ABD|ACD|BCD];   // face area
     vector3d center;              // center of inscribed sphere
     double radius;                // radius of inscribed sphere
     vector3d nrm[ABC|ABD|ACD|BCD]; // vectors of normals
     physics hydro;                 // physical variables
     conservative vector;          // conservative variables
     gravity_term gravity;         // gravity
     conservative flux[ABC|ABD|ACD|BCD];  // Riemann solutions
     physics rechydro[ABC|ABD|ACD|BCD];   //     piecewise     linear
     conservative vector[ABC|ABD|ACD|BCD];  // reconstruction of
     conservative flux[ABC|ABD|ACD|BCD]_x;      // variables
     conservative flux[ABC|ABD|ACD|BCD]_y;      // and fluxes
     conservative flux[ABC|ABD|ACD|BCD]_z;
    };
```

Fig. 6. Structure for cell

Let us consider calculation grid reading. A calculation grid format is constructed so that no procedures for finding nodes or cells in any computational situation are needed in the hydrodynamic code. The grid is stored in the following four files:

nodes.dat – node coordinates,
cells.dat – tetrahedral splitting the calculation domain,
portrait.dat – a grid portrait with node links,
border.dat – numbers of nodes lying on the domain boundary.

We used an explicit separation of the node geometry and the logic of work with nodes and cells. This approach simplifies the development, debugging, and subsequent maintenance of an application. The algorithm of work with these files in a pseudo-language is given below:

```
    read file nodes.dat:
    read n            # read number of calculation grid
nodes
    do i=1,n       # cycle over all nodes
     read x,y,z    # read node coordinates
    enddo          # end of cycle

    read file cells.dat:
    read m         # read number of cells
    do i=1,m       # cycle over all cells
     read a,b,c,d  # read tetrahedron node numbers
     read abc       # read cell number - neighbor on face
abc
     read abd       # read cell number - neighbor on face
abd
     read acd       # read cell number - neighbor on face
acd
     read bcd       # read cell number - neighbor on face
bcd
    enddo             # end of cycle, if the neighboring
cell           # number is 1, the face is external

    read file portrait.dat:
    read n            # read number of calculation grid
nodes
    do i=1,n       # cycle over all nodes
     read l        # read number of adjacent (i-1) nodes
     do j=1,l      # cycle of adjacent nodes
      read k       # read adjacent node number
     enddo         # end of cycle of adjacent nodes
    enddo          # end of cycle of nodes

    read file border.dat:
    read n         # read number of grid boundary nodes
    do i=1,n       # cycle over boundary cells
     read k        # read boundary node number
    enddo          # end of cycle of boundary cells
```

Fig. 7. Algorithm for mesh read

File portrait.dat is very important for constructing a sparse matrix portrait in which the numbers of adjacent nodes and the node in question are arranged in ascending order. File border.dat is used to take into account the boundary conditions of the Poisson equation. We used a Fortran-like grid reading procedure to shorten the program code, which is written in C/C++.

4. Vectorization

As noted above, the most computer time-consuming part is the calculation by the finite-volume scheme. The following code implements the Godunov scheme using AVX2 intrinsics:

```
    #pragma omp parallel for default(none)     \ // OpenMP pragma adjust-
ment
            shared(cells, tau)                 \ // shared memory objects
            private(i,tauvec, number_of_cells \ // private variables
                    sqdivvolabc, sqdivvolabd, \ // area to volume ratio
                    sqdivvolacd, sqdivvolbcd) \
            num_threads(MIC_NUM_THREADS)          \  //  number  of  OpenMP
threads
```

```
            schedule(dynamic)                          // task   assignment
method
    for( i = 0 ; i < number_of_cells ; i++ )   // the Godunov scheme
    {
      // loading of time step into vector
      tauvec      = _mm256_set1_pd(-tau);

      // loading of area to volume ratios into vectors
      sqdivvolabc = _mm256_set1_pd(cells[i].sqabc / cells[i].vol);
      sqdivvolabd = _mm256_set1_pd(cells[i].sqabd / cells[i].vol);
      sqdivvolacd = _mm256_set1_pd(cells[i].sqacd / cells[i].vol);
      sqdivvolbcd = _mm256_set1_pd(cells[i].sqbcd / cells[i].vol);

      // vector implementation of the scheme
      cells[i].vector.simd_vector =
        _mm256_mul_pd(
            tauvec,
            _mm256_add_pd(
                _mm256_add_pd(
                    _mm256_mul_pd(sqdivvolabc,
cells[i].fluxabc.simd_vector),
                    _mm256_mul_pd(sqdivvolabd,
cells[i].fluxabd.simd_vector)
                                ),
                _mm256_add_pd(
                    _mm256_mul_pd(sqdivvolacd,
cells[i].fluxacd.simd_vector),
                    _mm256_mul_pd(sqdivvolbcd,
cells[i].fluxbcd.simd_vector)
                                )
                            )
                        );
    }
```

Fig. 8. Vectorization template

Let us test the implementation on Intel Cascade Lake processors in a cluster called NKS-1P of the Siberian Supercomputer Center. For this, the number of threads will be varied, and the performance will be measured in gigaflops. A performance of 90 gigaflops has been achieved, which corresponds to approximately 62 % of that with AVX-512 technology [1], and is much greater than that in the first results of computational experiments on Intel Xeon Phi accelerators [3].

5. Conclusion

A new approach to the vectorization of computational fluid dynamics algorithms adapted for simulating astrophysical applications was presented. A new computational model of gravitational hydrodynamics was briefly described. With a vectorization procedure that implements a Godunov-type scheme, AVX2 tools were used to achieve a performance of 90 gigaflops with a single Intel Cascade Lake processor.

References

1. Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A. A New Hydrodynamic Code with Explicit Vectorization Instructions Optimizations that Is Dedicated to the Numerical Simulation of Astrophysical Gas Flow. I. Numerical Method, Tests, and Model Problems // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2019. – V. 243. – Article Number 4.
2. Surmin I., et al. Particle-in-Cell laser-plasma simulation on Xeon Phi coprocessors // Computer Physics Communications. – 2016. – V. 202. – P. 204-210.

3. Kulikov I.M., Chernykh I.G., Snytnikov A.V., Glinskiy B.M., Tutukov A.V. AstroPhi: A code for complex simulation of dynamics of astrophysical objects using hybrid supercomputers // Computer Physics Communications. – 2015. – V. 186. – P. 71-80.

HIGHLY LOADED EVENT DETECTION SYSTEM ARCHITECTURE

A.B. Mussina[1], S.S. Aubakirov[1], P. Trigo[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[2]GulAA; ISEL - Instituto Superior de Engenharia de Lisboa; BioISI - Biosystems & Integrative Sciences Institute / Agent and Systems Modeling, University of Lisbon, Portugal

Social networks already play a significant role in human's daily life. Therefore social networks have become an arena of enormous opportunities to perform data analysis. Social media analytics applies to digital marketing, social opinion analysis, political situation monitoring, natural disaster notification. It is possible to detect events on which people are reacting in every moment. Event detection is a powerful data analysing process useful for different areas. We want to construct social models and event patterns prediction model based on online social media event detection in real-time. In this part of the research work we will present highly loaded, fault-tolerant, scalable system for social media data collection and real-time analysis.

Key words: event detection, highly loaded, fault-tolerant, scalable architecture, Telegram.

1. Introduction

Social media is mostly free, powerful and highly-spreaded platform for brand communication with their audience. Company may get quick feedback and make influence analysis of its posts [1]. Different Online Social Networks (OSN) construct own relationships between consumers and producers [2]. In our main research we want to analyse social behaviour in the context of messaging and posts reaction within Telegram messenger. As of April 2020 the Kazakhstan's audience of Telegram reached 400 000 users, while at the beginning of 2019 it was approximately 200 000 users [3]. Telegram is relatively young OSN and has not yet been a subject of research. In April 2020 its monthly active users all over the world reached 400 million users. The authors of Telegram OSN provide many public tools for developers to build their own client application [4].

Event detection process has been applied for various OSNs and purposes. An "event" has different definitions according to context and application. First we consider the definition as "An occurrence causing change in the volume of text data that discusses the associated topic at a specific time. This occurrence is characterized by topic and time, and often associated with entities such as people and location" [5]. Event detection in OSN is important for social analysis, because it allows to estimate public interest in an occurred event. Moreover, events analysis lead to the detection of substantial sub-events [6]. For example, at the beginning of the 2020 year the whole world faced new virus COVID-19. Such high-level event subsumes many significant low-level sub-events such as illegal reselling essential items, bullying activity, misinformation spreading, growth of free online services and infection of celebrities.

Our goal is focused on the intellectual social modelling and event patterns prediction based on online social media in real-time. At the moment in our research we have analysed related work and implemented highly loaded, fault-tolerant, scalable system for social media data collection.

2. Related works

Event detection is fairly popular theme for researches. A comprehensive survey on event detection [5] describes four challenges in the event detection area:

1. New event detection (NED)
   This challenge occurred when we don't know what to expect. NED real-time system should correctly identify new event that has not been discussed before.
2. Event Tracking
   Refers to the study of how events spread and evolve.
3. Event summarization

Creating summary about events based on bursty features.

4. Event Associations

   Events could impact on each other. Event associations based on analysis of the events relationships. It is also denoted as ”event graphs” [7].

Another survey [8] includes research on event detection about disasters, news, out-breaks and traffic. The authors’ work was focused on analysing only the Twitter OSN. Authors mentioned actual work on pandemic outbreak detection made in [9] work. In Twitter people share information about their life, something personal. In case of pandemic users could post information about their health, symptoms or share any medical information. This data could be very helpful for medical authorities to estimate epidemic scale.

The natural disasters is a common interest of various researchers. People post essential information during and after event according to their feelings and real-time situation. Research [10] concentrated on the evolution of rare event, like storm, in the real world by analysing activities in virtual world. Their case study is based on Hurricane Sandy in 2012. Authors denotes the idea for social media activities temporal pattern construction.

Event detection technique depends on event characteristics and its category. Authors of [11] made a survey on event detection techniques for natural disaster events, trending topics and public opinion events in newswire, web forums, emails, blogs and microblogs. They defined that domain dependence is a huge challenge for researchers because techniques are extremely situational dependent. Time constraint is another characteristic which is also varying according to event category. Authors discussed techniques grouped by information flow between users: thematic, temporal, spatial and network structure. The survey includes researches on OSNs like Twitter, Facebook, Instagram, Youtube and Pinterest.

A huge survey [12] proposes definitions and categorizations in event detection process. The authors classified 34 works by event types, pivot techniques, detection method, detection task and application. The majority of researches were for detecting general interest events.

Researchers highlight relevance of event detection:

- “Event detection contains substantial information which describes different scenarios during events or crisis. This information further helps to enable contextual decision making, regarding the event location, content and the temporal specifications.”[11]
- “Could be used as an emergency notification tools about a disaster that coming on, as reference to manage traffic, as prediction tool for flu trends.”[8]
- ”Better event description through sub-event detection”[6]

3. Cloud-Native Application

Since social media crawler works with large amount of continuously increasing amount of data, it has several requirements for proper work.

1. Different Online Social Networks. Since social media crawler should work with different OSNs then external APIs will be different. However internal data processing will be identical for all.
2. New OSNs addition. This process should be gentle and simple. New resources should be given for additional OSN.
3. Data pre-processing and analysing. Increasing data cause increasing of preprocessing and analysing time.

In this section we are describing technology that fits our system requirements.

Elasticity is the degree to which the system is able to adapt to changes in workload by providing and removing resources in an autonomous approach, such that at any given time, the available resources are as close as possible to current demand [13].

Scalability. It can be differentiated into “structural scalability and load scalability. Structural scalability is the ability of a system to expand in a chosen dimension without significant changes in its architecture. Load scalability is the ability of the system to work correctly when the offered traffic increases [14].

Self-service deployment - is understood as part of the application deployment topology to implement a specific technical unit [15]. More often, a unit of deployment is understood as a “standard con-

tainer". The goal of a standard container is to encapsulate a software component and all of its dependencies in a self-describing and portable format so that any compatible runtime can run it without additional dependencies, regardless of the underlying machine and the contents of the container. This is a definition from the Open Container Initiative (OCI), which is explained in 5 principles of standard containers [16].

Today there is a paradigm of software development, which lays in business processes and architecture solutions to the above issues. The paradigm is called Cloud-Native Application Development (CNA Development) [17]. This term refers to a set of technologies and design patterns that have become the standard for building large-scale cloud applications. Software development in this paradigm provides the properties of successful cloud applications, including dynamic scalability, ultimate resiliency, non-disruptive upgrades, and security. To enable the creation of applications that meet these requirements, we describe a microservices architecture that is central to cloud design.

The author of work [18] analysed more than 50 works related to the development of cloud applications, collected and summarized approaches, methods and terms. As a result, they define the term Cloud-Native Application as follows: "A cloud application (CNA) is a distributed, flexible and scale-out system of (micro) services that isolates state in a minimum of stateful components. The application and each individual deployment module of this application are designed according to cloud-centric design patterns and run on a flexible self-service platform. "

In [19], it was proposed to call such applications IDEAL, so that the application was [Isolated state] isolated, [Distributed] had a distributed architecture, was [Elastic] flexible in the sense of horizontal scaling, was controlled using [Automated] automated systems, and its components must be loosely coupled. Creation of cloud applications in this paradigm leads to the following results [20]:

- faster provision of software solutions to the customer
- fault tolerance
- automation of recovery
- easy and fast horizontal scaling of applications
- the ability to process a huge amount of data

4. Results

In this section we will describe our architecture for social media data collection and processing, Telegram as OSN case study and database structure.

4.1. System architecture

During this stage of the research we have developed a cloud architecture based on microservices. Microservices are the decomposition of monolithic business systems into independently deployable services that perform a single task. The main way to communicate between services in a cloud application architecture is through published and versioned APIs (API-based collaboration). In our architecture microservices communicate via message queue.

The individual architecture deployment units are designed and interconnected according to a set of cloud-oriented patterns such as a twelve-factor app [21], a Circut Breaker [22].

We use the flexible OpenStack platform, which is used to deploy and operate these microservices through autonomous deployment units (containers). This platform provides additional operational capabilities on top of IaaS infrastructures, such as auto-scaling application instances and scaling on demand, application health management, dynamic routing, load balancing, and log and metrics aggregation.

In Figure 1 and Figure 2 we depicted the parsing process flow through our cloud architecture and general view of architecture. On that figure microservices have symbol of '*' near their names.

New message created in OSN detected and parsed by crawler. Firstly, crawler will save message in database. Secondly, it will put textual content of the message in queue. Queue service has an exchange area and defined queues. Tokenization consumer receive its data through queue. Consumer is located in data processing microservice. This microservice will be exposed later with other processing tools. After data pre-processing and processing, all extracted information go to database.

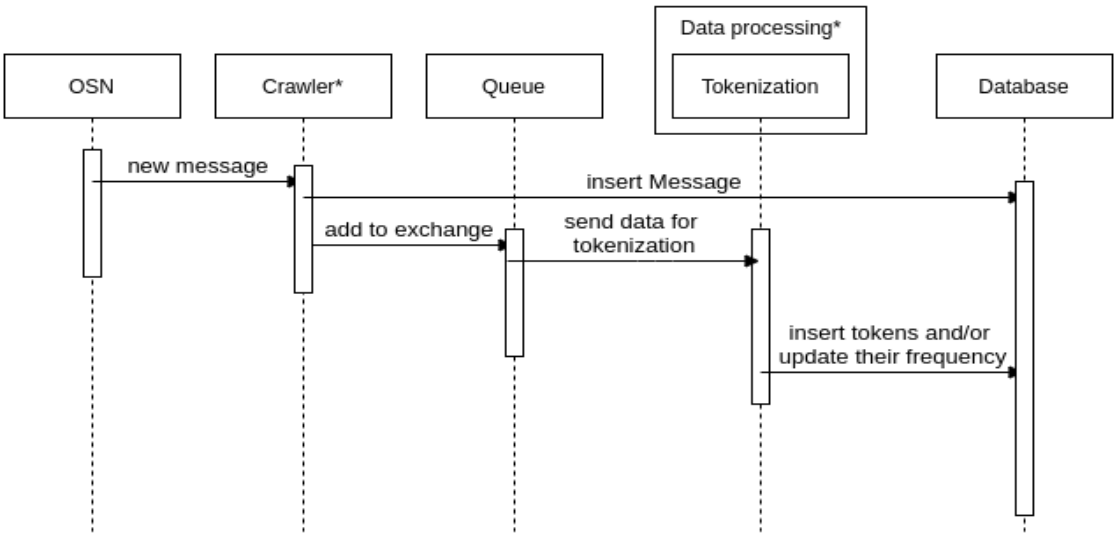


Figure 1. Parsing process flow

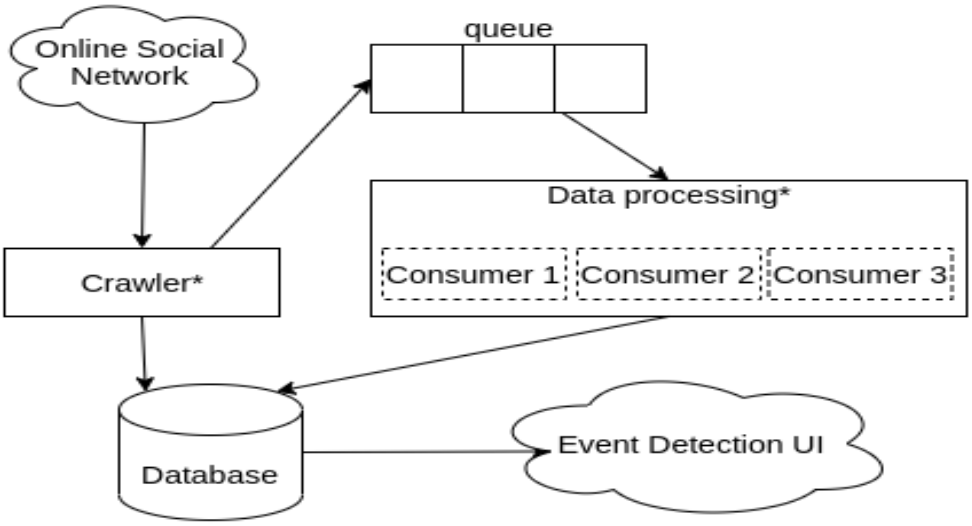


Figure 2. Architecture

4.1. Telegram

Nowadays social networks developers usually provide public tools or libraries to interact with their system and its data. It was mentioned above that Telegram becomes more and more popular. We decided to construct our social media crawler firstly based on Telegram OSN.

Telegram is an OSN which provides several communication ways. Users can communicate with each other in private chats, tet-a-tet, or create chat for more than two users. In telegram people can create channels where they post anything and other users may subscribe on them. Channels are similar to newswires.

According to official Telegram Database Library (TDLib) provided by Telegram, we have constructed our Client API application [4]. This application works under Telegram API Terms of Service and needs real registered user in original Telegram. Client API needs application authorization. We have created application in Telegram with real registered phone number. Application Id used for authorization in Client API. In case of breach of terms, the access to Telegram API will be discontinued via application id. Client API handles all the activities of authorized user. Client was added to public groups and channels of different interest like IT, politics, news, cinema, money, psychology. New

messages and posts go through our application and go to database. Client API written on Java. TDLib is written on C, but it already has native Java (using JNI). For database we used PostgreSQL.

4.2. Database architecture

TDLib allows to collect a lot of information about users, chats and messages. The Figure 3 shows relational model diagram of our database.

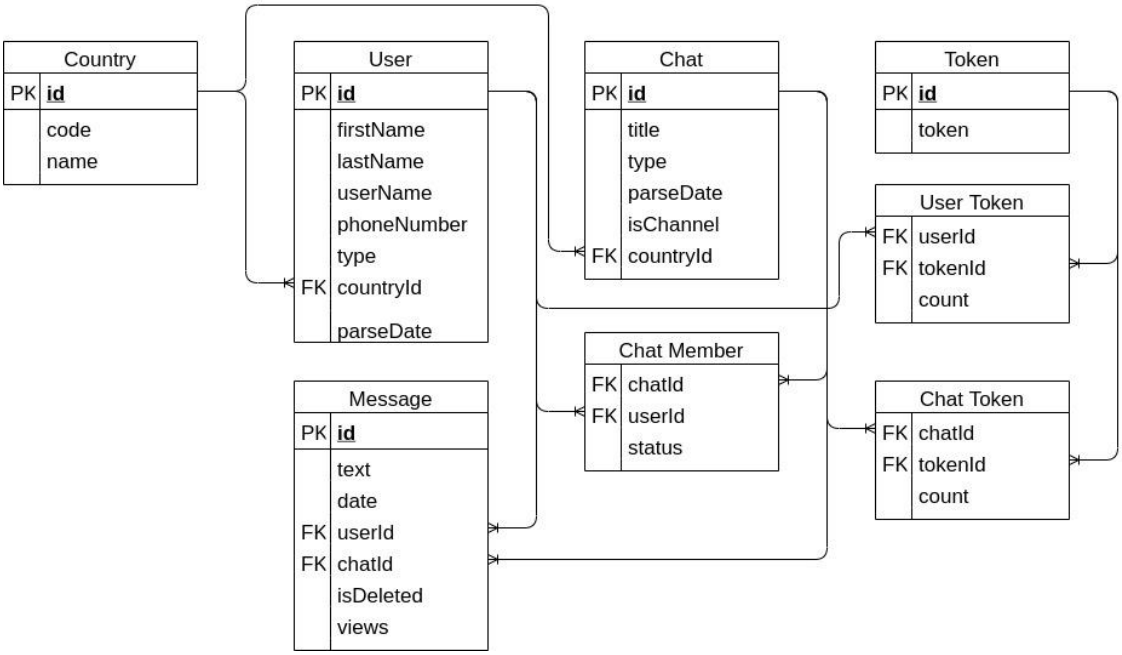


Figure 3. Database structure

The first implemented preprocessing task was message text tokenization. The token in our case is unigram. Before tokenization, text is cleared from Russian stop-words. Each token has its count within users' messages and chats' messages. For example, in Kazakhstan during COVID-19 pandemic and state of emergency, government pays 42500 tenge of compensation for people who lost their job or income. This '42500' token has total count greater than 9000 among chats, but it was mainly forced by conversations in one news channel. The biggest count among users is 194.

From 19.02.2020 we are collecting messages from public groups and channels from Kazakhstan. At the beginning of April we included chats from Russia, Belarussia, Ukraine and Uzbekistan. On 25.10.2020 database consists of 2141 chats, 242 000 users and 840 648 messages

5. Conclusion

We have developed highly loaded, fault-tolerant, scalable system for social media data collection using Cloud Native Application Development paradigm. Crawler collects messages from 2141 Telegram chats. Data processing microservice designed as scalable unit which could be easily exposed with additional tools. In future works we will detect events and go further to our main research goal.

References

1. Klepek, M. and Starzyczná, H. (2018). Marketing communication model for social networks. Journal of Business Economics and Management, 19:500–520.
2. Sharma, S. and Verma, H. (2018). Social Media Marketing: Evolution and Change, pages 19–36.
3. Telegram channels kazakhstan. https://kaz.tgstat.com/ Visited: 2020-04-18.
4. Telegram database library. Version 1.6.0. Jan 31, 2020. https://core.telegram.org/tdlib. Visited: 2020-02-10.

5. Dou, W., Wang, X., Ribarsky, W., and Zhou, M. (2012). Event detection in social media data. Proceedings of the IEEE VisWeek Workshop on Interactive Visual Text Analytics-Task Driven Analytics of Social Media Content, pages 971–980.
6. Saravanou, A., Katakis, I., Valkanas, G., and Gunopulos, D. (2018). Detection and delineation of events and sub-events in social networks. pages 1348–1351.
7. Yang, C., Shi, X., and Wei, C.-P. (2009). Discovering event evolution graphs from news corpora. Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on, 39:850 – 863.
8. Nurwidyantoro, A. (2013). Event detection in social media: A survey. pages 1–5.
9. Ritterman, J., Osborne, M., and Klein, E. (2009). Using prediction markets and twitter to predict a swine flu pandemic. 1st International Workshop on Mining Social Media.
10. Lu, S., Zhou, M., Qi, L., and Liu, H. (2019). Clustering-algorithm-based rare-event evolution analysis via social media data. IEEE Transactions on Computational Social Systems, PP:1–10.
11. Goswami, A. and Kumar, A. (2016). A survey of event detection techniques in online social networks. Social Network Analysis and Mining, 6.
12. Cordeiro, M. and Gama, J. (2016). Online Social Networks Event Detection: A Survey, volume 9580, pages 1–41.
13. Herbst, N.R., Kounev, S., Reussner, R., 2013. Elasticity in cloud computing: what it is, and what it is not. In: Proceedings of the 10th International Conference on Autonomic Computing (ICAC 13). USENIX, San Jose, CA, pp. 23–27.
14. Bondi, A.B., 2000. Characteristics of scalability and their impact on performance. In: Proceedings of the 2nd International Workshop on Software and Performance. ACM, New York, NY, USA, pp. 195–203. doi:10.1145/350391.350432.
15. Inzinger, C., Nastic, S., Sehic, S., Vögler, M., Li, F., Dustdar, S., 2014. Madcat: A methodology for architecture and deployment of cloud application topologies. In: Service Oriented System Engineering (SOSE), 2014 IEEE 8th International Symposium on, pp. 13–22. doi:10.1109/SOSE.2014.9.
16. Open Container Initiative, 2020. Open container runtime specification. https://opencontainers.org/ Visited: 2016-05-27
17. Gannon, Dennis, Roger S. Barga and Neel Sundaresan. “Cloud-Native Applications.” IEEE Cloud Computing 4 (2017): 16-21.
18. Kratzke, Nane, and Peter-Christian Quint. “Understanding Cloud-Native Applications after 10 Years of Cloud Computing - A Systematic Mapping Study.” Journal of Systems and Software 126 (2017): 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jss.2017.01.001.
19. Fehling, C., Leymann, F., Retter, R., Schupeck, W. and Arbitter, P., 2014. Cloud computing patterns: fundamentals to design, build, and manage cloud applications. Springer Science & Business Media.
20. Stine, M., 2015. Migrating to Cloud-Native Application Architectures. O’Reilly.
21. Adam Wiggins, 2014. The twelve-factor App. http://12factor.net Visited: 2020-02-14.
22. Martin Fowler, 2014. Microservices - a definition of this new architectural term. http://martinfowler.com/articles/microservices.html Visited: 2020-05-20.

MULTICRITERIA PROBLEM OF CALCULATION OF WIRELESS SYSTEM PARAMETERS USING QUALITATIVE INFORMATION ON THE DECISION MAKER'S PREFERENCE

D.E. Shaposhnikov, J.M. Makarova

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

The aim of this work is to analyze and select wireless system parameters of, taking into account qualitative information about the current preference of decision maker in the design and operation of a radio engineering system. The problem is analyzed and a mathematical model is built for choosing a rational option for parameters and characteristic for the operation of a radio engineering system, divided into two subsets characterizing the parameters of technical operation ("costs") and the parameters of the qualitative results of the device ("efficiency"). For each of the groups, the criteria are combined and then the bicriteria analysis of the solution options is carried out.

Keywords: wireless system; filtering; multicriteria optimization; IRCS; effective solution set.

1. Introduction

Due to the recent rapid and significant growth in the number of electronic communication devices, the electromagnetic noise environment is significantly deteriorating, especially in large cities. In some cases, deliberately created interference occurs that impedes the operation of electronic systems or even interferes with their work. These circumstances significantly increase the requirements for the properties of radio electronic devices, in particular, data transmission systems and radar equipment, and require modern approaches to the choice of operating frequency bands and signal structure.

The need to improve technologies is also true for acoustic transmitting and receiving systems, in particular, underwater ones. In this case, high requirements for frequency characteristics are due, first of all, to the variability and heterogeneity of the propagation medium, the lack of accurate information about its parameters, as well as the high and non-uniform frequency noise of the medium.

2. Model for making a rational decision on the choice of wireless system parameters

When designing or operating wireless systems, both digital and analog, it is necessary to make a decision on the choice of the system parameter values that are optimal (rational) from the point of view of the decision maker. Since, in the case of several particular optimality criteria (two or more), the optimal solution (the best according to all criteria) most often does not exist, an admissible solution is chosen as rational, which can be reasonably explained to other specialists.

For digital filters, the sought parameters are the filter coefficients, in the case of using analog filters, the values of the nominal values of electronic components (for example, resistors and capacitances for active filters). For the discussed below integrated radar and communication system (IRCS) the sought parameters are elements of the vector showing distribution of the total signal energy over subchannels.

The principles of applying and changing (adapting) the parameters of analog and digital filters are significantly different. The parameters of the analog filter are calculated once during design, then the equipment is manufactured, and the equipment is put into operation. The coefficients of digital filters can be determined (calculated) either a priori before the device starts operating, or they can be changed during industrial operation. In the latter case, it is required to reprogram the filter and change its frequency characteristics in order to adapt to changes in the external parameters of the transmission system. The latter case takes place in complex systems with changes in the operating bandwidth and car-

rier frequency. Subchannel power distribution in IRCS is also can be set a priori when producting as well as when operating the device. The latter case is considered to be more common.

Thus, the purpose of the decision is to determine a rational option for the values of the wireless system parameters during design and operation.

Let us consider the classical decision-making model from the point of view of theory contains four main components: variable parameters, their range of permissible values, a system of goals and criteria, and a decision-maker.

2.1. Signal parameters of the integrated radar and communication system as variable parameters

The problem of multicriteria search for optimal parameters of a wireless system is considered on the example of the integrated radio engineering system (IRTS), which simultaneously performs the functions of radar and communication. These systems are used in airplanes, drones, unmanned vehicles, vehicles with automatic control support, special-purpose devices, etc. The design and management of such multifunctional systems are complex technical tasks, which are essentially multicriteria optimization tasks.

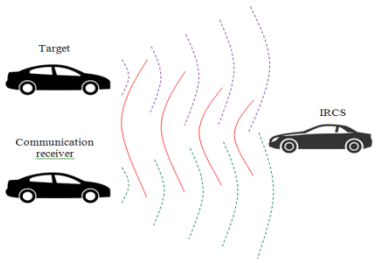


Fig. 1. IRCS functioning diagram for cars. solid red – integrated signal from IRCS; dash green and violet – reflected signals

For both radar and communication, an OFDM signal consisting of closely spaced orthogonal subcarriers is used. The total signal energy can be distributed over subchannels, and depending on this distribution, the functioning of the system changes and, accordingly, the values of the introduced efficiency criteria [1].

Let us assume that in the investigated mathematical model, from the point of view of a given subject area, the object of choice is a set (vector) $x = (x_1, \dots, x_n)$ of n parameters that are used in a given technical device.

The parameter vector x must belong to a certain region of feasible solutions D, which is given a priori and is determined at the design stage. In special cases, the area D can be a discrete range of values of a sufficiently high power, a hypercube, and suggests the possible presence of complex nonlinear restrictions on the parameters [2]

Variable parameters in the system include, first, the distribution of energy over the subchannels, specified in the form of a normalized vector$x = (x_1, \dots, x_N)$. The value x_m is the power transmitted over the i-th subchannel. The distribution can be changed directly during operation, obtaining different functioning of the system depending on the external situation and the preferences of the operator. In addition, the configurable parameters are the number of subchannels, the width of the subchannel, the center frequency, the number of pulses, the pulse repetition interval, the number of OFDM symbols, the duration of the OFDM symbol, but they are usually specified during the design. In our work, we consider the energy distribution over subchannels as variable parameters and determine the behavior of the criteria when they change.

Consider four particular criteria for assessing the efficiency of the IRCS: Q_1: The communication efficiency; Q_2: The accuracy of determining the distance to the target; Q_3: The accuracy of determining the target speed; Q_4: The accuracy of determining the target reflection coefficients.

It is proposed to use the channel capacity as a characteristic of the communication efficiency. According to the Shannon-Hartley theorem, the bandwidth of a channel, measured in bits per second, can be found as

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right), \quad (1)$$

where S is the average power of the received signal, N is the average noise power, B is the channel bandwidth in hertz [3, 4].

For a channel with frequency selective attenuation, which is divided into N subchannels of width Δf, there is a generalization of the bandwidth formula

$$C = \sum_{m=0}^{N-1}\left[\Delta f \cdot \log_2\left(\frac{1 + |x_m|^2|h_m|^2}{\sigma_c^2}\right)\right], \quad (2)$$

where h_m is the transfer function of the m-th subchannel, σ_m is the noise power, which is assumed to be the same in the entire channel [5draft].

To assess the effectiveness of radar, we use the value of the lower bound from the Cramer-Rao inequality. The Cramer-Rao inequality is used to obtain the boundaries of the minimum measurement errors [5, 6]. The Cramer-Rao boundary was chosen as the accuracy estimate because the procedure for finding it requires less computational work compared to others, such as the Bhattacharya bound, for which it is necessary to calculate high-order partial derivatives, or the Barankin bound, for which it is necessary to find the maximum of the function. The latter generally give a slightly more accurate lower bound than the Cramer-Rao inequality, and in the case of an unbiased estimate, the Cramer-Rao bound is an exact result [7]. Thus, the Cramer-Rao bound is optimal in terms of accuracy and computational complexity.

In the case when $\hat{\theta}(x)$ is an unbiased estimate of the parameter θ and the regularity conditions are satisfied, the Cramer-Rao inequality is written as follows:

$$D_\theta\hat{\theta}(x) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}, \quad (3)$$

$I_n(\theta)$ is Fisher's information, $D_\theta\hat{\theta}(x)$ is the variance, for an unbiased estimate equal to $D_\theta\hat{\theta}(x) = M\left(\hat{\theta} - \theta_t\right)^2$, where$\theta_t$ is the true value of θ, M is the mathematical expectation [8].

The Cramer-Rao bounds for time delay, velocity and reflection coefficients are obtained from the Cramer-Rao matrix equal to the inverse Fisher information matrix [5, 6]:

$$\begin{bmatrix} CRB(\tau) & CRB(\tau,\upsilon) & \mathbf{CRB}(\tau,\boldsymbol{\eta}) \\ CRB(\nu,\tau) & CRB(\upsilon) & \mathbf{CRB}(\upsilon,\boldsymbol{\eta}) \\ \mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta},\tau) & \mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta},\upsilon) & \mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\tau\tau} & J_{\tau\upsilon} & J_{\tau\boldsymbol{\eta}} \\ J_{\nu\tau} & J_{\nu\nu} & J_{\upsilon\boldsymbol{\eta}} \\ J_{\boldsymbol{\eta}\tau} & J_{\boldsymbol{\eta}\nu} & J_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4)$$

The Cramer-Rao boundary for target distance can be found across the boundary for the time lag:

$$CRB(R) = \frac{c_0^2}{4} CRB(\tau), \quad (5)$$

To improve radar accuracy, the aforementioned radar criteria should be minimized provided the total signal power is limited:

$$\boldsymbol{x}_{Q2} = \operatorname{argmin} CRB(R), \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = 1; \quad (6)$$

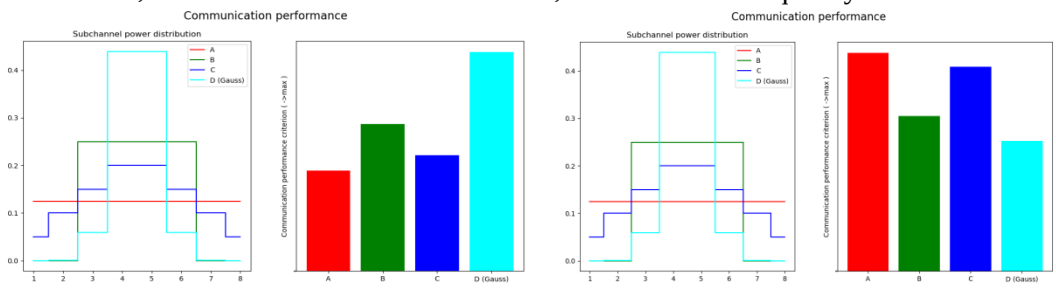
$$\boldsymbol{x}_{Q3} = \operatorname{argmin} CRB(\upsilon), \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = 1; \quad (7)$$

$$\boldsymbol{x}_{Q4} = \operatorname{argmin} \operatorname{tr}[\boldsymbol{CRB}(\boldsymbol{\eta})], \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{x} = 1. \quad (8)$$

The problem of finding the optimal (maximum) channel capacity with a limited total signal power is written as follows:

$$\boldsymbol{x}_{Q1} = \operatorname{argmax} \sum_{m=0}^{N-1} \Delta f \log_2\left(1 + |x_m|^2|h_m|^2/\sigma_c^2\right), \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N, \boldsymbol{x}^H\boldsymbol{x} = 1. \quad (9)$$

Figure 2 shows, as an example, the values of the communication efficiency criterion for different energy distributions for different noise levels in the channel. The calculation was carried out for the case of 8 subcarriers, the subchannel width is 0.25 MHz, and the center frequency is 5 GHz.



a) low noise level b) high noise level

Fig. 2. Dependence of the communication efficiency criterion of IRCS on the power distribution over subchannels in the case of 8 subcarriers with different noise levels

2.2. Objects and criteria as characteristics of the quality of the selected solution

A criterion (particular criterion) is a characteristic (one of the numerical characteristics), expressed in numerical form and having an explicit target direction (minimization or maximization). Consider the problem of making a decision to determine the technical parameters of the wireless system *x* as a multi-criteria choice problem [9].

When considering the goals and criteria for making a decision in the described problem, it should be noted that the use of each permissible combination of variable parameters has its own technical characteristics, which can be divided into two fundamental groups: the first can be conditionally characterized as "costs", the second - as "effect". The system seeks to minimize the particular criteria of the first group in the given conditions of place and time, the particular criteria of the second group - to maximize.

1. Let us assume that from the point of view of this subject area, a set (vector) M of numerical characteristics (partial cost criteria) with respect to option x is used as a "cost":

$$P(x) = \left(P_1(x), \dots, P_M(x)\right). \tag{10}$$

Suppose also that the function of combining M private cost criteria into a generalized cost criterion $G(x) = G\left(P(x)\right)$has been constructed, which, in particular cases, can be a generalized additive optimality criterion:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{M} y_i P_i(x), \tag{11}$$

or a generalized logical criterion (criterion of maximum caution) [9]:

$$G(x) = \max_{1 \le i \le M}\left(y_i P_i(x)\right), \tag{12}$$

Also, a widespread way of combining the numerical characteristics of technical systems into a scalar value is a generalized criterion built using the "ideal point" method:

$$G(x) = \left[\sum_{i=1}^{M} y_i\left(P_i^* - P_i(x)\right)^r\right]^{\frac{1}{r}}, r \ge 1, P_i^* \le P_i(x), i = 1, \dots, M. \tag{13}$$

Here the vector $P^* = (P_1^*, \dots, P_M^*)$ is the ‘best’ or ‘ideal’ (possibly theoretically and practically unattainable) variant of characteristics.

The vector$y = (y_1, \dots, y_M)$ is the weighting coefficients of the relative importance (preference) of particular cost criteria, pre-assigned during the design and selected from the D_y area:

$y \in D_y = \{y \in R^M \vert y_i \geq 0, i = 1, \dots, M;\ \sum_{i=1}^{M} y_i = 1\}$	(14)

2. The efficiency of fulfilling the required conditions for the selected parameters x is another group of particular criteria.

Consider a vector of n numerical characteristics (particular criteria of filtration efficiency) with respect to the solution $x = (x_1, \dots, x_N)$:

$Q(x) = \big(Q_1(x), \dots, Q_N(x)\big).$	(15)

When designing filters, the efficiency criteria are the values of the quality function at a given discrete set of frequencies [10, 11]. In the passband, the quality function is defined as the square deviation of the obtained frequency response of the filter from the required one, which must be minimized. In the suppression band and transition bands, it is not the deviation that should be minimized, but the modulus of the transmittance itself, which acts as a quality function and is to be minimized.

For IRCS four efficiency criteria are introduced which characterize the quality of radar and communication. Radar efficiency criteria, showing the proximity of the found distance to the target, its speed and reflection coefficients to the actual ones, are to be minimized. The channel capacity, which serves as a communication efficiency criterion, is to be maximized [1]. When operating the importance of the criteria and therefore their weight may vary depending on the environment and external parameters. For example, for cars the preferences of the criteria are determined by the road situation and the driving mode.

Let us also assume that, by analogy with the "cost" criteria, the function of combining N private quality criteria into a generalized efficiency criterion $F(x) = F\big(Q(x)\big)$ is constructed, which, in particular cases, can also be a generalized additive optimality criterion:

$F(x) = \sum_{j=1}^{N} w_j Q(x),$	(16)

or a generalized logical criterion (criterion of maximum caution) [9]:

$F(x) = \min_{1 \leq j \leq n} \big(w_j Q_j(x)\big),$	(17)

the vector $w = (w_1, \dots, w_N)$ is the weighting coefficients of the relative importance of particular effectiveness criteria, assigned in advance during design and selected from the area D_y:

$w \in D_w = \{w \in R^N \vert w_j \geq 0, j = 1, \dots, N;\ \sum_{j=1}^{N} w_j = 1\}.$	(18)

The weighting coefficients $y = (y_1, \dots, y_M)$ and $w = (w_1, \dots, w_N)$ reflect the relative importance (preference) of the particular criteria of "cost" and "efficiency", respectively. Here, importance is understood in the sense of the axiomatic theory of importance [12], which allows us to consider: if additional information of the form is known, the i-th criterion is no less important than the j-th criterion $\big(Q_i \succcurlyeq Q_j\big)$, then for the corresponding weight coefficients the ratio:

$Q_i \succcurlyeq Q_j \Leftrightarrow w_i \geq w_j;$ $P_i \succcurlyeq P_j \Leftrightarrow y_i \geq y_j.$	(19)

We also assume that the weight coefficients belong to the corresponding areas of their admissible values:

$y \in D_y = \{y \in R^M \vert y_i \geq y_0 > 0, i = 1, \dots, M;\ \sum_{i=1}^{M} y_i = 1\}.$	(20)
$w \in D_w = \{w \in R^N \vert w_j \geq w_0 > 0, j = 1, \dots, N;\ \sum_{j=1}^{N} w_j = 1\}.$	(21)

Here, the values y_0 and w_0 are threshold values and provide the efficiency (but not weak efficiency) of feasible solutions x [12].

Usually, when considering the objective functions of "costs" and "efficiency", all frequencies are considered equivalent in importance, that is, the weight coefficients for particular criteria that are responsible for the compliance of frequency characteristics with the requirements at different frequencies are equal to each other [10, 11, 13]. The paper [14] proposes to introduce different weights for different frequency bands, but the authors limit themselves to only two options: for the passband and the suppression band. In real life conditions and situations, the distribution of significance along the frequency axis can be much more complex.

The weighting factors of importance $y = (y_1, \dots, y_M)$ and $w = (w_1, \dots, w_N)$ can be set a priori by assigning their exact values by the designer. However, it is often difficult to implement such an assignment since the same preferences can be realized by different and far from each other sets of weight coefficients. In [9], an approach is described that allows the automatic assignment of weighting coefficients, taking into account qualitative (that is, non-quantitative and, possibly, incomplete) information about preferences by importance on a set of weighting factors.

References

1. Liu, Y. Multiobjective optimal waveform design for OFDM integrated radar and communication systems / Yongjun Liu, Guisheng Liao, Zhiwei Yang, Jingwei Xu // Signal Processing, 2017. № 141, P. 331–342.
2. Batischev D.I. Optimal design methods. Moscow, Radio and communication, 1984. 248 p.
3. Lea P. Internet of Things for Architects. UK, Birmingham, Packt Publishing, 2018. 499 p.
4. Sklar B. Digital Communications: Fundamentals and Applications. Pearson Education, 2016. 1104 p.
5. Cook Ch., Bernfeld M. Radar Signals. An Introduction to Theory and Application. UK, London, Academic Press, 1967. 532 p.
6. Scharf L., Demeure C. Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis. Addison-Wesley Pub. Co.,1991. 524 p.
7. Van Trees H. L. Detection, Estimation, and Modulation Theory. John Wiley & Sons, 2004. 716 p.
8. Kryanev A., Lukin G., Udumyan D. Metric analysis and data processing. Fizmatlit, 2012. 308 p.
9. Batischev D.I., Shaposhnikov D. E. Multi-criteria choice taking into account individual preferences / Monograph. IAPRAS, 1994. 92 p.
10. Makarova Ju, Shaposhnikov Dm. Bicriteral problem of finding filter parametersusing qualitative information on frequency interval preferences. // Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference “Information Systems and Technology – 2020”, April 24-28, 2020, Nizhni Novgorod, Russian Federation. P. 839–847.
11. Bugrov V., Makarova Iu. Design of an Anti-aliasing Active Filter for a Hydroacoustic Receiving Station Using Discrete Non-linear Mathematical Optimization. Elektrotehniški Vestnik. Ljubljana, Slovenija. 2018. № 85(3): P. 84–88.
12. Podinovskiy V. V., Nogin V. D. Pareto-optimal solutions to multicriteria problems. Moscow, Science, 1982. 256 p.
13. Suman K. S., Kar R., Mandala D., Ghoshal S. P. Gravitation search algorithm: Application to the optimal IIR filter design // Journal of King Saud University - Engineering Sciences, 2014. vol. 26, issue 1, P. 69-81.
14. Nirmala P., Rani Hemamalini R. Efficient FIR filter design methodology using dynamic regional harmony search algorithm with opposition and local learning (DRHS-OLL) // International Journal of Engineering and Technology (IJET). 2014. vol. 6, no 4, P. 1799-1810.

GALERKIN METHOD FOR SOLVING HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION IN THE PROBLEM OF ACOUSTIC SCATTERING FROM A NON-PLANAR SMOOTH SCREEN[1*]

A.A. Tsupak

Penza State University, Penza Russia

The problem of diffraction of acoustic wave by an infinitely thin curvilinear sound-hard screen is considered. The integro-differential equation of the diffraction problem is studied. The operator of the equation is treated as a mapping in appropriate Sobolev spaces. Galerkin method is used to find approximate solutions of the problem. Basis functions with compact support are defined for arbitrary smooth parameterized screens. Convergence of the Galerkin method is proved in the chosen Sobolev spaces. The numerical method is implemented and tested; the approximate solutions are compared with the known exact solution of the test problem.

Key words: acoustic diffraction, curvilinear sound-hard screens, basis functions, convergence of Galerkin method.

1. Introduction

The problem under consideration is the problem of diffraction of a monochromatic acoustic wave by a smooth open non-planar oriented sound-hard screen. The problem can be reduced [7] to a singular integro-differential equation (IDE) over the surface of the screen. The operator of the IDE can be treated as an elliptic pseudo-differential operator [7] of order 1 in appropriate Sobolev spaces on a manifold with boundary. The ellipticity and invertibility of the operator result in the convergence of the Galerkin method in the solutions' space X, if the basis functions v_k satisfy the approximation condition [3].

In the case of a plane screen the piecewise-linear functions with a hexagonal support [4] can be chosen for basis functions [5, 6].

Herein, we consider a more general case of an acoustically hard screen represented by a smooth parameterized surface. A difficulty here is that the implementation of the numerical method for solving the problem on such screens involves the construction of computational grids and the proper determination of basis functions. A common solution to this remedy is in approximating the given curvilinear screen by a piecewise flat one [2]. This is a convenient approach (from a computational point of view), though it's theoretical justification is not easy, since the of solutions on a smooth screen is in fact replaced by an entirely different functional space.

The presently proposed technique is free from these formal difficulties because the basis functions are at once defined on curvilinear screens. It is shown in the paper that on such screens one can introduce complete systems of basis functions.

We also represent several numerical results of solving the problem on closed and open screens. The Galerkin was implemented using the MPI interface, a series of computational test was carried out on the "Lomonosov-2" supercomputer [8]. The experiments indicated the projection method's convergence and stability.

2. Integro-differential equation of the diffraction problem

The problem of diffraction of a monochromatic acoustic wave $U(x,t) = u_0(x)e^{-i\omega t}$ by an acoustically hard screen Ω is reduced [7] to the integro-differential equation over the screen's surface,

[1*] The research is carried out using the equipment of the shared research facilities of HPC computing resources at Lomonosov Moscow State University.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\left(\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G(x,y)\varphi(y)ds_y\right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Here $(x,y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, $\mathbf{n}_x$ and is the normal unit vector, $k_0 > 0$ is the given wave number of $\mathbb{R}^3$.

We will consider C^∞ smooth open bounded surfaces parameterized by a given vector function

$$x(t) = (x_1(t_1,t_2), x_2(t_1,t_2), x_3(t_1,t_2)). \tag{2}$$

The function $x(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^2$ is a C^∞ diffeomorphism whose Jacobi matrix has rank 2 everywhere in $\overline{T}$. The domain T of parameters $t := (t_1, t_2)$ is a bounded domain with piecewise smooth boundary ∂T. The boundary ∂T is a union of a finite number of C^∞ smooth arcs that intersect at angles $\gamma \in (0; 2\pi)$. The operator A of equation (1) can be treated as an elliptic pseudo-differential operator in Sobolev spaces on manifolds with boundary [7]:

$$A: \widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}) \to H^{-1/2}(\Omega).$$

The Sobolev spaces on open smooth screens are defined in a standard way. Consider Ω as an open submanifold of a C^∞ smooth closed two-dimensional oriented manifold Ω_0. Let $\{U_\alpha\}$ be a finite cover of Ω_0 with coordinate neighborhoods that are mapped by C^∞ diffeomorphisms $\kappa_\alpha: U_\alpha \to V_\alpha$ onto domains $V_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ with smooth boundaries ∂V_α. Assume also that there exists a partition ρ_α of unity which subordinates to the open cover $\{U_\alpha\}$. The norm of the space $H^s(\Omega_0)$ is defined as follows [1]:

$$\| u \|_{H^s(\Omega_0)} = \sum_\alpha \|u(\kappa_\alpha^{-1}(t))\rho_\alpha(\kappa_\alpha^{-1}(t))\|_{H^s(\mathbb{R}^2)}. \tag{3}$$

Now, $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ is the space of functions from $H^{1/2}(\overline{\Omega}_0)$ with compact support in $\overline{\Omega}$, whereas $H^{-1/2}(\overline{\Omega})$ is the space of restrictions of elements from $H^{-1/2}(\Omega_0)$ to Ω.

3. Convergence of the Galerkin method

Consider equation

$$A\varphi = f \quad A: \widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \tag{4}$$

and Galerkin method

$$\langle A\varphi_n, v_i\rangle = \langle f, v_i\rangle, \quad i = 1,\dots,n. \tag{5}$$

Here $\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(x)$ is an approximate solution to (4), $v_j(x)$ are the basis functions on Ω. The form $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)ds_x$ determines the antidual pairing of spaces $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ and $H^{-1/2}(\overline{\Omega})$.

To define basis functions on Ω we, first, use a set of functions $v_i^{(0)}$ in the rectangle domain $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$:

$$v_{i_1,i_2}^{(0)}(t_1,t_2) = \tilde{v}^{(0)}((t_1 - a_1)/h_1 - i_1, (t_2 - a_2)/h_2 - i_2), \tag{6}$$

where $h_k = (b_k - a_k)/n$, $(k = 1,2,\ n \in \mathbb{N},)$ and $\tilde{v}^{(0)}$ is a piecewise linear function with hexagonal support [4]

$$\tilde{v}^{(0)}(t_1,t_2) = \begin{cases} 1 - t_1, & t_1 \in [0,1], \quad t_2 \in [0, t_1], \\ 1 - t_2, & t_1 \in [0,1], \quad t_2 \in [t_1, 1], \\ 1 + t_1 - t_2, & t_1 \in [-1,0], \quad t_2 \in [0, t_1 + 1], \\ 1 + t_1, & t_1 \in [-1,0], \quad t_2 \in [t_1, 0], \\ 1 + t_2, & t_1 \in [-1,0], \quad t_2 \in [-1, t_1], \\ 1 - t_1 + t_2, & t_1 \in [0,1], \quad t_2 \in [t_1 - 1, 0]. \end{cases} \tag{7}$$

Then we define basis functions $v_i(x)$ on Ω as follows

$$\tilde{v}_i(x) = \tilde{v}^{(0)}(\kappa(x)), \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

where $\kappa(x): \Omega \to T$ is the inverse mapping with respect to $x(t): T \to \Omega$.

Henceforward, we will use the notation $X_n := Lin\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Let us prove the theorem on convergence of the Galerkin method.

Theorem 1 Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a C^∞ smooth oriented open surface parameterized by a given function $x(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}^2$. Let the basis functions v_i be defined by (7),(8). Then the X_n possess the denseness property in $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ and the Galerkin method converges for A.

Proof. 1. We have already noted that A is an elliptic operator in spaces chosen. Moreover, A is an injective operator. Indeed, the homogeneous integro-differential equation (1) is equivalent [5, 6] to the homogeneous boundary value problem for the Helmholtz equation. The has only the trivial solution. Thus, $\varphi \equiv 0$ is the only solution to equation $A\varphi = 0$. Thus, to prove the convergence of the Galerkin method, it suffices to show [3] that subspaces X_n possess to denseness property in $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$.

2. Since the functions $v_i^{(0)}$ and their first derivatives are square integrable in T, then $v_i^{(0)} \in \widetilde{H}^{1/2}(\overline{T})$. The smooth parameterization of Ω by x now implies [1] that $v_i(x) \in \widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$.

3. Further, we will verify that $v_i(x)$ form a complete system of functions in $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$, showing that for any $u \in \widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ and for any $\varepsilon > 0$ there exist $n \in \mathbb{N}$ and $u_n \in X_n$ such that

$$\| u - u_n \|_{\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})} < \varepsilon.$$

Let $B_1 = B_r(t_0)$ be an open circle of radius $r > 0$ centered at $t_0 \in \mathbb{R}^2$ such $\overline{T} \subset B$ and $dist(\partial T, \partial B) > 0$. Denote by Ω_1 the image of B_1 under the parameterizing mapping $x(t)$. Note that, since $x(t)$ is a C^∞ mapping, then Ω_1 is a smooth surface such that $\Omega \subset \Omega_1$ and $dist(\partial\Omega, \partial\Omega_1) > 0$.

For an arbitrary u in $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ its continuation by zero $\mathcal{E}_0 u$ from Ω to Ω_1 belongs to $\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega}_1)$. Moreover, for any smooth oriented closed surface $\Sigma \supset \Omega_1$ one has $\mathcal{E}_0 u \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Introduce an atlas $(U_\alpha, \kappa_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, m$, on Σ and a partition $\{\rho_\alpha\}$ of unity subordinate to the open cover $\{U_\alpha\}$ such that there exists α_0 such that

$$U_{\alpha_0} = \Omega_1, \quad \kappa_{\alpha_0}(x) = \kappa(x).$$

Since $u \in \widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})$ and $x(t)$ is smooth, then [1] $u_T(t) := u(x(t)) \in \widetilde{H}^{1/2}(\overline{T})$. The denseness property for $X_{n,T} = Lin\{v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}\}$ implies [5, 6] that there exist coefficients c_j such that

$$\| u_T - u_{n,T} \|_{\widetilde{H}^{1/2}(\overline{T})} = \| \mathcal{E}_0 u_T - \mathcal{E}_0 u_{n,T} \|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \tag{9}$$

We obtain

$$\begin{aligned} &\|u - u_n\|_{\widetilde{H}^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})} = \| \mathcal{E}_0 u - \mathcal{E}_0 u_n \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} \| \mathcal{E}_0 u\big(\kappa_\alpha^{-1}(t)\big)\varphi_\alpha\big(\kappa_\alpha^{-1}(t)\big) - \mathcal{E}_0 u_n\big(\kappa_\alpha^{-1}(t)\big)\varphi_\alpha\big(\kappa_\alpha^{-1}(t)\big) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \| \mathcal{E}_0 u\big(\kappa^{-1}(t)\big)\varphi\big(\kappa^{-1}(t)\big) - \mathcal{E}_0 u_n\big(\kappa^{-1}(t)\big)\varphi\big(\kappa^{-1}(t)\big) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} = \\ &= \| \mathcal{E}_0 u_T - \mathcal{E}_0 u_{n,T} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Thus, the denseness property is satisfied, the Galerkin method converges and the error estimate [2]

$$\| u - u_n \|_{\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})} \le \inf_{\psi \in X_n} \| u - \psi \|_{\widetilde{H}^{1/2}(\overline{\Omega})}. \tag{11}$$

holds. The proof is complete. ■

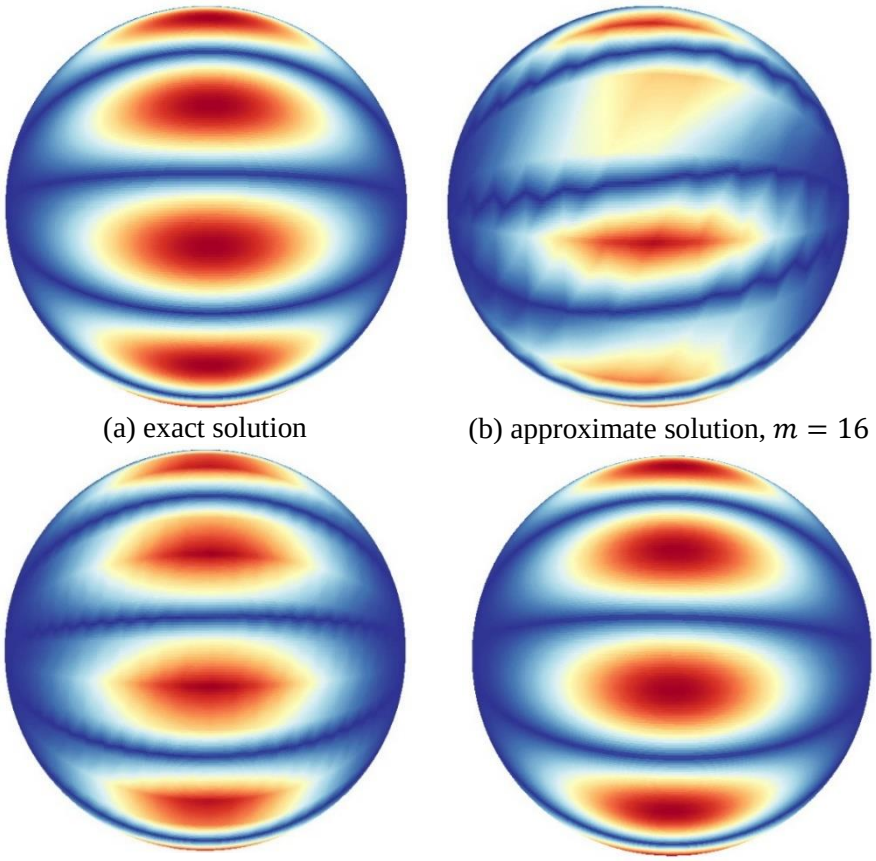
4. Numerical results

In this section we show results of numerical solving a test problem of diffraction on an acoustically hard unit sphere $S_1(0)$ centered at the origin. It is known [2] that the eigenfunctions of the IDE (1) can be represented as follows

$$s_{n,m}(x) = P_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi), \quad P_n^m(u) = (1-u^2)^{1/2}\frac{d^m}{du^n}P_n(u), \tag{12}$$

where P_n are the Legendre polynomials, and φ, θ denote the spherical coordinates of a point $x \in S_1(0)$.

$$x_1 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\theta\sin\varphi, \qquad x_3 = \cos\theta \quad \theta \in [0;\pi], \qquad \varphi \in [0;2\pi).$$



(a) exact solution (b) approximate solution, $m = 16$

(c) approximate solution, $m = 32$ (d) approximate solution, $m = 128$

Fig. 1. Solution of the test scattering problem on a sound-hard unit sphere.

Fig. 1 (a) shows the modulus of the exact solution $\varphi(x)$ to (1) with the function $s_{5,5}$ representing the right-hand side of the equation. Figures 1 (b), (c) and (d) represent the approximate solutions $\varphi_n(x)$ obtained by Galerkin method. The total number of basis functions is $n = (m-1)^2$, whereas m represents the dimension of the grid in the parameters t_1, t_2. We consider uniform grids γ_m in the rectangle domains $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$,

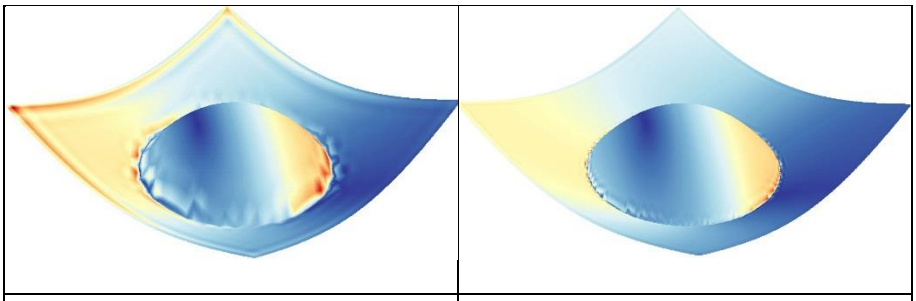
$$\gamma_m = \{(t_{1,i_1}, t_{2,i_2}) : t_{k,i_k} = a_k + (b_k - a_k) \cdot i_k/m, \qquad i_k = 0, \dots, m\}.$$

Further, we consider we consider the problem of diffraction of a monochromatic wave with the complex amplitude $u_0 = e^{ik_0(0.6x_1 + 0.8x_2)} + 0.2e^{-ik_0x_3}$ on a piecewise smooth surface Ω defined by the following formula

$$x_1 = t_1, \qquad x_2 = t_2, \qquad x_3 = \begin{cases} -|t|^2, & t \in T_1, \\ 0.6|t|^2 - 0.72, & t \in T_2. \end{cases} \tag{13}$$

Here the domain $T = [-1; 1]^2 = T_1 \cup T_2$ with $T_1 = \{t : |t| < 0.6\}$ and $T_2 = T \backslash T_1$.

The plots of two approximate solutions are presented in Fig. 2.



(c): $m = 32$ (d): $m = 64$

Fig.2. Modulus of the approximate solutions φ_m of the scattering problem on the piecewise smooth screen.

We will also find out, if the sequence $\{\varphi_m\}$ converges. Note that the convergence of Galerkin method was proved under the assumption that Ω is a smooth surface. Moreover, we don't have a precise solution of the latter problem. However, we can experimentally study the Cauchy convergence of the approximate solutions $\{\varphi_m\}$ of the problem. Table 1 represents the dependence of the relative accuracy, $\Delta_{m,n,\Omega} = \| \varphi_n - \varphi_m \|_{L_2(\Omega)}$, $n > m$, and clearly exhibits the Cauchy convergence of the obtained approximations. Fig. 2 also shows visible perturbation in a small vicinity of the line separating two smooth parts of the screen.

Table 1. Accuracy for approximate solutions to the problem of diffraction on a sound-hard piecewise smooth open surface.

	$m = 6,$	$m = 8,$	$m = 12,$	$m = 16,$	$m = 24,$	$m = 32,$	$m = 48,$
	$n = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 24$	$m = 32$	$m = 48$	$m = 62$
$\Delta_{m,n,\Omega}$	0.54	0.41	0.31	0.23	0.15,	0.12	0.067

References

1. Agranovich M. S. Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains. Springer International Publishing. 331 p. DOI 10.1007/978-3-319-14648-5.
2. Daeva S.G., Setukha A.V. Numerical Simulation of Scattering of Acoustic Waves by Inelastic Bodies using Hypersingular Boundary Equation // AIP Conference Proceedings. 2015. Vol. 1648. P. 39004-1–390004-4. DOI: 10.1063/1.4912614.
3. Kress R. Linear integral equations. Applied mathematical sciences. 89. Springer-Verlag New York Inc. 1989. 300 p. DOI 10.1007/978-3-642-97146-4.
4. Marchuk G.I. Vvyedyeniye v proyektsionno-syetochnyye myetody: Moscow. Nauka. 1981. 416 p (in Russian).
5. Medvedik, M.Y., Smirnov, Y.G. and Tsupak, A.A. Scalar problem of plane wave diffraction by a system of nonintersecting screens and inhomogeneous bodies // Comput. Math. and Math. Phys. 2014. Vol. 54. No. 8. P. 1280–1292. DOI 10.1134/S0965542514080089.
6. Smirnov, Y.G., Tsupak, A.A. Method of integral equations in the scalar problem of diffraction on a system consisting of a "soft" and a "hard" screen and an inhomogeneous body // Diff. Equat. 2014. Vol. 50. No. 9. P. 1150–1160. DOI: 10.1134/S0012266114090031.
7. Stephan E.P. Boundary integral equations for screen problems in R^3 // Integral equations and potential theory. 1987. Vol. 10. No. 10. P. 236–257. DOI: 10.1007/BF01199079.
8. Voevodin Vl, Antonov. A., Nikitenko D., Shvets P., Sobolev S., Sidorov I., Stefanov K., Voevodin Vad., Zhumatiy S. Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community. In Journal: Supercomputing Frontiers and Innovations. 2019. Vol. 6. No. 2. P. 4–11. DOI: 10.14529/jsfi190201.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПТИМИЗАЦИИ БИННИНГА КРЕДИТНЫХ ДАННЫХ

Н.Ю.Агафонова[1], С.З. Козлов[2]

[1]Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,
[2]Компания «Неофлекс»

Рассмотрен вариант выполнения биннинга кредитных данных. Приведены результаты моделирования на примере данных банка Home Credit.

Ключевые слова: биннинг, логрегрессия, информационная ценность.

1. Введение

Биннинг является процедурой дискретизации данных, используемой в кредитном скоринге.

Дискретизация или категоризация производится на множестве значений некоторой переменной, результатом являются выделенные группы или бины, различающиеся значениями зависимой бинарной переменной, равной 1 в случае дефолта. Различные алгоритмы биннинга хорошо известны и описаны в литературе[1-3]. В данной работе рассматривается вариант улучшения качества биннинга, описанного в [2], с целью построения наилучшей модели логистической регрессии.

2. Постановка задачи

Пусть данные представлены в виде $(X_1, X_2, \dots, X_n, Y)$, где целевая бинарная переменная Y (target) принимает значение 0, если кредит выплачен (repayment), и значение 1, если кредит не выплачен (default). Переменные $X_1, X_2, \dots, X_n$ представляют собой предикторы, и могут быть как непрерывными, так и категориальными переменными(feature). Требуется по значениям этих переменных построить прогноз значения целевой переменной или оценить вероятность дефолта. При выполнении биннинга множество значений предиктора необходимо разделить на группы (бины) согласно некоторым требованиям, а затем для каждого бина вычислить доли «плохих» и «хороших» элементов (good rate и bad rate). По итогам проведенного биннинга проводится категоризация данных назначением каждой группе категории через значение WoE (Weight of Evidence), после чего выполняется построение уравнения логистической регрессии.

2.1. Характеристики качества биннинга и оценка модели

Согласно [3] качественный биннинг должен удовлетворять трем основным требованиям: 1) пропущенные значения должны быть выделены в отдельный бин, 2) в каждом бине должно содержаться как минимум 5% от всех валидных значений, 3) не должно быть бинов, содержащих только «хорошие» или только «плохие» аккаунты.

Существуют меры для оценки значимости переменной-предиктора в модели[2,3].

Стандартной мерой для биннинга является величина информационной ценности признака-*IV*(Information Value), показывающая, насколько значим данный предиктор в прогнозировании целевой бинарной переменной. Для каждого бина вычисляется вес каждого группировочного признака в разделении «хороших» и «плохих» аккаунтов WoE:

$$WoE_i = \ln\left(\frac{g_i}{g} / \frac{b_i}{b}\right),$$

где g_i– количество «хороших» аккаунтов, b_i – количество «плохих» аккаунтов в бине, $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ и $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$, общее количество соответствующий значений в объеме данных.

Величина *IV* вычисляется по формуле:

$$IV = \sum_{i=1}^{n}\left(WoE_i\left(\frac{g_i}{g} - \frac{b_i}{b}\right)\right).$$

Для количественной оценки *IV* используется эмпирическое правило: если значение *IV* принадлежит интервалу *(0.02,0,1)*, то независимая переменная имеет низкую прогнозную значимость в оценке целевой переменной, если значение лежит в интервале *(0.1,0.3)* предсказательная способность оценивается как умеренная, значения более *0.3* позволяют считать переменную значимой в построении прогноза.

Результатом биннинга может быть разделение исходных данных на заданное количество бинов одинакового размера или заданное количество бинов одинаковой общей численности каждого бина. Известны алгоритмы: оптимальный биннинг, биннинг хи-квадрат, с использованием деревья решений и т.п. В [2] предложена процедура монотонного оптимального биннинга. Она состоит из последовательных шагов монотонности, оптимизации бинов по различию средних значений признака внутри бина, фильтрации по размеру и долям, которые выполняются до достижения свойств качественного биннинга.

В нашей работе была рассмотрена некоторая модификация монотонного оптимального биннинга, и реализован следующий подход к выполнению биннинга.

Переменная предиктор сортируется по возрастанию, пропущенные значения выделяются в отдельный бин.

Подбирается оптимальное по *IV* количество элементов в бине.

Полученные бины проверяются на размер и наличие нулевых значений и объединяются попарно до тех пор, пока не будет достигнут заданный порог численности у каждого бина.

Для каждой пары соседних бинов проверяется гипотеза о равенстве долей при заданном уровне значимости. Соседние бины объединяются попарно до тех пор, пока каждый не будет статистически значимо отличаться от соседнего бина.

По результатам выполненного для каждого предиктора биннинга производится категоризация заменой исходного значения на значение *WoE* каждого бина, и по этим результатам выполняется построение логистической регрессии с выбором наилучшей модели. Качество полученной регрессионной модели оценивалось по показателю *AUC*(Area Under Curve), величина которого у моделей хорошего качества принимает значения в диапазоне *(0,7-1.0)* [1].

3. Результаты

Предлагаемый алгоритм был реализован в пакете R. Результаты сравнивались с результатами модуля smbinning[4]. В работе были использованы два набора данных: набор данных для скоринга из книги[5], содержащий 25906 наблюдений по целевой переменной и 7 признакам, описывающим предшествующую историю просрочек у заемщика, утилизацию (использованную долю лимита) кредитной карты, баллы кредитного бюро; набор данных банка Home Credit для соревнования по анализу данных[6], включающий в себя 307511 записей по целевой переменной и 6 характеристикам, описывающим возраст и срок трудовой деятельности заемщика, отношение количества выплаченных кредитов к открытым в данный момент, баллы кредитных бюро.

На первом наборе данных модель, построенная с использованием модуля smbinning имела показатель AUC = 0,9390, наилучший показатель AUC нашей модели был равен 0,9254. Состав переменных в модели был одинаковым. Во втором случае AUC стандартного модуля была равен 0.7296, наша модель имела лучший AUC=0,7308, при этом модели различались составом переменных.

Литература

1. Сорокин А.С. Построение скоринговых карт с использованием модели логистической регрессии. // Интернет-журнал «Науковедение». 2004. Вып 2. С. 1–29.
2. Mironchuk P., Tchistiakov V. Monotone optimal binning algoritm for credit risk modeling // https://www.researchgate.net/publication/322520135_Monotone_optimal_binning_algorithm_for_credit_risk_modeling., 2017. P. 1-15. DOI: 10.13140/RG.2.2.31885.44003.
3. Thomas L., Crook J., Edelman D., Credit Scoring and Its Applications // SIAM, 2017. DOI: 10.1137/1.9781611974560.
4. https://cran.r-project.org/web/packages/smbinning/smbinning.pdf.

5. Bellini T. IFRS 9 and CECL Credit Risk Modelling and Validation: A Practical Guide with Examples Worked in R and SAS, Academic Press. 2019. P.654.
6. https://www.kaggle.com/c/home-credit-default-risk/.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВОГО РЕЗОНАНСА МОСТА НА ОСНОВЕ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩИХ ПОДХОДОВ[1*]

Н.Д. Агеев, О.И. Поддаева, П.С. Чурин, А.Н. Федосова

Московский государственный строительный университет

Проведена серия расчетно-экспериментальных исследований ветрового резонанса пролетного строения моста. Показано, что при некоторых направлениях ветра численное решение системы уравнений Рейнольдса (RANS) не позволяет оценить критическую скорость потока, при которой наблюдается ветровой резонанс. Установлено, что современные вихреразрешающие подходы вычислительной аэродинамики позволяют получать адекватные оценки соответствующей критической скорости ветра.

Ключевые слова: мост, ветровой резонанс, вихреразрешающие подходы, LES, DES, численные методы, CFD, вычислительная аэродинамика

1. Введение

В связи с интенсивным развитием дорожной сети актуально решение задачи обеспечения устойчивости мостов к ветровому резонансу. Данное явление возникает при близости собственной частоты колебаний пролета моста и частоты вынуждающей аэродинамической силы (например, данному явлению был подвержен мост через Волгу в районе г. Волгограда). Необходима разработка набора методов и подходов, позволяющего смоделировать данное явление.

Вынуждающая аэродинамическая сила является периодической вследствие периодического схода вихрей с конструкции моста. Число Струхаля, характеризующее данный процесс, как правило составляет порядка 0.05 – 0.2, что соответствует достаточно небольшой частоте схода вихрей. При подобных процессах для численного моделирования обычно используется неподвижная модель. Частоту схода вихрей можно оценить путем численного моделирования аэродинамики сечения моста в нестационарной постановке. При этом часто решается система уравнений RANS с замыканием по модели турбулентности SST. В некоторых случаях не удается смоделировать периодический процесс и выделить частоту вынуждающей силы.

2. Численное моделирование с использованием вихреразрешающих подходов

Более физически адекватным является численное моделирование на основе вихреразрешающих подходов (LES или DES). В то время как при решении системы уравнений Рейнольдса (RANS) происходит замыкание по модели турбулентности на всех масштабах, использование подходов типа моделирования крупных вихрей (LES) или моделирования отсоединенных вихрей (DES) предполагает прямое моделирование крупных вихрей, характерный размер которых больше размеров элемента сетки. Вихри малых размеров моделируются с помощью моделей подсеточной вязкости (например, модель Смагоринского). Чем меньше размер элемента сетки, тем меньше погрешность, вызываемая использованием моделей подсеточной вязкости. Таким образом, при проведении численного моделирования с использованием вихреразрешающих подходов целесообразно использовать достаточно подробные расчетные сетки. В работе [1] приводится пример моделирования течения вблизи треугольного цилиндра при поперечном обтекании с использованием вихреразрешающих подходов. На ребро цилиндра приходится 26

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект «Теоретико-экспериментальное конструирование новых композитных материалов для обеспечения безопасности при эксплуатации зданий и сооружений в условиях техногенных и биогенных угроз» №FSWG-2020-0007).

элементов, а по его длине – 81. Скорость потока составляет 17.3 м/с, а число Re=45 500. Шаг по времени – 10^{-5} секунды. Как можно видеть, подобное моделирование требует достаточно больших вычислительных ресурсов. Тем не менее, вихреразрешающие подходы позволяют выделить частоту вынуждающей силы и смоделировать периодический сход вихрей практически всегда. В то время как подходы на основе решения системы уравнений RANS в ряде случаев не позволяют этого сделать. Кроме того, при применении таких подходов, значения силы, действующей на объект, практически всегда испытывают некоторые колебания, что позволяет выделить соответствующую частоту.

На рис. 1. приведены примеры расчетных сеток для тематической модели пролетного строения моста. В поперечном направлении сетки вытянуты на 20 ячеек, характерный размер ячейки в поперечном направлении равен соответствующему размеру ячейки в других направлениях для сетки для моделирования методом LES (200 мм).

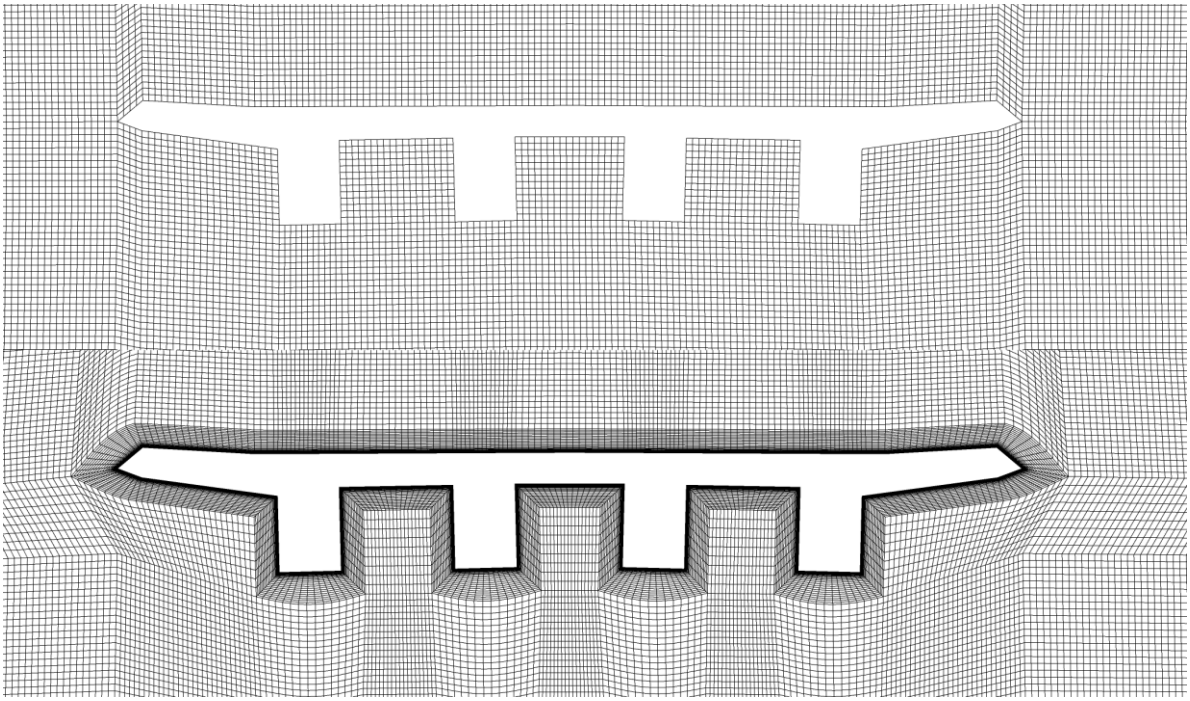


Рис. 1. Расчетные сетки для моделирования методом LES (вверху) и DES (внизу) тематической модели пролетного строения моста.

Показано, что моделирование методом RANS при угле атаки +3 градуса (поток направлен спереди-снизу) не позволяет воспроизвести переменную подъемную силу, а моделирование с использованием вихреразрешающих подходов позволяет (рис. 2).

Среди проблем, требующих разрешения, можно выделить трудности с интерпретацией результатов. В ряде случае не удается выделить единственную определяющую частоту вынуждающей силы и использовать упрощенную процедуру оценки критической скорости ветрового резонанса (см. рис. 3, спектр для DES).

При использовании вихреразрешающих подходов требуются достаточно большие расчетные сетки (4 млн узлов – для метода LES и 5 млн узлов – для метода DES, что достаточно много с учетом простоты тематических моделей). Временной шаг составлял 0.01 с для RANS и 0.004 с для вихреразрешающих подходов.

Реальные конфигурации мостов, как правило, существенно сложнее описанной тематической модели и требуют больших расчетных сеток и времени моделирования. Некоторые результаты удается получить и в двумерной постановке. Проведено численное моделирование обтекания конфигурации пролетного строения в двумерной постановке методом DES при угле атаки -5 градусов (рис. 4). Визуализируется нерегулярная вихревая система. После преобразования Фурье временной зависимости вертикальной компоненты силы удалось выделить основную частоту.

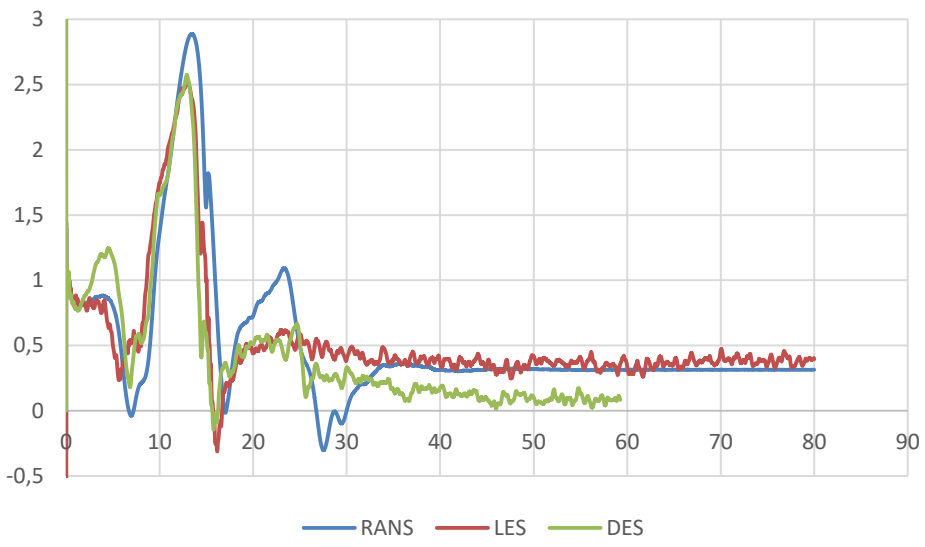


Рис. 2. Временные зависимости коэффициента подъемной силы

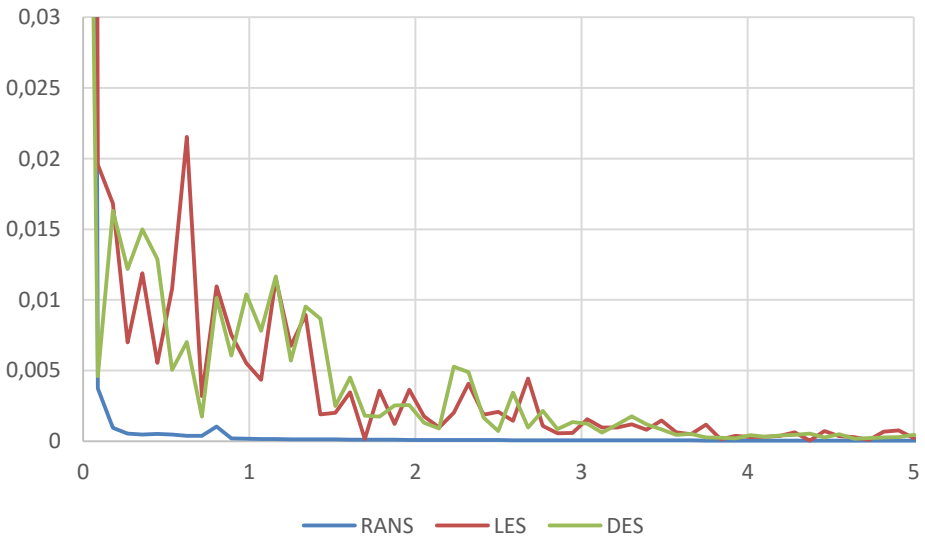


Рис. 3. Амплитудные спектры коэффициента подъемной силы

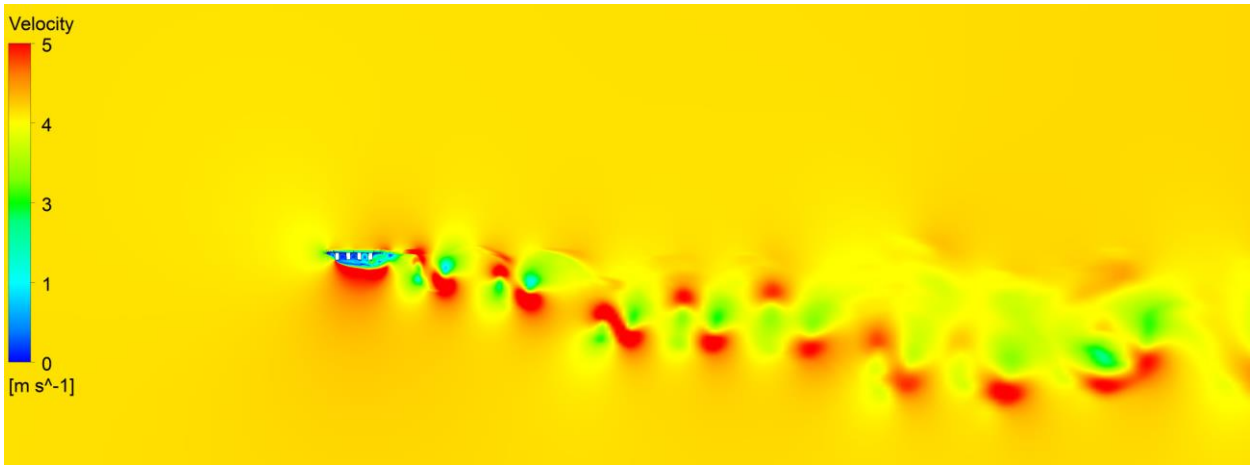


Рис. 4. Пример численного моделирования с использованием DES

Проведено сравнение с экспериментальными данными. Для этого определена частота крупных вихрей, сходящих с пролетного строения, при резонансной скорости потока. Последняя определена из экспериментальных исследований в Большой аэродинамической трубе НИУ МГСУ. Получено, что частота вынуждающей силы близка к частоте собственных колебаний пролетного строения. Таким образом, есть основания полагать, что численная оценка скорости ветрового резонанса, которая может быть получена на основе вихреразрешающих подходов, является обоснованной.

3. Заключение

Вихреразрешающие подходы позволяют получать физически адекватные картины течения (рис. 5). Моделируется переменная аэродинамическая сила, в то время как в случае применения подходов на основе исключительно системы уравнений RANS аэродинамическая сила, действующая на пролетное строение, в ряде случаев получается постоянной по времени. Тем не менее, существуют сложности при интерпретации результатов в случаях, когда не удается выделить основную преобладающую частоту вынуждающей силы.

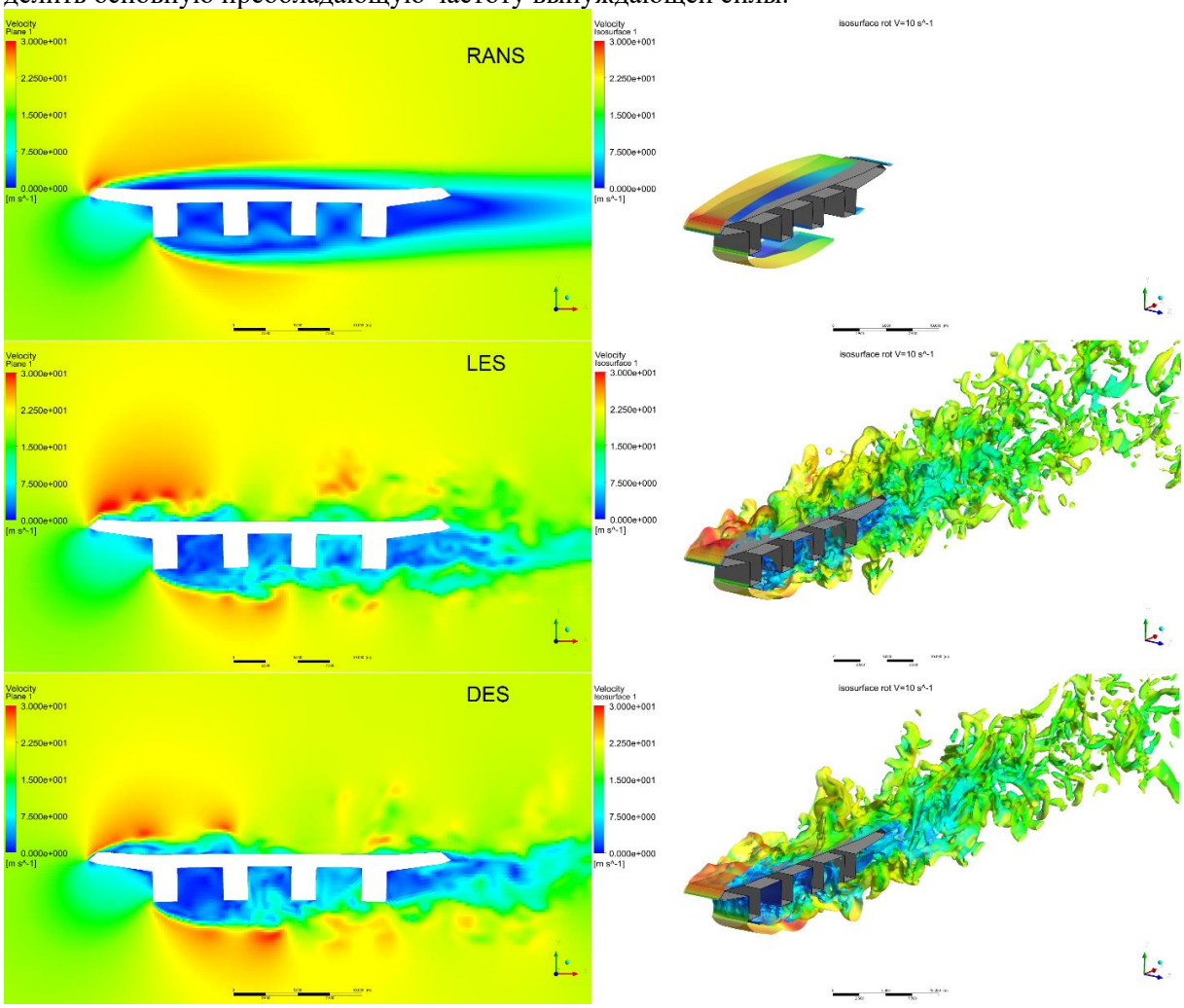


Рис. 5. Результаты моделирования на основе различных подходов при угле атаки +3 градуса

Литература

1. Menter, F. R., Schütze, J., & Gritskevich, M. (2012). Global vs. zonal approaches in hybrid RANS-LES turbulence modelling. In Progress in Hybrid RANS-LES Modelling (pp. 15-28). Springer, Berlin, Heidelberg.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЕРИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ И МОДЕЛЕЙ ПП ЛОГОС НА ПРИМЕРАХ РЕШЕНИЯ РЯДА ЗАДАЧ УДАРА СТЕРЖНЕВЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ ПО ПРОЧНЫМ ПРЕГРАДАМ СО СКОРОСТЯМИ ДО 2100 М/С

И.Н. Арапов, Ю.Н. Бухарев

СарФТИ НИЯУ МИФИ

Ключевые слова: ПП ЛОГОС, верификация, удар, прочность, разрушение, численное моделирование.

Многофункциональный пакет прикладных программ ЛОГОС [1], разрабатываемый в настоящее время в РФЯЦ-ВНИИЭФ, всё более широко используется в инженерной практике, в том числе, и для решения задач воздействия высокоскоростных ударников на прочные конструкции. В последние годы проведено существенное совершенствование вычислительных алгоритмов и моделей материалов ПП ЛОГОС, позволившее значительно расширить его функциональные возможности численного моделирования соударений твёрдых тел в широком диапазоне скоростей до 10 км/с. С учётом сложности процессов динамического деформирования и разрушения материалов в этих расчётах возрастает актуальность систематизированного расширения массивов верификационных данных для различных классов задач удара, решаемых с помощью ПП ЛОГОС

В данной работе с помощью ПП ЛОГОС версии 2020 года проведено решение 16-и вариантов 3-х типов задач соударения стержневых ударников, выполненных из стальных и вольфрамовых сплавов, по прочным стальным преградам в диапазоне скоростей от 180 до 2100 м/с. Стальные ударники имели массу 197 г, длину 74 – 80 мм, плоскую или полусферическую форму носовой части. Начальные скорости V_0 их удара составляли от 180 до 452 м/с направлены по оси ударника и по нормали к стальным преградам толщиной 12 мм. Масса вольфрамовых ударников была 11 г при длине около 50 мм; их скорости V_0 = 1250 – 2100 м/с. В большинстве вариантов удары были также по нормали к преградам, имевшим толщину от 29 до120 мм; в одном варианте ось ударника была отклонена от вектора скорости на угол атаки, равный 32°.

Указанные параметры ударников и преград в расчётах были приняты такими же, как в работах [2–5], содержавших как опытные данные по ряду параметров, так и результаты численного моделирования по программам LS-DYNA, CTH.

Задачи в ПП ЛОГОС моделировались, в основном, в лагранжевой конечно-элементной (ЛКЭ) 3D постановке; некоторые варианты – в ЛКЭ 2D осесимметричной постановке, а также в связанной (ЛКЭ плюс SPH) 3D постановке. В вариантах с ЛКЭ расчётная сетка была сгущённой с минимальными размерами элементов в зоне удара 0,1 – 0,2 мм, в связанных задачах зона частиц SPH располагалась в зоне удара, расстояние между частицами было 0,3 мм. Общее число элементов в 3D вариантах составляло от 48 тыс. до 1,4 млн.

В качестве модели деформирования и разрушения материалов использовалась полная модель Джонсона-Кука, комплексно учитывающая эффекты деформационного и скоростного упрочнения, термического разупрочнения и тип напряжённо-деформированного состояния. Параметры модели, как правило, принимались такими же, как в зарубежных работах [2-4]. При отсутствии данных модели по параметрам разрушения вводились критерии мгновенного (эрозионного) разрушения по уровням максимальных главных напряжений или эффективных деформаций. Использовалось уравнение состояния Ми-Грюнайзена типа Shock.

Решение задач проводилось на компьютерах с несколькими вычислительными ядрами в параллельном режиме. Для вариантов задач с наибольшим количеством элементов использовался компактный суперкомпьютер СарФТИ типа АПК-1М, имеющий 24 вычислительных ядра. При этом время счёта задачи (до максимального времени процесса около 100 мкс) составило 7 часов.

Полученные результаты решения сравнивались с экспериментальными и расчётными данными работ [2-5] по следующим основным параметрам: величинам запреградных скоростей

стальных ударников при пробитии ими тонких мишеней; размерам кратеров (полостей), образующихся при взаимодействии с толстыми преградами; зависимостям глубины проникания ударника и уменьшения его длины от времени с полученными в работе [4] данными рентгеновской съёмки. В большинстве вариантов получены удовлетворительные результаты – отклонения рассчитанных параметров по ЛОГОС не превышали 15%.

Таким образом, результаты верификации показали, что реализованные в последней версии ПП ЛОГОС вычислительные алгоритмы можно успешно использовать для решения рассмотренного класса задач воздействия стержневых металлических ударников на прочные металлические элементы конструкций.

Вместе с этим, сформулированы предложения по дальнейшему совершенствованию алгоритмов и моделей ПП ЛОГОС и повышения уровня его функциональных возможностей до уровней распространенных коммерческих пакетов программ. В частности, отмечена целесообразность дополнительных исследований по уменьшению погрешностей расчётов при скоростях удара, близких к баллистическому пределу.

Авторы выражают благодарность разработчиками ПП ЛОГОС Дьянову Д.Ю., Казанцеву А.В. за плодотворное обсуждение в ходе работы ряда актуальных вопросов.

Литература

1. Дьянов Д.Ю., Спиридонов И.Ф., Циберев К.В., Казанцев А.В. и др. Пакет программ «ЛОГОС». Модуль решения динамических задач прочности. ВАНТ, РФЯЦ-ВНИИЭФ, сер. Математическое моделирование физических процессов. Саров. 2018. Вып. 1. С. 3-14.
2. Borvik T., Langseth M., Hopperstad O.S., Malo K.A. Perforation of 12 mm thick steel plates by 20 mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses: Part I: Experimental study // International Journal of Impact Engineering. 2002. Vol. 27, No. 1. P. 19-35. DOI: 10.1016/S0734-743X(01)00034-3.
3. Borvik T., Hopperstad O.S.,Berstad T., Langseth M. Perforation of 12 mm thick steel plates by 20 mm diameter projectiles with flat, hemispherical and conical noses: Part II: Numerical simulation // International Journal of Impact Engineering. 2002. Vol. 27, No. 1. P. 37-64. DOI: 10.1016/S0734-743X(01)00035-5.
4. Anderson C.E., Hohler V., Walker J.D., Stilp A.J. Time-resolved penetration of long rods into steel targets // International Journal of Impact Engineering. 1995. Vol. 16, No. 1. P. 1-18. DOI: 10.1016/0734-743X(94)E0030-Y.
5. Бухарев Ю.Н., Жуков В.И. Модель проникания стержневого ударника с углом атаки в металлическую преграду. ФГВ. 1995. Т. 31, №3. С. 104-109.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ[1*]

Д.В. Баландин[1], Р.С. Бирюков[1,2], М.М. Коган[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматриваются задачи многокритериальной минимаксной оптимизации с критериями вида обобщенных H_∞ норм для линейных непрерывных систем. Показано, что минимизация максимума линейной свертки соответствующих критериев приводит к субоптимальным решениям с оценкой степени субоптимальности по отношению к оптимальным по Парето решениям. Этот подход применяется к синтезу субоптимальных по Парето управлений в многокритериальных задачах обобщенного H_∞ управления для линейных непрерывных нестационарных на конечном горизонте систем. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: многокритериальное управление, множество Парето, обобщенная H_∞ норма, линейные матричные неравенства.

1. Введение

Реальные задачи управления всегда многокритериальны. Нахождение множества Парето, а следовательно, и оптимальных по Парето решений, т.е. неулучшаемых одновременно для всех критериев, представляет собою сложную задачу, которая сводится к однокритериальной оптимизации некоторой свертки выбранных критериев. Можно привести лишь несколько многокритериальных задач управления, в которых удалось получить оптимальные по Парето решения: линейно-квадратичные гауссовские управления [1] и H_2 оптимальные управления [2] на основе Q-параметризации стабилизирующих регуляторов линейных стационарных систем на бесконечном интервале времени, а также обобщенные H_2 оптимальные управления [3-6] для линейных нестационарных систем на конечном горизонте и стационарных систем на бесконечном горизонте.

В [7-9] для задач многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞ нормы в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1-\sqrt{N}/N$, где N – число критериев. В задачах управления с критериями, включающими H_∞ норму, удавалось синтезировать многокритериальные управления, как правило, только при дополнительных ограничениях типа равенства матриц функций Ляпунова [10-15] или типа равенства вспомогательных матричных переменных [16, 17]. При этом до сих пор остается без ответа вопрос о том, в какой мере значения отдельных критериев при многокритериальных законах управления, синтезируемых с учетом дополнительных ограничений или на основе аппроксимаций, превышают соответствующие значения критериев при оптимальных по Парето законах управления.

В настоящей работе показано, как в многокритериальных минимаксных задачах можно оценивать границы области критериального пространства, в которой расположены точки, принадлежащие множеству Парето. При этом определяются субоптимальные по Парето решения многокритериальной задачи, которым соответствует одна из получаемых границ, и оценивается степень их субоптимальности. Приводится иллюстративный пример, в котором находятся субоптимальные решения и строятся границы области, содержащей точки множества Парето.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00289), Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

2. Двусторонние границы области, содержащей множество Парето

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений в многокритериальной задаче минимизации с критериями $J_i(\Theta)$, $i = 1, \dots, N$, каждый из которых представляет собой максимум некоторой неотрицательной функции $F_i(\Theta, \omega) \geq 0$ по отношению к некоторым переменным ω из множества Ω, т.е.

$$J_i(\Theta) = \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega), \quad i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Напомним, что решение Θ_P называется оптимальным по Парето, если не существует такого решения Θ, что выполняются неравенства $J_i(\Theta) \leq J_i(\Theta_P)$, $i = 1, \dots, N$, в которых, по меньшей мере, одно является строгим. Множество точек в N-мерном критериальном пространстве, соответствующее всем таким решениям, называется множеством Парето

$$P = \{J(\Theta_P) = (J_1(\Theta_P), \dots, J_N(\Theta_P))\}.$$

Самым распространенным методом нахождения оптимальных по Парето решений многокритериальной задачи является метод скаляризации, т.е. выбора единого критерия в виде, например, линейной свертки этих критериев

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta) \quad \forall\, \alpha \in S = \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \colon \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\right\}.$$

Назовем линейную свертку $J_\alpha(\Theta)$ оптимальной целевой функцией. Как известно, параметры Θ_α, для которых выполняется

$$\min_{\Theta} J_\alpha(\Theta) = J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

являются оптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Обозначим соответствующее им множество точек в критериальном пространстве через

$$P_L = \{J(\Theta_\alpha) = (J_1(\Theta_\alpha), \dots, J_N(\Theta_\alpha)) \quad \forall\, \alpha \in S\}.$$

В общем случае ими может не исчерпываться все множество Парето, т.е. $P_L \subseteq P$.

Непосредственное нахождение параметров Θ_α для многокритериальных минимаксных задач представляется затруднительным, так как оптимальная целевая функция для таких задач оказывается линейной комбинацией максимумов разных функций. В связи с этим оценим ее снизу, заменяя сумму максимумов на максимум суммы

$$J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega) \geq \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_i(\Theta, \omega) = \sup_{\omega \in \Omega} F_\alpha(\Theta, \omega) = \hat{J}_\alpha(\Theta). \tag{2}$$

Назовем $\hat{J}_\alpha(\Theta) = \sup_{\omega \in \Omega} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i F_i(\Theta, \omega)$ субоптимальной целевой функцией, а параметры $\widehat{\Theta}_\alpha$, оптимальные по отношению к $\hat{J}_\alpha(\Theta)$, при которых

$$\min_{\Theta} \hat{J}_\alpha(\Theta) = \hat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha), \tag{3}$$

назовем субоптимальными по Парето решениями многокритериальной задачи. Покажем, что для минимаксных задач можно указать границы области критериального пространства, в которой находится подмножество P_L, и, тем самым, оценить степень субоптимальности решений $\widehat{\Theta}_\alpha$.

Равенство

$$J_\alpha(\Theta_\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha)$$

означает, что в критериальном пространстве точка $J(\Theta_\alpha)$ принадлежит гиперплоскости Π_α с вектором нормали $n_\alpha^{\mathrm{T}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu(\alpha)$ (см. рис. 1а). Это плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha = |n_\alpha|^{-1}\mu(\alpha)$. Так как $J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) \geq J_i(\Theta_\alpha)$, $i = 1, \dots, N$, то

$$\mu_+(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) \geq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha). \tag{4}$$

Это значит, что субоптимальным по Парето параметрам $\widehat{\Theta}_\alpha$ соответствует точка $J(\widehat{\Theta}_\alpha)$, принадлежащая гиперплоскости Π_α^+, уравнение которой $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu_+(\alpha)$. Эта плоскость отстоит от начала координат на расстояние $d_\alpha^+ = |n_\alpha|^{-1}\mu_+(\alpha) \geq d_\alpha$.

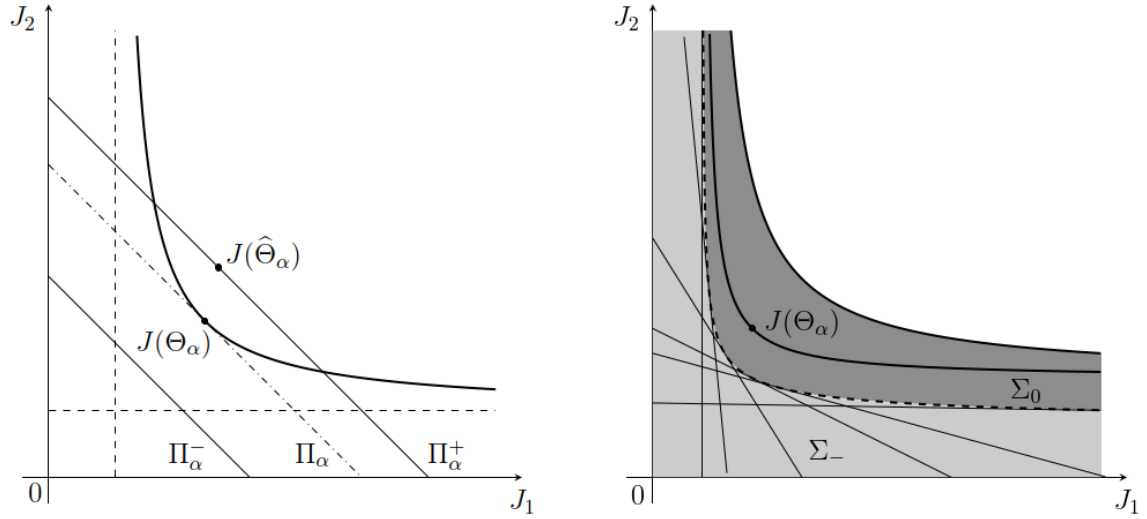
Из справедливости неравенств

$$\mu(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \geq \hat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \geq \hat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_-(\alpha) \tag{5}$$

следует, что точка $J(\Theta_\alpha)$ удалена от начала координат не меньше, чем на $d_\alpha^- = |n_\alpha|^{-1}\mu_-(\alpha)$ – расстояние от плоскости Π_α^- с уравнением $n_\alpha^{\mathrm{T}} J = \mu_-(\alpha)$ до начала координат, т.е. $d_\alpha \geq d_\alpha^-$. Таким образом, точка $J(\Theta_\alpha) \in \Pi_\alpha$ находится между двумя параллельными гиперплоскостями Π_α^- и Π_α^+.

Определим в пространстве критериев для любого набора $\alpha \in S$ следующие множества:

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha^- &= \left\{J = (J_1, \dots, J_N) : \textstyle\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i < \mu_-(\alpha), \quad J_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N\right\}, \\ \Sigma_\alpha^+ &= \left\{J = (J_1, \dots, J_N) : \textstyle\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i \leq \mu_+(\alpha), \quad J_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$



(а) (б)

Рис. 1. Построение области Σ_0, содержащей точки множества Парето

Определим также объединения каждого из этих семейств и разность этих объединений

$$\Sigma_- = \bigcup_{\alpha \in S} \Sigma_\alpha^-, \quad \Sigma_+ = \bigcup_{\alpha \in S} \Sigma_\alpha^+, \quad \Sigma_0 = \Sigma_+ \backslash \Sigma_-. \tag{7}$$

Докажем, что точки $J(\Theta_\alpha) \in P_L \subseteq P$ принадлежат множеству Σ_0 (см. рис. 1б).

Действительно, так как

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha) \leq \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\widehat{\Theta}_\alpha) = \mu_+(\alpha),$$

то $J(\Theta_\alpha) \in \Sigma_+$. Покажем, что для произвольного фиксированного набора $\hat{\alpha} \in S$ точка $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_-$, т.е. $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_\alpha^-$ для любого $\alpha \in S$. Из (5) следует, что $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \notin \Sigma_{\hat{\alpha}}^-$. Предположим, что для некоторого $\alpha \neq \hat{\alpha}$ выполнено $J(\Theta_{\hat{\alpha}}) \in \Sigma_\alpha^-$, т.е. $\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\hat{\alpha}}) < \mu_-(\alpha)$. Так как

$$\mu_-(\alpha) = \hat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha) \leq \hat{J}_\alpha(\Theta_\alpha) \leq J_\alpha(\Theta_\alpha) = \mu(\alpha),$$

то

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_{\hat{\alpha}}) < \sum_{i=1}^N \alpha_i J_i(\Theta_\alpha),$$

т.е. $J_\alpha(\Theta_{\hat{\alpha}}) < J_\alpha(\Theta_\alpha)$. Это противоречит тому, что Θ_α обеспечивает минимум линейной свертки $J_\alpha(\Theta)$. Таким образом, $\Theta_\alpha \in \Sigma_0$ и можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. Множество точек $P_L \subseteq P$ критериального пространства, которые соответствуют оптимальным по Парето параметрам Θ_α, минимизирующим оптимальную целевую функцию $J_\alpha(\Theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sup_{\omega \in \Omega} F_i(\Theta, \omega)$, принадлежит множеству Σ_0, которое определено в (4), (5), (6), (7).

В двукритериальных задачах нижней и верхней границами области, которой принадлежит множество P_L в пространстве критериев (J_1, J_2), являются «огибающие» семейства прямых

$$\alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \hat{J}_\alpha(\widehat{\Theta}_\alpha), \quad \alpha J_1 + (1-\alpha) J_2 = \alpha J_1(\widehat{\Theta}_\alpha) + (1-\alpha) J_2(\widehat{\Theta}_\alpha) \quad \forall\, \alpha \in [0,1].$$

Заметим, что значениям $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ отвечают прямые $J_1 = \min_\Theta J_1(\Theta)$ и $J_2 = \min_\Theta J_2(\Theta)$ соответственно.

Для количественной оценки близости значений функционалов при найденных субоптимальных решениях $\widehat{\Theta}_\alpha$ и неизвестных оптимальных решениях Θ_α введем показатель субоптимальности

$$\eta = \max_{\alpha \in S} \frac{d_\alpha^+ - d_\alpha^-}{d_\alpha^+} = \max_{\alpha \in S} \frac{\mu_+(\alpha) - \mu_-(\alpha)}{\mu_+(\alpha)},$$

определяемый по относительной величине максимального «расстояния» между границами множества Σ_0. Чем ближе η к нулю, тем точнее оценка множества Парето и тем ближе друг к другу значения соответствующие критериев при субоптимальных и оптимальных решениях.

3. Обобщенная H_∞ норма

Пусть линейная нестационарная система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \quad t \in [t_0, t_f], \end{aligned} \tag{8}$$

где $x \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние, $v \in \mathrm{R}^{n_v}$ – возмущение и $z \in \mathrm{R}^{n_z}$ – целевой выход. Обобщенной H_∞ нормой системы (8) на конечном интервале $[t_0, t_f]$ от входа v к выходу z при неопределенном начальном состоянии для заданных весовых матриц начального состояния $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ и терминального состояния $S^{\mathrm{T}} = S \geq 0$ называется выражение

$$\gamma_{\infty,0} = \sup_{x_0, v} \left(\frac{\|z\|^2_{[t_0,t_f]} + x^{\mathrm{T}}(t_f) S x(t_f)}{x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[t_0,t_f]}} \right)^{1/2}, \tag{9}$$

где супремум берется по всем начальным состояниям $x(t_0) = x_0$ и всем $v \in L_2$, одновременно не обращающимся в ноль.

В следующей теореме показано, что обобщенная H_∞ норма на конечном горизонте может быть вычислена как решение задачи оптимизации линейной функции при ограничениях, заданных дифференциальными линейными матричными неравенствами.

Теорема 2. Пусть выполняется неравенство

$$\gamma^2 I - D^{\mathrm{T}}(t) D(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{10}$$

Обобщенная H_∞ норма системы (8) удовлетворяет неравенству $\gamma_{\infty,0} < \gamma$ тогда и только тогда, когда дифференциальные линейные матричные неравенства

$$\begin{pmatrix} -\dot{Y}(t) + Y(t)A^{\mathrm{T}}(t) + A(t)Y(t) & * & * \\ B^{\mathrm{T}}(t) & -I & * \\ C(t)Y(t) & D(t) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0, \quad t \in [t_0, t_f], \tag{11}$$

а также равенство $Y(t_0) = R$ и линейное матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} Y(t_f) & * \\ S^{1/2} Y(t_f) & \gamma^2 I \end{pmatrix} > 0 \tag{12}$$

разрешимы относительно $Y(t) > 0$ и $\gamma^2 > 0$.

4. Гашение параметрических колебаний линейного осциллятора

Рассмотрим уравнение Матьё

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\delta^2(1 + \varepsilon \sin t)x_1 + u + v \end{aligned} \tag{13}$$

с параметрами $\delta = 0.5$ и $\varepsilon = 0.3$, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора. Зададим на интервале времени длительностью $T = 10$ равномерную сетку с шагом $h = 0.05$ и дискретизируем систему (13), заменяя производные конечно-разностными отношениями. Выберем в качестве первого критерия обобщенную H_∞ норму этой системы с целевым выходом $z = x_1 + u$, т.е. с матрицами $C_1 = (1 \;\; 0)$, $D_1 = 1$, и весовой матрицей терминального состояния $S_1 = 0$. В качестве второго критерия возьмём максимальное уклонение вектора $(1/2)col\,(x_1, x_2)$ в конечный момент времени, т.е. $C_2 = (0 \;\; 0)$, $D_2 = 0$ и $S_2 = 0.5I$. Таким образом, функционалы имеют вид:

$$J_1(u) = \sup_{x_0,v} \frac{\|z\|^2_{[0,T]}}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,T]}}, \qquad J_2(u) = \sup_{x_0,v} \frac{x_f^T S_2 x_f}{x_0^T R^{-1} x_0 + \|v\|^2_{[0,T]}}. \tag{14}$$

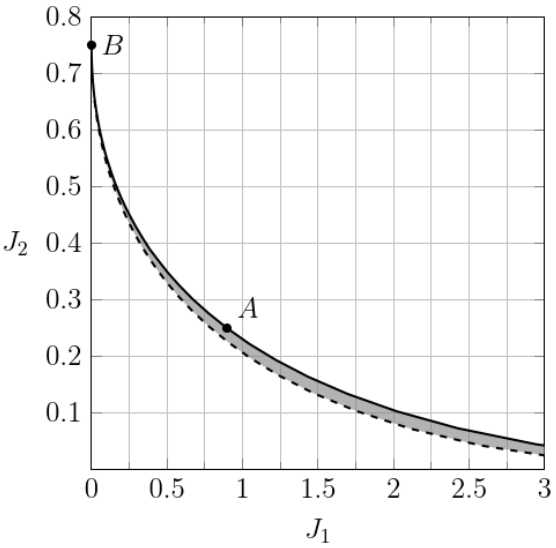


Рис. 2. Оценка множества Парето в задаче гашения параметрических колебаний

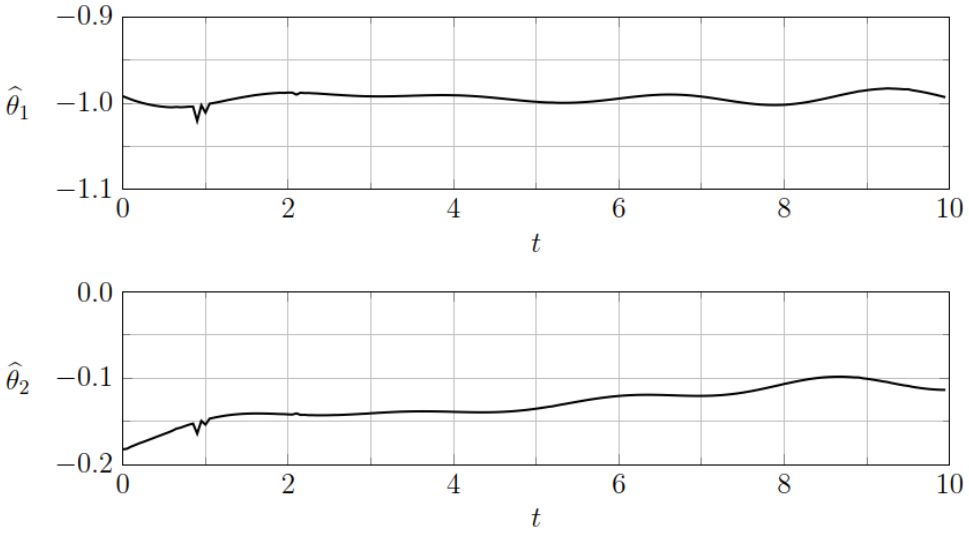


Рис. 3. Графики зависимостей от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи

В дальнейших численных экспериментах $R = 0.5I$. Применим подход, изложенный в разделе 2, для построения границ области Σ_0, содержащей множество Парето. На рисунке 2 серым цветом изображено множество Σ_0. Видно, что оно получилось достаточно «узким» и значение показателя субоптимальности $\eta = 0.125$ подтверждает этот вывод. Отметим, что точки верхней границы множества Σ_0 соответствуют субоптимальным по Парето решениям $\widehat{\Theta}_\alpha$, которые находятся с использованием описанного в разделе 4 подхода. В частности, при $\alpha = 0.18$ были найдены коэффициенты обратной связи $\widehat{\Theta}_\alpha$ и для них вычислены значения функционалов. Точка, отвечающая этим значениям, на рисунке 2 обозначена через A, её координаты – $(0.898, 0.249)$. Для сравнения, значения функционалов в случае, когда управление в системе (13) отсутствует, равны $J_1 = 185.259$ и $J_2 = 0.966$. Таким образом, использование управления позволяет уменьшить обобщенную H_∞ норму системы практически в 200 раз! Также представляет интерес сравнить полученные результаты с простейшим регулятором вида $u = -x_1$. Нетрудно видеть, что в этом случае $J_1 = 0$, поскольку $z = x_1 + u = 0$. Значение J_2 есть 0.750, что примерно в 3 раза больше, чем значение J_2 для точки A. На рисунке 2 точка с координатами $(0, 0.750)$ обозначена через B.

На рисунке 3 приведены графики зависимости от времени субоптимальных по Парето коэффициентов обратной связи $\widehat{\Theta}_{\alpha}^{\mathrm{T}}(t) = (\hat{\theta}_1(t)\ \hat{\theta}_2(t))$, отвечающих точке A. Заметим, что практически все время функционирования системы коэффициенты обратной связи сохраняют «постоянные» значения. Значения функционалов при стационарном регуляторе, отвечающим этим «постоянным» значениям $\theta_1(t) \equiv -0.13$ и $\theta_2(t) \equiv -1.0$, равны $J_1 = 0.900$ и $J_2 = 0.249$, то есть отличия в значениях критериев при использовании такого стационарного регулятора вместо нестационарного субоптимального регулятора $\widehat{\Theta}_{\alpha}(t)$ незначительны.

Литература

1. Mäkilä P.M. On Muptiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 12. P. 1311–1313.
2. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Muptiple Objective Optimal Control of Linear Systems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 14–24.
3. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными уклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // АиТ. 2019. № 10. С. 37–61.
4. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Минимаксное управление уклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // АиТ. 2019. № 12. С. 3–24.
5. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-Objective Generalized H_2 Control // Automatica. 2019. V. 99. No. 1. P. 317–322.
6. Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Finite-Horizon Multi-Objective Generalized H_2 Control with Transients // Automatica. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. О множестве Парето в задачах управления и фильтрации при детерминированных и стохастических возмущениях// АиТ. 2017. № 1. С. 35–58.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Субоптимальные по Парето регуляторы против коалиций возмущений// АиТ. 2017. № 2. С. 3–26.
9. Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto suboptimal controllers in multi-objective disturbance attenuation problems // Automatica. 2017. V. 84. No. 10. P. 56–61.
10. Bernstein D.S., Haddad W.M. LQG Control with an H_∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach// IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 3. P. 293–305.
11. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach// IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 824–831.
12. Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J. Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis// IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1564–1574.
13. Doyle J., Zhou K., Glover K., Bodenheimer B. Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control// IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1575–1587.
14. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. Autom. Control. 1997. V. 42. No. 7. P. 896–911.
15. Chen X., Zhou K. Multiobjective H_2/H_∞ Control Design// SIAM J. Control Optim. 2001. V. 40. No. 2. P. 628–660.
16. Oliveira M. C., Bernussou J., Geromel J.C. A New Discrete-time Robust Stability Condition // System Control Letters. 1999. V. 37. P. 261–265.
17. Ebihara Y., Hagiwara T. New Dilated LMI Characterisations for Continuous-time Control Multi-objective Controller Synthesis // Automatica. 2004. V. 40. P. 2003–2009.

АТТРАКТОРЫ-ПРИЗРАКИ В МИГАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА И МОДЕЛИ НЕЙРОНА[1*]

Н.В. Барабаш[1,2], Т.А. Леванова[1], В.Н. Белых[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Лобачевского
[2]Волжский государственный университет водного транспорта

Исследуются аттракторы-призраки в двух мигающих системах. Первая мигающая система образована случайным переключением между регулярными режимами системы Лоренца. Показано, что нестационарный аттрактор этой мигающей системы близок к странному аттрактору Лоренца. Второй мигающая система - нейронная модель, в которой случайное переключение между тоническими режимами приводит к пачечной активности. Дается определение аттрактора-призрака. С помощью численных приближений инвариантных мер показано, что аттракторы-призраки сохраняются в некотором конечном интервале периода переключения.

Ключевые слова: мигающая система, переключения, аттрактор, модель нейрона, случайный процесс.

1. Введение

Динамика многих реальных систем определяется случайными переключениями. Интернет и электрические сети могут рассматриваться как ансамбли связанных динамических систем, топология связи которых меняется во времени согласно стохастическому правилу [1]. Случайные и краткосрочные взаимодействия между нейронами и техническими устройствами также могут быть рассмотрены как переключение связей [2-4]. Случайные переключения в электрических цепях широко используются в импульсных преобразователях мощности для получения выходных сигналов с заданными свойствами [5]. Такое случайное и независимое переключение было названо миганием, а динамические системы с таким переключением параметров - мигающими системами [6].

Одним из центральных вопросов исследования мигающих систем является вопрос о существовании и свойствах устойчивых динамических режимов, представленных в виде нестационарных аттракторов [7]. Общая строгая теория нестационарной и асимптотической динамики мигающих систем при быстрых переключениях была развита в работах [8,9]. Эта теория прояснила отношения между мигающей системой и ее усредненным по времени аналогом. В частности, эта теория ввела понятие аттрактора-призрака $\mathcal{A}$, который существует в усредненной системе, но не инвариантен относительно мигающей системы. При быстрых переключениях траектория мигающей системы может достигать малой окрестности аттрактора $\mathcal{A}$ и оставаться там бо́льшую часть времени.

В случае небыстрых переключений применение теории усреднения некорректно, однако близость нестационарного аттрактора мигающей системы и аттрактора-призрака можно оценить численно. Для этого в данной работе численно оцениваются вероятностные меры этих аттракторов и вычисляется евклидово расстояние между полученными оценками. Показано, что это расстояние является монотонно возрастающей функцией периода переключения и, следовательно, может использоваться как мера близости поведения усредненной и мигающей систем.

2. Аттракторы-призраки в мигающих системах

Рассмотрим мигающую систему [4, 6, 8, 9]

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (разделы 1 и 3 выполнены в рамках проекта № 19-12-00367, разделы 2 и 4 выполнены в рамках проекта № 19-72-10128). Работа также поддержана Министерством науки и высшего образования (проект № 0729-2020-0036).

$$\dot{x} = F[x, s(t)], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $s(t)$ – случайная дискретная скалярная величина, принимающая значение $s_i, i = 1,2,\dots,M$, с вероятностью p_i на каждом k-ом интервале времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, где $\tau = \text{const}$ – период переключения. Траектории системы (1) склеены в момент времени $t = k\tau$ из траекторий M автономных систем

$$\dot{x} = F(x, s_i),\ \ i = 1,2,\dots,M, \tag{2}$$

заданных в каждый момент времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$ с вероятностью p_i. Будем предполагать, что каждая i-ая n-мерная динамическая система (2), рассматриваемая на всем интервале времени, имеет аттрактор A_i.

2.1. Быстрые переключения

При достаточно быстрых переключениях ($\tau \ll 1$) правая часть системы (1) может быть заменена её ожиданием $E[\cdot]$ [6, 8]

$$\dot{x} = E\big[F\big(x, s(t)\big)\big] = \sum_{i=1}^{M} p_i F_i(x, s_i), \tag{3}$$

откуда следует, что аттрактор $\mathcal{A}$ усреднённой системы (3) служит аппроксимацией динамики мигающей системы (1) при достаточно быстром мигании.

Задача о взаимоотношении между аттракторами $A_i, i = 1,2,\dots,M$ и аттрактором $\mathcal{A}$ изучалась в работе [9]. Здесь мы рассматриваем частный случай существования аттрактора-призрака, определенного следующим образом.

Определение. *Если аттрактор $\mathcal{A}$ усредненной системы (3) не является ни одним из аттракторов $A_i, i = 1,2,\dots,M$ образующих систем (2), тогда аттрактор $\mathcal{A}$ есть аттрактор-призрак мигающей системы (1).*

Отметим, что понятие аттрактора-призрака случайно мигающих систем отличается от широко распространенного понятия аттрактора-призрака нейронных моделей, который связан с медленной динамикой в малой окрестности бифуркации.

Согласно теории усреднения при бесконечно малом периоде переключения τ нестационарный аттрактор A_τ мигающей системы (1) близок к аттрактору-призраку $\mathcal{A}$.

2.2. Сравнение аттракторов при небыстром переключении

В случае немалых значений периода переключения τ близость аттракторов A_τ и $\mathcal{A}$ исследуется численно. Для этого мы описываем свойства аттракторов с помощью их инвариантных мер $\rho: x \to [0, \infty)$ [10-13], играющих роль плотности вероятности в фазовом пространстве. Предположим, что существуют инвариантные меры $\mu(A_\tau)$ и $\rho(\mathcal{A})$, сосредоточенные на A_τ и $\mathcal{A}$, соответственно. Следуя работам [14, 15], мы строим их дискретные аппроксимации μ_τ и ρ_0, соответственно, следующим образом.

Пусть область $D: \{x_i^- < x_i < x_i^+, i = 1,\dots,n\}$ есть притягивающая область, содержащая оба аттрактора A_τ и $\mathcal{A}$. Здесь x_i^- и x_i^+ - левая и правая границы притягивающей области по i-ой координате. Разделим область D на $N = \prod_{i=1}^{n} N_i$ небольших смежных подобластей $B_j, j = 1,\dots,N$. Здесь N_i – количество подобластей вдоль каждой координатной оси фазового пространства. Для выбранного значения периода переключения τ, пропуская достаточный переходный процесс, мы численно получаем траекторию вдоль аттрактора A_τ как последовательность из T фазовых точек, где T достаточно велико. Далее, мы считаем число точек h_j^τ из T, которые попали в подобласть B_j. Полученное распределение $\mu_\tau = \{\frac{h_1^\tau}{T}, \frac{h_2^\tau}{T}, \dots, \frac{h_N^\tau}{T}\}$ служит дискретной аппроксимацией инвариантной меры $\mu(A_\tau)$. Аналогично, рассчитывая траекторию вдоль аттрактора $\mathcal{A}$, получаем дискретную аппроксимацию $\rho_0 = \{\frac{h_1^a}{T}, \frac{h_2^a}{T}, \dots, \frac{h_N^a}{T}\}$ инвариантной меры $\rho(\mathcal{A})$, где h_j^a – количество попаданий траектории в подобласть B_j. Наконец, мы рассчитываем Евклидово расстояние

$$\delta(\tau) = \frac{1}{N}\|\mu_\tau - \rho_0\|, \tag{4}$$

которое служит аппроксимацией расстояния между инвариантными мерами $\mu(A_\tau)$ и $\rho(\mathcal{A})$. В этой работе расстояние (4) рассматривается как мера подобия аттракторов A_τ и $\mathcal{A}$, зависящая от периода переключения τ.

3. Аттрактор-призрак в мигающей модели Лоренца

Рассмотрим мигающую систему Лоренца $L(r,\sigma)$ [16]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(t)(y-x), \\ \dot{y} &= (r(t)-z)x - y, \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z, \end{aligned} \tag{5}$$

с зависящими от времени параметрами $r(t) = (r_1 - r_2)s(t) + r_2$, $\sigma(t) = (\sigma_1 - \sigma_2)s(t) + \sigma_2$, где $s(t)$ - случайный параметр, принимающий значения

$$s(t) = \begin{cases} 1, \text{с вероятностью } p_1, \\ 0, \text{с вероятностью } p_2 = 1 - p_1, \end{cases} \tag{6}$$

на каждом интервале времени $t \in [k\tau, (k+1)), k \in \mathbb{Z}^+$. Таким образом, параметр $s(t)$ переключает поток неавтономной системы (5) между двумя автономными подсистемами $L_1(r_1, \sigma_1)$ [при $s(t) = 1$] и $L_1(r_2, \sigma_2)$ [при $s(t) = 0$].

Выберем параметры $r_1 = 15$, $\sigma_1 = 23$, $r_2 = 36$, $\sigma_2 = 2$ из области, где притягивающее множество систем $L_{1,2}$ образовано сосуществующими устойчивыми фокусами, а нетривиальное инвариантное предельное множество отсутствует.

Утверждение 1. *Пусть системы L_1 и L_2 имеют вероятности включения $p_1 = \frac{8}{21}$ и $p_2 = \frac{13}{21}$, соответственно. Тогда странный аттрактор Лоренца $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком мигающей системы (4), а её нестационарный аттрактор при достаточно быстрых переключениях лежит в малой окрестности $\mathcal{A}$.*

Согласно уравнению (3) при достаточно быстром мигании $\tau \ll 1$ усредненная автономная система $L_a = L(r_a, \sigma_a)$ совпадает с оригинальной моделью Лоренца поскольку $r_a = p_1 r_1 + p_2 r_2$=28, $\sigma_a = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 = 10$.

Рассмотрим изменения аттрактора системы (5) при увеличении периода мигания τ с помощью Евклидова расстояния $\delta(\tau)$. Расчет расстояния произведен в области D: $\{x \in [-25, 25], y \in [-35, 35], z \in [-1, 60]\}$, разбитой на $N = 10^6$ смежных подобластей. Траектория аттрактора состоит из $T = 10^8$ точек. Шаг интегрирования равен $\Delta t = 10^{-4}$. Расстояние $\delta(\tau)$ посчитано для периода переключения из интервала $\tau \in [0.0001, 0.01]$ с шагом 0.0001 и представлено на Рис. 1. Из этого рисунка видно, что расстояние $\delta(\tau)$ является монотонно возрастающей функцией и довольно мало. Согласно нашему критерию это означает, при увеличении периода переключения аттрактор системы (5) изменяется незначительно. Аттракторы системы (5) для трех значений τ изображены на Рис. 2. Отметим, что форма аттракторов меняется незначительно, что свидетельствует о том, что аттракторы мигающей и усредненной систем остаются достаточно близкими друг к другу.

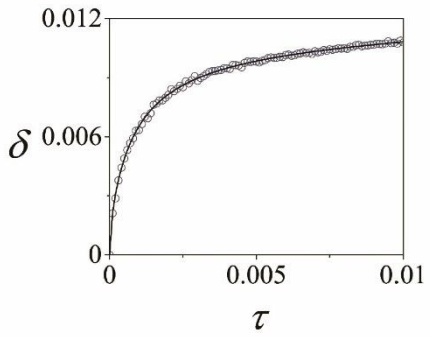


Рис. 1. Расстояние δ(τ) для мигающей системы Лоренца (5). Кругами отмечены результаты счета. Их аппроксимация изображена сплошной линией

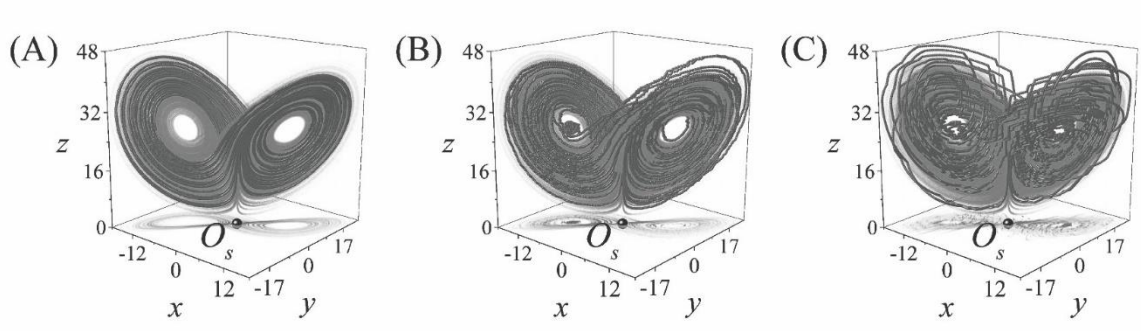


Рис. 2. Аттракторы мигающей системы (5) A_τ (темно-серые траектории) при разных значениях τ. Аттрактор-призрак $\mathcal{A}$ изображен серым для все случаев (A)-(C). При малых значениях τ аттракторы A_τ и $\mathcal{A}$ близки. Разница между ними увеличивается с ростом τ. (A) $\tau = 0.0001$, (B) $\tau = 0.001$, (C) $\tau = 0.01$

4. Мигающая система Хиндмарша-Роуза

Следующая мигающая система получена из модели нейрона Хиндмарша-Роуза [16-18]

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - x^3 + y - z + I(t), \\ \dot{y} = 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} = 0.01(4(x + 1.6) - z). \end{cases} \tag{7}$$

Внешний стимул $I(t) = (I_1 - I_2)s(t) + I_2$ – случайный переключающий параметр и $s(t)$ – случайный параметр (6). Система (7) при $I = \text{const}$ в зависимости от параметра I моделирует различные типы нейронной активности, включая регулярную и хаотическую тоническую и пачечную активности. В фазовом пространстве системы им отвечают устойчивые предельные циклы периода 1 и периода $l > 1, l \in \mathbb{N}$, соответственно, и хаотические аттракторы.

Выберем параметры $I_1 = 1.6$, $I_2 = 3.75$ из области, в которой соответствующие образующие системы HR_1 и HR_2 имеют глобально устойчивый предельный цикл периода 1 [17,18], т.е. демонстрируют тоническую активность.

Утверждение 2. *Пусть системы HR_1 и HR_2 имеют вероятности включения $p_1 = 0.44$ и $p_2 = 0.56$, соответственно. Тогда глобально устойчивый предельный цикл $\mathcal{B}$ периода 3 является аттрактором-призраком мигающей системы (7), а её нестационарный аттрактор B_τ при достаточно быстрых переключениях лежит в малой окрестности $\mathcal{B}$.*

Рассмотрим мигающую систему (7) при увеличении периода τ. При малых τ аттрактор B_τ и аттрактор призрак $\mathcal{B}$ почти совпадают [см. случай $\tau = 0.0001$ на Рис. 3(A)]. При малом увеличении τ аттрактор B_τ покидает малую окрестность $\mathcal{B}$, сохраняя количество спайков в пачке [см. случай $\tau = 0.001$ на Рис. 3(B)]. При дальнейшем увеличении τ число спайков в пачке становится отличным от таковых в аттракторе $\mathcal{B}$ [см. случай $\tau = 0.01$ на Рис. 3(C).

Аналогично случаю мигающей системы Лоренца получим функцию расстояния $\delta(\tau)$ для $N = 3 \times 10^6$ подобластей и таких же параметров T, $\Delta t = 10^{-4}$. Численные результаты, представленные на Рис. 4, демонстрируют свойства расстояния $\delta(\tau)$, аналогичные случаю мигающей системы Лоренца.

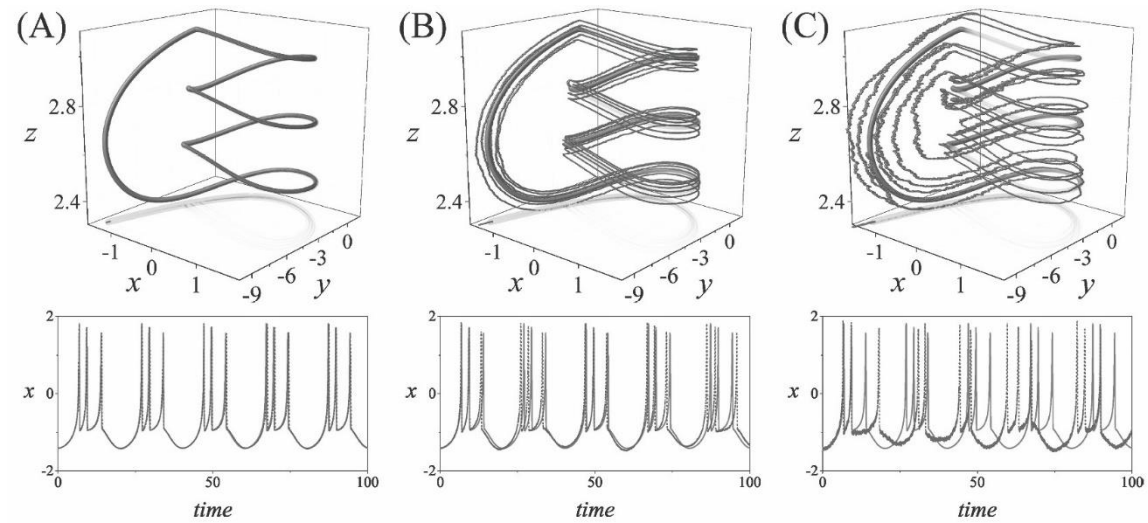


Рис. 3. Фазовые портреты и осциллограммы мигающей системы Хиндмарша-Роуза (7) (темно-серые негладкие траектории) при $\tau = 0.0001$ [столбец (A)], $\tau = 0.001$ [столбец (B)], $\tau = 0.01$ [столбец (C)]. Серые гладкие кривые соответствуют аттрактору-призраку $\mathcal{B}$

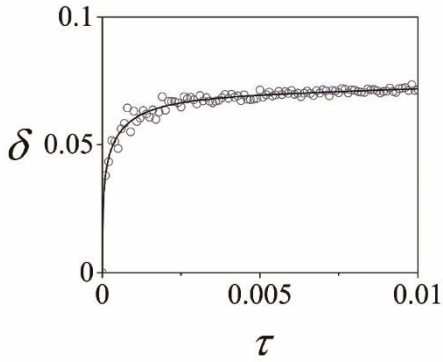


Рис. 4. Расстояние $\delta(\tau)$ для мигающей системы Хиндмарша-Роуза (7). Кругами отмечены результаты счета. Их аппроксимация изображена сплошной линией. $N = 3 \times 10^6$

Литература

1. Jeter R., Belykh I. Synchronization in on-off stochastic networks: Windows of opportunity // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2015. Vol. 62. No. 5. P. 1260-1269. DOI: 10.1109/TCSI.2015.2415172
2. Mills D. L. Internet time synchronization: the network time protocol // IEEE Transactions on communications. 1991. Vol. 39. No. 10. P. 1482-1493. DOI: 10.1109/26.103043
3. Parastesh F. et al. Synchronizability of two neurons with switching in the coupling // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 350. P. 217-223. DOI: 10.1016/j.amc.2019.01.011
4. Barabash, N.V., Belykh, V.N. Synchronization thresholds in an ensemble of Kuramoto phase oscillators with randomly blinking couplings // Radiophysics and Quantum Electronics. 2018. Vol. 60, No. 9. P. 761–768. DOI: 10.1007/s11141-018-9844-0.
5. Tse C. K., Di Bernardo M. Complex behavior in switching power converters //Proceedings of the IEEE. 2002. T. 90. No. 5. P. 768-781. DOI: 10.1109/JPROC.2002.1015006
6. Belykh, I., Belykh, V., and Hasler, M. Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling // Physica D. 2004. Vol. 195, No. 1-2. P. 188–306. DOI: 10.1016/j.physd.2004.03.013.
7. Barabash N. V., Belykh V. N. Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos // The European Physical Journal Special Topics. 2020. Vol. 229. P. 1071-1081. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900252-6

8. Hasler, M., Belykh, V., and Belykh. I. Dynamics of stochastically blinking systems. Part I: Finite time properties // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2013. Vol. 12, No. 2. P. 1007–1030. DOI: 10.1137/120893409.
9. Hasler, M., Belykh, V., and Belykh. I. Dynamics of stochastically blinking systems. Part II: Asymptotic properties // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2013. Vol. 12, No. 2. P. 1031–1084. DOI: 10.1137/120893410.
10. Kryloff N., Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire //Annals of mathematics. 1937. Vol. 38, No. 1. P. 65-113. DOI: 10.2307/1968511.
11. Anosov D. V., Sinai Y. G. Some smooth ergodic systems // RuMaS. 1967. Vol. 22, No. 5. P. 103-167. DOI: 10.1070/RM1967v022n05ABEH001228.
12. Eckmann J. P., Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors // The theory of chaotic attractors. – Springer, New York, NY, 1985. P. 273-312. DOI: 10.1007/978-0-387-21830-4_17.
13. Afraimovich V. S., Chernov N. I., Sataev E. A. Statistical properties of 2-D generalized hyperbolic attractors // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. Vol. 5, No. 1. P. 238-252. DOI: 10.1063/1.166073.
14. Dellnitz M. et al. Exploring invariant sets and invariant measures //CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1997. Vol. 7, No. 2. P. 221-228. DOI: 10.1063/1.166223.
15. Carroll T. L. Attractor comparisons based on density // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2015. Vol. 25, No. 1. P. 013111. DOI: 10.1063/1.4906342.
16. Barabash N. V., Levanova T. A., Belykh V. N. Ghost attractors in blinking Lorenz and Hindmarsh–Rose systems // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30. No. 8. P. 081105. DOI: 10.1063/5.0021230.
17. Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations //Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences. 1984. Vol. 221. No. 1222. P. 87–02. DOI: 10.1098/rspb.1984.0024.
18. Storace M., Linaro D., de Lange E. The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008. Vol. 18. No. 3. P. 033128. DOI: 10.1063/1.2975967.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С РАЗРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ[1*]

Баркалов К.А., Усова М.А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача поиска глобального минимума одномерной функции, имеющей, возможно, несколько точек разрыва типа конечного скачка. В некоторых случаях множество точек разрыва является известным. Однако вместе с тем существуют задачи, в которых нет априорных оценок точек разрыва, но известно, что такие точки возможны. В работе приведено экспериментальное сравнение предложенного алгоритма с методами, реализованными в MATLAB Global Optimization Toolbox.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многоэкстремальные функции, разрывные функции, сравнение алгоритмов

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача поиска глобального минимума x^* одномерной функции φ(x) вида

$$\varphi^* = \varphi(x^*) = \min\{\varphi(x): x \in [a, b]\} \quad (1)$$

Предполагается, что целевая функция является многоэкстремальной и задана в виде «черного ящика».

В литературе описаны различные методы решения задачи (1) в зависимости от предположений о свойствах целевой функции. Одним из подобных наложенных условий на вид целевой функции, которое часто выполняется в прикладных оптимизационных задачах, является предположение о том, что целевая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с априори неизвестной константой L

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le L|x' - x''|, \;\; x', x'' \in [a, b], \;\; 0 < L < \infty.$$

Использование данного свойства целевой функции является типичным для многих подходов к разработке алгоритмов многоэкстремальной оптимизации [1,2].

Однако в некоторых прикладных задачах свойство липшицевости может не выполняться в силу наличия скачкообразных изменений значений функции в ряде точек области поиска. Иногда множество точек, в которых характеристики объекта претерпевают скачок, известно заранее. Вместе с тем существуют задачи, в которых нет априорных оценок точек разрыва, но имеется информация, что такие точки возможны.

В докладе на конференции представлен разработанный в ННГУ им. Н.И. Лобачевского эффективный алгоритм для поиска *глобального решения* многоэкстремальных задач с разрывными функциями для случая как заданных, так и незаданных точек разрыва. Данный алгоритм является дальнейшим развитием *алгоритма глобального поиска*, описание, теория сходимости и различные модификации которого представлены в [3].

2. Результаты экспериментов

Проиллюстрируем работу данного алгоритма при поиске минимума тестовой функции функции (2) при $x \in [0, 10]$.

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-07-00242), научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1) и государственного задания (0729-2020-0055).

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{4} i(\cos((i+1)x + \exp(x/20 + i))) + \begin{cases} 10, & 0 \le x < 2.0 \\ -1, & 2.0 \le x < 4.75 \\ 20.5\,, & 4.75 \le x < 6.0 \\ 0, & 6.0 \le x < 8.0 \\ 10, & 0 \le x < 10.0 \end{cases} \quad (2)$$

Для решения задачи использовался алгоритм глобального поиска для разрывных функций (АГП-Р). На рисунке 1 изображен график функции, на котором штрихами под графиком обозначены точки поисковых испытаний, потребовавшихся алгоритму для решения задачи с заданной точностью. В случае, когда точки разрыва были известны, метод провел 65 испытаний (штрихи верхнего ряда). В случае, когда все точки разрыва не были заданы заранее и идентифицировались в процессе поиска, потребовалось 104 испытания (штрихи нижнего ряда).

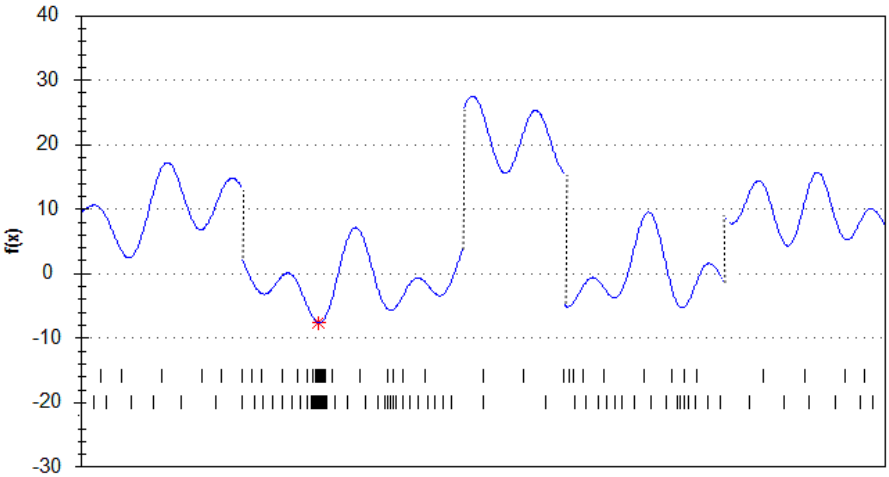


Рисунок 1. График разрывной целевой функции и точки испытаний

Для демонстрации эффективности алгоритма глобального поиска для разрывных функций (AGS-D) было проведено его сравнение с методами Direct Search (DS) [4], Genetic Algorithm (GA) [5], Simulated Annealing (SA) [6], реализованными в MATLAB Global Optimization Toolbox.

В качестве основных критериев сравнения использовались число поисковых испытаний и количество вычислений целевой функции, выполненные методами до достижения сходимости.

Сравнение алгоритмов проводилось при решении серии из 1000 задач с разрывной целевой функцией. В таблице 1 представлено число решенных задач, среднее число испытаний и среднее число вычислений функции, выполненных сравниваемыми методами при решении серии. Задача считалась решенной, если для точки некоторого испытания x^k выполнялось $|x^k - x^*| \le \varepsilon$, где x^* – известное решение задачи, а $\varepsilon = 10^{-2}$ – точность на порядок меньше, чем используемая в условии остановки методов.

Таблица 1. Результаты решения серии задач с разрывными функциями

Метод	Решено задач	Среднее число испытаний	Среднее количество вычислений целевой функции
AGS-D	1000	79	80
SA	974	755	758
GA	888	53	2701
DS	451	38	71

Результаты показывают, что методы пакета Global Optimization с разрывными задачами справляются значительно хуже, чем реализованный алгоритм AGS-D, который успешно решает всю серию с параметром надёжности $r = 3.7$. Применение же любого из рассмотренных методов MATLAB позволило найти минимум, который может быть как локальным, так и глобальным. Результаты экспериментов с алгоритмами GA и SA свидетельствуют о высокой надежно-

сти отыскания глобального экстремума, в отличие от метода DS, однако эти методы также значительно проигрывают алгоритму AGS-D по основным критериям сравнения.

Литература

1. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.-И.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 2. С. 255–269.
2. Елсаков С.М., Ширяев В.И. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 10. С. 1727–1740.
3. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013. 280 с.
4. Audet, Charles, and J. E. Dennis Jr. "Analysis of Generalized Pattern Searches". SIAM Journal on Optimization. Volume 13, Number 3, 2003, pp. 889–903.
5. Goldberg, David E., Genetic Algorithms in Search, Optimization \& Machine Learning, Addison-Wesley, 1989.
6. Kirkpatrick, S.; Gelatt, C. D.; Vecchi, M. P. (1983) Optimization by Simulated Annealing. Science. American Association for the Advancement of Science (AAAS). 220 (4598): 671–680.

ОБОЛОЧКА ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ПОДДЕРЖКИ ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В КАЧЕСТВЕ СРЕДСТВА ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНТНОСТИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

П.Д. Басалин, А.Е. Тимофеев

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается проблема организации и контроля формирования компетентности пользователей в среде оболочки гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений. В качестве формализма настройки системы на конкретную предметную (проблемную) область используется граф решений, позволяющий компактно описывать нечеткую логику рассуждений эксперта на инфологическом уровне. Приводится пример построения фрагмента графа решений из проблемной области формализации задач в нейросетевом базисе.

Ключевые слова: компетентность, компетенции, средство интеллектуальной поддержки, нечеткие продукционные правила, оболочка гибридной системы, граф решений.

1. Введение

Компетентность – интегрированная характеристика индивидуума, которую можно представить точкой в многомерном пространстве компетенций, оценивая уровень их проявления по степени отклонения принимаемых индивидуумом решений от решений, базирующихся на знаниях эксперта (экспертов) в определенной предметной (проблемной) области, по непрерывной шкале от 0 до 1. При этом максимальному уровню компетенций (но не компетентности как синергетического объединения первых) будет соответствовать вершина единичного гиперкуба в пространстве компетенций, все координаты которой равны 1.

Возникает вопрос: по какой траектории индивидуум может прийти из начальной точки минимальной компетентности (вблизи вершины единичного гиперкуба со всеми координатами 0) в точку максимального уровня компетентности?

Очевидно, на начальных этапах (в рамках образовательного процесса) это будет приближаться к покоординатному продвижению к цели в пространстве осваиваемых дисциплин.

Целенаправленный процесс формирования компетентности, носящий междисциплинарный профессионально-ориентированный характер, может начаться с производственной (в частности, преддипломной) практики и продолжается в ходе профессиональной деятельности индивидуума после обучения.

2. Средство формирования компетентности

Существенную помощь в плане организации и контроля формирования компетентности в ходе практической профессиональной деятельности может оказать оболочка гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений [1], настраиваемая через формализм базы знаний на различные предметные (проблемные) области.

Компетентность складывается из двух составляющих:

- способности правильно оценивать возникающие проблемные ситуации;
- способности правильно определять выводы, направленные на разрешение этих ситуаций.

Эти составляющие отражаются в долговременных знаниях экспертов, представляемых графом решений [2,3] на инфологическом уровне при настройке оболочки гибридной системы на конкретную предметную (проблемную) область.

Граф решений представляет собой ориентированный помеченный граф с вершинами двух типов:

- вершины условий (типа «овал»), из которых могут исходить несколько ребер (например, по «Да») со своими коэффициентами уверенности, помечающими эти ребра;
- вершины выводов (типа «прямоугольник»), имеющие один вход и один выход (обязательно на вершину условия) для промежуточных выводов и не имеющие выхода (не продолжающие логику рассуждений) в случае окончательного вывода.

Каждая вершина-овал содержит некоторое высказывание, которое может принимать значение «Истина» с некоторым коэффициентом уверенности на отрезке [0, 1], где 0 означает наименьшую степень уверенности, а 1 – наибольшую. Каждому коэффициенту уверенности соответствует помеченный им выход из вершины-овала.

Вершина вывода содержит предложение, описывающее некоторое промежуточное или окончательное заключение и/или ссылку на определенное действие. Вершина вывода помечается в нижнем правом углу коэффициентом уверенности, определяющим положительным значением меньше единицы степень адекватности вывода условиям его активации (для непомеченной вершины вывода значение коэффициента уверенности по умолчанию принимается равным единице).

Граф решений, трансформированный в набор нечетких продукционных правил (для аналитической составляющей системы) и эквивалентную по логике «рассуждений» нейронную сеть (для синтетической составляющей), определяет всю логику функционирования системы в процессе поиска и принятия решений. При этом оценка проблемных ситуаций и определение выводов, направленных на разрешение этих ситуаций, осуществляются на основе коэффициентов уверенности, заданных пользователем, но согласно логике, заложенной в долговременных знаниях эксперта с оценками, наиболее близкими к оценкам пользователя. Аналитическая составляющая системы через подсистему объяснения обеспечивает открытость логики принятия решений, логики уровня компетентности эксперта. В этом заключается обучающий момент.

Параллельно с процессом решения конкретной практической задачи система может контролировать при срабатывании каждого очередного правила степень совпадения оценок пользователя с оценками эксперта с помощью гауссовой функции

$$L(C_{\text{п}}) = e^{-\frac{(C_{\text{п}} - C_{\text{э}})^2}{\sigma^2}}, \qquad (1)$$

где $C_{\text{п}}$ – коэффициент уверенности, заданный пользователем; $C_{\text{э}}$ – аналогичный по смыслу наиболее близкий к оценке пользователя коэффициент уверенности, определенный экспертом в продукционном правиле; σ – ширина окна гауссовой функции.

Функция $L(C_{\text{п}})$ интерпретируется как коэффициент уверенности, дающий свой вклад в логическую цепочку рассуждений в соответствии с алгеброй нечеткой логики. По сути дела, в процессе нечеткого логического вывода параллельно формируются две цепочки рассуждений. На выходе одной получается результат решения задачи – заключение с коэффициентом уверенности, определенным в соответствии с оценками пользователя. На выходе другой - итоговый коэффициент уверенности в совпадении оценок пользователя с оценками эксперта, рассматриваемый как уровень компетентности пользователя, проявленный при решении данной задачи.

Тестовый набор ситуаций и принимаемых в них решений (выводов) может быть описан с использованием формализма графа решений. Это может быть сделано уже на старших курсах образовательного процесса при освоении дисциплин междисциплинарного характера. В этих условиях оболочку можно рассматривать как виртуальный тренажер, настраиваемый через формализм графа решений на поддержку процесса формирования компетенций, вклад в которые определяют данные дисциплины. В качестве примера можно привести представленный на рис. 1 фрагмент графа решений из проблемной области формализации задач в нейросетевом базисе, связанной с освоением дисциплины «Интеллектуальные информационные системы».

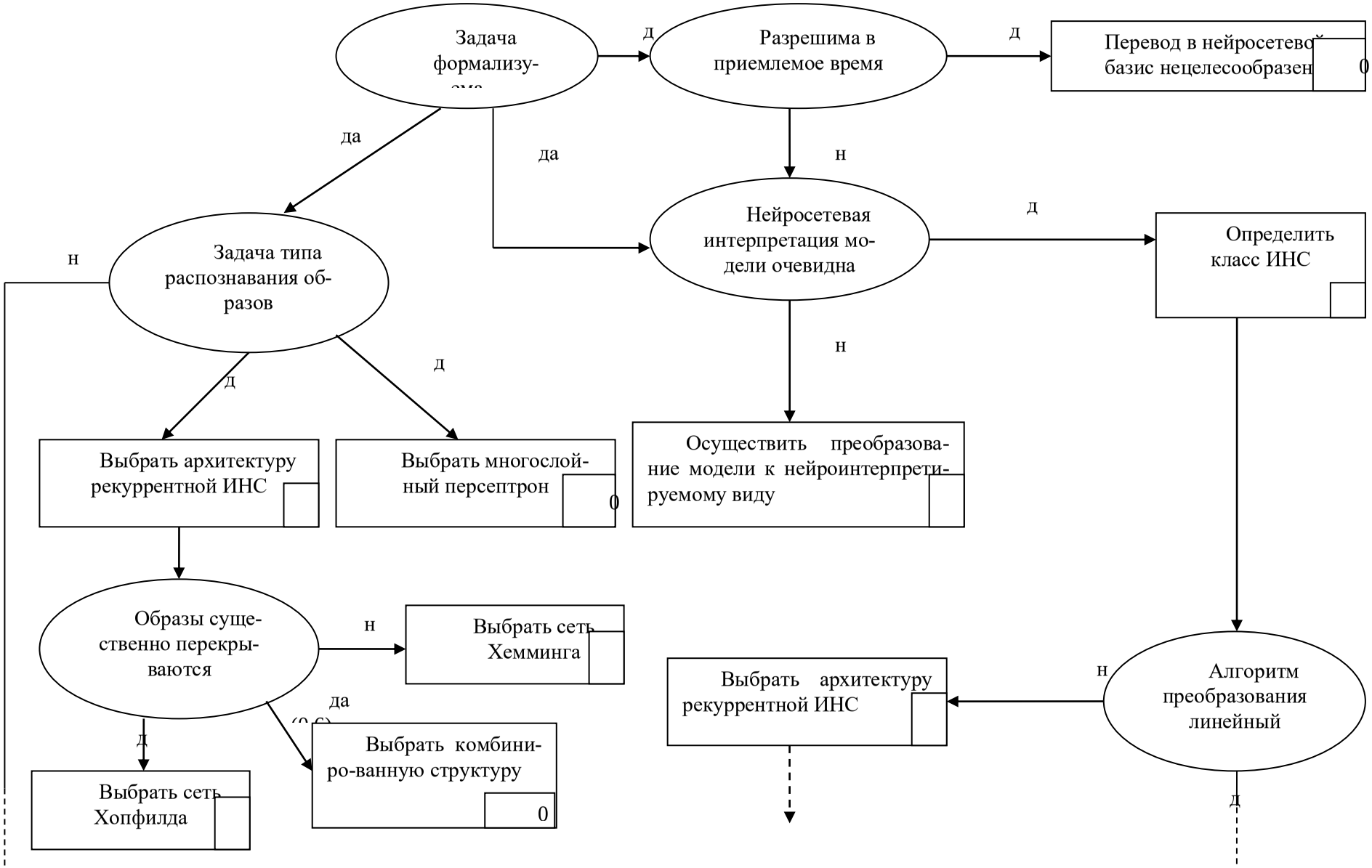


Рис. 1. Фрагмент знаний из проблемной области формализации задач в нейросетевом базисе в виде графа решений

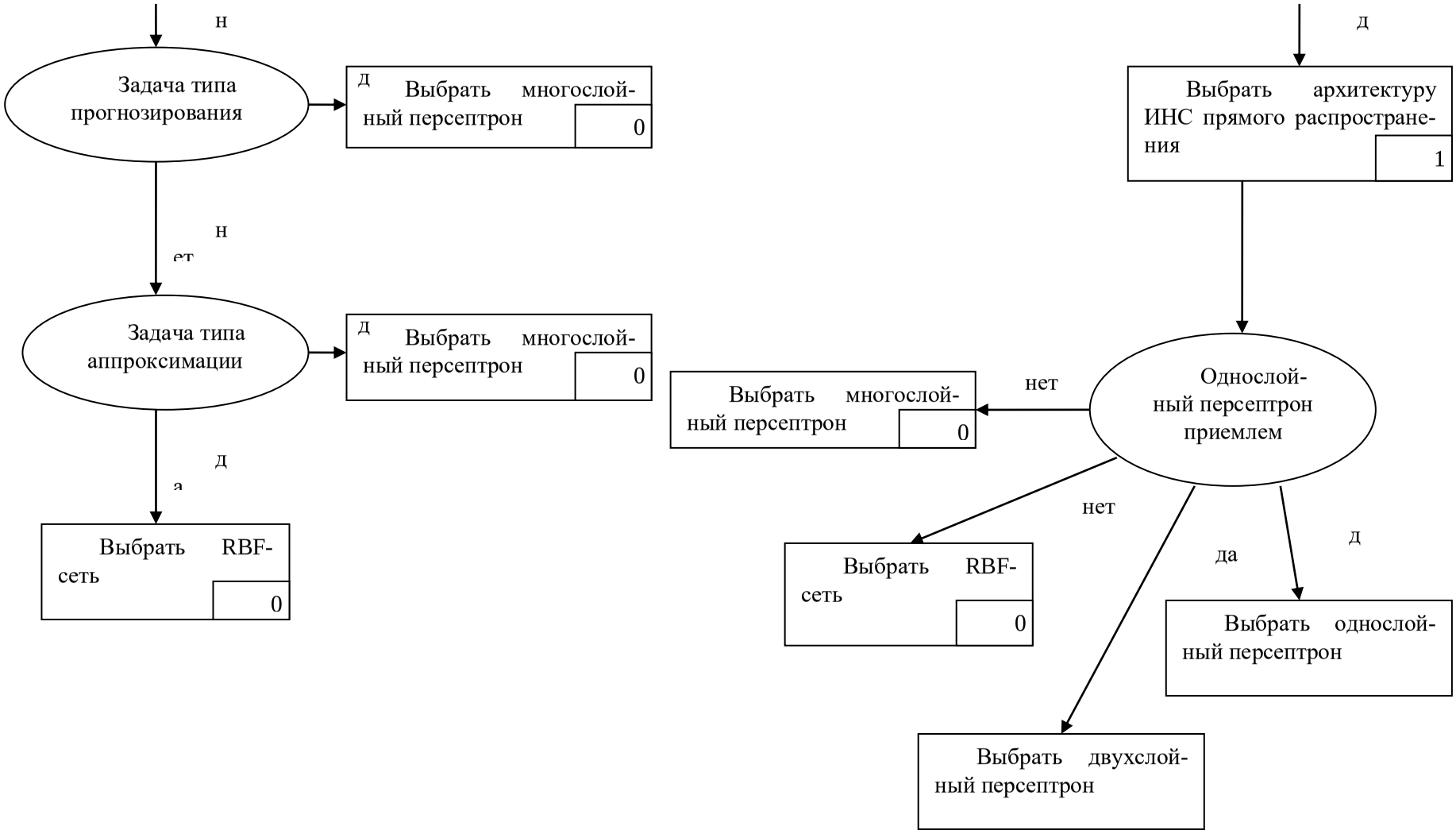


Рис. 2. (продолжение). Фрагмент знаний из проблемной области формализации задач в нейросетевом базисе в виде графа решений

Тестовые графы решений, охватывающие более широко проблемные ситуации и нечеткую логику их разрешения, можно использовать при настройке оболочки на проблемы и практические задачи, решаемые в рамках производственной (в частности преддипломной) практики и итоговой государственной аттестации. Однако построение таких графов решений носит во многом искусственный характер и требует значительных усилий.

Гораздо проще и естественнее выглядит процесс адаптации оболочки к условиям применения в практической профессиональной деятельности, когда сама жизнь (ее часть, связанная с профессиональной деятельностью) порождает проблемные ситуации и заставляет искать пути их разрешения. Остается только представить их в формате графа решений и подать на вход подсистемы приобретения знаний оболочки, после чего использовать ее в качестве виртуального тренажера.

Таким образом, оболочка гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений, адаптированная к условиям применения в образовательном процессе, наряду с другими средствами компьютерной поддержки процесса обучения, например, [4-10], способна во многом содействовать рациональной организации процесса обучения, направленного на формирование компетенций, предусмотренных современными федеральными государственными, международными и самостоятельно устанавливаемыми вузами образовательными стандартами [11-14].

Литература

1. Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Оболочка гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений // Системы управления и информационные технологии. 2018. № 1 (71). С. 24–28.
2. Басалин П.Д., Безрук К.В., Радаева М.В. Модели и методы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений: Учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 129 с.
3. Басалин П.Д., Кумагина Е.А., Неймарк Е.А., Тимофеев А.Е., Фомина И.А., Чернышова Н.Н. Реализация гибридной интеллектуальной обучающей среды продукционного типа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2018. – Т. 14. – № 1. – С. 256-267.
4. Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Оболочка гибридной интеллектуальной обучающей среды продукционного типа // Международный электронный журнал «Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society)». – 2018. – V. 21. – № 1. – С. 396-405.
5. Басалин П.Д., Кумагина Е.А., Неймарк Е.А., Тимофеев А.Е., Фомина И.А., Чернышова Н.Н. Реализация гибридной интеллектуальной обучающей среды продукционного типа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2018. – Т. 14. – № 1. – С. 256-267.
6. P.D. Basalin, A.E. Timofeev Fuzzy models for the functioning of the rule-based hybrid intelligent learning environment // International Journal of Open Information Technologies. - 2019. - V. 7. - № 2. – P. 49-55. URL: http://injoit.org/index.php/j1/article/view/693.
7. Грезина А.В., Панасенко А.Г. Использование современных технологий в преподавании физики при подготовке бакалавров // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С 293-303.
8. Грезина А.В., Панасенко А.Г. Электронный образовательный контент, предназначенный для формирования профессиональных компетенций бакалавров направления подготовки «Прикладная математика и информатика» // Образовательные технологии и общество. 2019. Т. 22. № 1. С. 198-208.
9. Грезина А.В. Использование компьютерного моделирования для формирования профессиональных компетенций выпускников // Образовательные технологии и общество. 2019. Т. 22. № 4. С. 143-153.
10. Кузенков О.А., Кузенкова Г.В., Киселева Т.П. Использование электронных средств обучения при модернизации курса «Математическое моделирование процессов отбора» //Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 435-448.

11. Захарова И.В., Кузенков О.А. Опыт актуализации образовательных стандартов высшего образования в области ИКТ // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 4. С. 46-57.
12. Кузенков О.А., Захарова И.В. Модернизация математических программ на основе российских и международных стандартов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 233-244.
13. Гергель В.П., Кузенков О.А. Разработка самостоятельно устанавливаемых образовательных стандартов Нижегородского госуниверситета в области информационно-коммуникационных технологий // Школа будущего. 2012. № 4. С. 100-105.
14. Гугина Е.В., Кузенков О.А. Образовательные стандарты Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 3-4. С. 39-44.

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ РОЗЕНЦВЕЙГА-МАКАРТУРА[1*]

Ю.В. Баханова[1]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Целью работы является изучение некоторых особенностей спиральных аттракторов, связанных с образованием шильниковской петли седело-фокуса в трёхмерной системе Розенцвейга-Макартура. Было установлено, что гомоклинический хаос в такой системе возникает по сценарию Шильникова [1]. В системе были найдены и рассмотрены аттрактор Шильникова, содержащий седло-фокус (1, 2) и седловой аттрактор Шильникова, содержащий седловое состояние равновесия (1, 2).

Ключевые слова: хаотический аттрактор, седловое состояние равновесия, седло-фокус, гомоклиническая траектория, спиральный аттрактор, аттрактор Шильникова.

1. Аттрактор Шильникова

Система Розенцвейга-Макарутра была подробно рассмотрена в работе [2], она описывает динамику взаимодействия трёх популяций в пищевой цепи «жертва–хищник–суперхищник»:

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(r\left(1-\frac{x}{K}\right)-\frac{5y}{1+3x}\right) \\ \dot{y} = y\left(\frac{5x}{1+3x}-\frac{0.1z}{1+2y}-0.4\right) \\ \dot{z} = z\left(\frac{0.1y}{1+2y}-0.01\right) \end{cases} \quad (1)$$

Впервые хаотические аттракторы в рассматриваемой системе были обнаружены в статьях [3–5]. В работах [2, 6] было показано, что странные аттракторы здесь могут иметь спиральную структуру за счет возникновения гомоклинических петель седло-фокусного состояния равновесия. В 2018 году было установлено [7], что аттракторы в системе (1) возникают в соответствии со сценарием Шильникова. При изменении параметра r в системе может наблюдаться цепочка бифуркаций: устойчивое состояние равновесия – предельный цикл – цикл удвоенного периода – аттрактор типа Фейгенбаума, при дальнейшем увеличении параметра возникают гомоклинические траектории к седло-фокусу, для которого выполнено условие Шильникова [6], что является критерием существования спирального хаоса. Один из таких аттракторов изображен на рис. 1а.

Параметры, при которых был найден аттрактор, имеют значения $(K, r) = (0.79, 1.06356)$, координаты состояния равновесия S имеют координаты $(x, y, z) \approx (0.820, 0.125, 9.815)$ с собственными числами $\lambda_{1,2} \approx\ 0.021 \pm 0.088i,\ \lambda_3 \approx -0.367$, таким образом, состояние равновесия является седло-фокусом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями.

2. Седловой аттрактор Шильникова

В работах [2, 6] было показано, что гомоклинической петле к состоянию равновесия S на плоскости управляющих параметров r и K отвечает бифуркационная кривая h. Вдоль этой кривой аттрактор хоть и меняется (его форма усложняется за счёт возникновения многообходных гомоклинических петель), но при этом всегда содержит точку S, то есть является гомоклиническим, см. рис. 1 a, b, c. В точке B с координатами $(K, r) \approx (1.22, 4.026)$ на кривой h у состояния равновесия S появляется пара кратных собственных чисел, таки образом ниже точки B состояние равновесия является седло-фокусом (1,2), а выше – седлом (1,2). В результате численного счёта было обнаружено, что при переходе через точку B гомоклинический аттрактор сохраня-

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 19-71-10048.

ется, но его тип меняется на седловой шильниковский. На рис. 2 изображен пример седлового аттрактора Шильникова при $(K, r) = (1.247, 4.31)$.

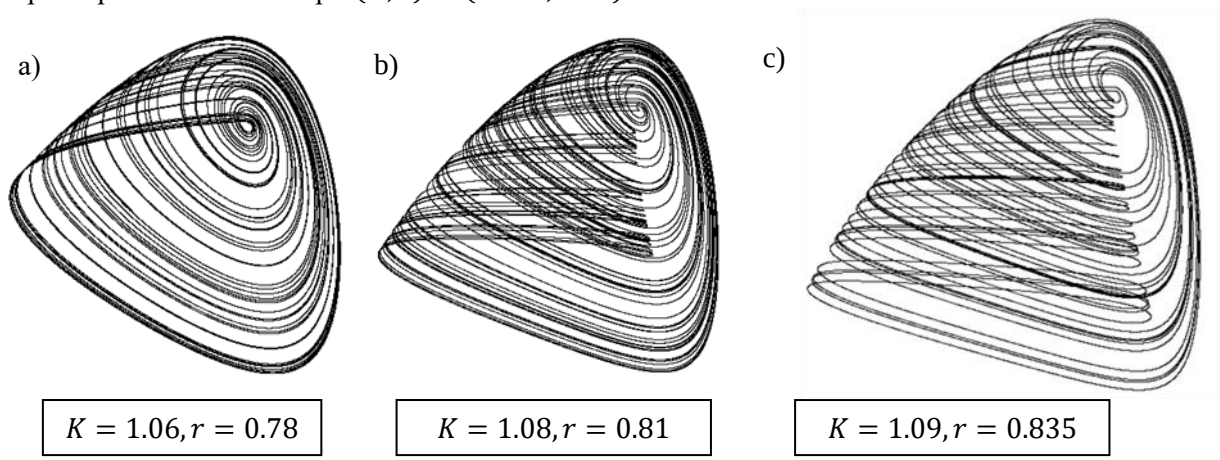


Рис. 1. Три вида аттрактора Шильникова в системе Розенцвейга–Макартура, найденные при различных параметрах (K, r)

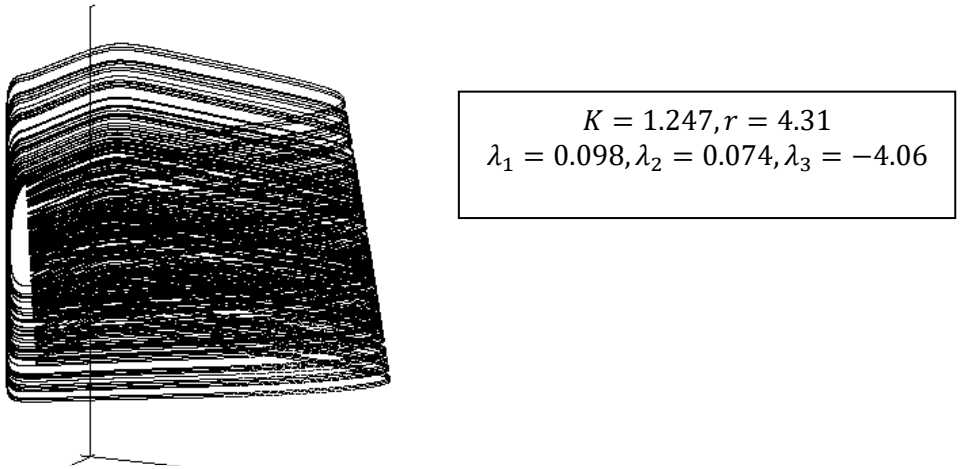


Рис. 2. Седловой аттрактор Шильникова при значениях параметров $(K, r) = (1.247, 4.31)$

В статье [8] был рассмотрен вопрос псевдогиперболичности такого аттрактора. Результат проверки непрерывности устойчивого многообразия на непрерывность показал, что такой аттрактор не является псевдогиперболическим. Вопрос существования псевдогиперболического аттрактора в рассматриваемой модели, как и вопрос существования псевдогиперболического седлового аттрактора Шильникова, на сегодняшний день открыт.

Литература

1. Bakhanova Y.V., Kazakov, A.O., Korotkov A.G., Levanova T.A., Osipov G.V. Spiral attractors as the root of a new type of «bursting activity» in the Rosenzweig–MacArthur model // The European Physical Journal Special Topics. 2018. Vol. 227, no. 7–9. P. 959–970.
2. Kuznetsov Y.A., De Feo O., Rinaldi S. Belyakov homoclinic bifurcations in a tritrophic food chain model // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2001. Vol. 62, no. 2. P. 462–487.
3. Hastings A., Powell T. Chaos in a three-species food chain // Ecology. 1991. Vol. 72, no. 3. P. 896–903.
4. Rai V., Sreenivasan R. Period-doubling bifurcations leading to chaos in a model food chain // Ecological modelling. 1993. Vol. 69, no. 1–2. P. 63–77.
5. Kuznetsov Y.A., Rinaldi S. Remarks on food chain dynamics // Mathematical biosciences. 1996, vol. 134, no. 1. P. 1–33.

6. Deng B., Hines G. Food chain chaos due to Shilnikov's orbit // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2002. Vol. 12, no. 3. P. 533–538.
7. Баханова Ю.В., Казаков А.О., Каратецкая Е.Ю., Козлов А.Д., Сафонов К.А. О гомоклинических аттракторах трехмерных потоков // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 3. С. 231–258.

О ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА В СИСТЕМЕ ШИМИЦУ-МОРИОКА[1*]

Бобровский А.А.[1], Казаков А.О.[1,2], Сафонов К.А.[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Работа посвящена изучению границы между аттрактором Лоренца и квазиаттрактором в системе Шимицу-Мориока

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x(1-z) - \lambda y, \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2, \end{cases}$$

где x, y, z – переменные, а α и λ - параметры. Хорошо известно [1], что для этой системы одной из важных бифуркационных кривых, отвечающих разрушению аттрактора Лоренца, является кривая зануления сепаратрисой величины. Сепаратрисная величина определяется как коэффициент A_1 в отображении возвращения в окрестности седлового состояния равновесия, имеющего вид

$$\begin{cases} \bar{\xi} = (\mu_1 + A_1 \cdot |\xi|^\nu + o(|\xi|^\nu)) \cdot sign(\xi), \\ \bar{\eta} = (\mu_2 + A_2 \cdot |\xi|^\nu + o(|\xi|^\nu)) \cdot sign(\xi), \end{cases}$$

и играющего ключевую роль в построении геометрической модели аттрактора Лоренца (см. [2]). В частности, на этой кривой существует счетное множество значений параметров, при которых система имеет пару (многообходных) гомоклинических траекторий к седловому состоянию равновесию. Согласно [3,4], при $\nu > \frac{1}{2}$ из каждой такой бифуркационной точки на области параметров выходят области существования ориентируемого и неориентируемого аттрактора Лоренца. Таким образом, область существования аттрактора в окрестности этой кривой имеет довольно сложную структуру.

В данной работе мы рассматриваем семейство одномерных отображений

$$\bar{\xi} = (-1 + A \cdot |\xi|^\nu + B \cdot |\xi|^{2\nu}) \cdot sign(\xi)$$

при $0 < \nu < 1$ и $B > 0$, полученное из отображения возвращения отбрасыванием уравнения для сильно сжимающей переменной и членов высокого порядка в первом уравнении, а также перенормировкой координат $\xi = -\mu_1 \cdot \xi_{new}$. Для данного семейства мы изучаем бифуркации, приводящие к рождению аттракторов Лоренца разных типов (ориентируемого и неориентируемого; с тривиальным и нетривиальными лакунами). Особое внимание уделяется малым значениям параметра A, соответствующих занулению сепаратрисной величины. Также мы устанавливаем соответствие между результатами численного исследования системы Шимицу-Мориока и изучения семейства одномерных отображений.

[1*] Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931, а также при поддержке грант РНФ № 19-71-10048.

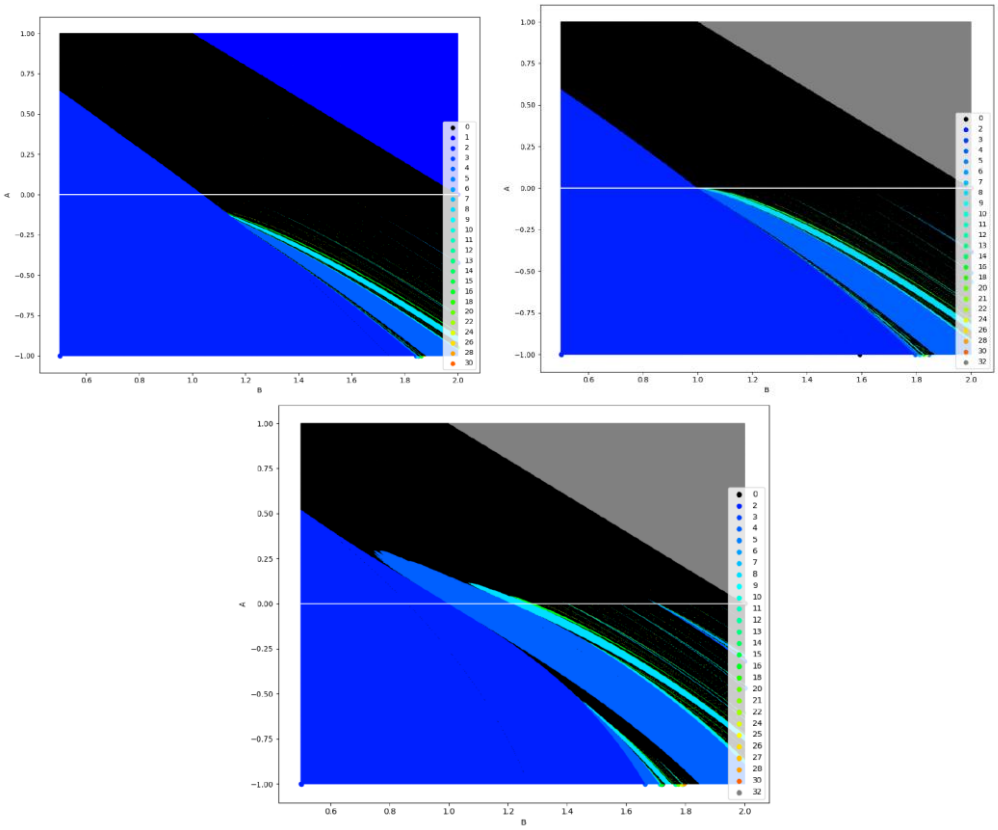


Рис. 1. Карта режимов для одномерного отображения на плоскости параметров A, B при а) $\nu = 0{,}4$, б) $\nu = 0{,}5$, в) $\nu = 0{,}6$. Черный цвет соответствует хаотическому поведению, остальные цвета отвечают существованию устойчивых периодических орбит различных периодов.

Литература

1. Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – Vol. 62. – No. 1-4. – pp. 338-346.
2. Afraimovich V. S., Bykov V. V., Shilnikov L. P. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type //Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo. – 1982. – Vol. 44. – pp. 150-212.
3. Shilnikov L.P. The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors. Uspehi Mat. Nauk 36 (1981): 240-241.
4. Golmakani A., and A. J. Homburg. Lorenz attractors in unfoldings of homoclinic-flip bifurcations. Dynamical Systems 26.1 (2011): 61-76.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ХИМЕРНЫХ СТРУКТУР ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В СРЕДЕ ИДЕНТИЧНЫХ НЕЛОКАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ[1*]

М.И. Болотов[1], Л.А. Смирнов[1,2], Г.В. Осипов[1], А. Пиковский[3,1]

[1]Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего», Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород,
[3]Потсдамский университет, Германия

В данной работе исследуется эффект синхронизации химерного состояния в одномерной среде нелокально связанных осцилляторов однородным по пространству и периодическим по времени внешним воздействием. На макроскопическом уровне, где химеру можно рассматривать как осциллирующий объект, внешнее воздействие приводит к увлечению основной частоты химеры внутри соответствующего языка Арнольда. На микроскопическом уровне динамики отдельных осцилляторов, воздействие за пределами языка Арнольда приводит к возникновению доменов с нетривиальными свойствами захвата средних частот.

Ключевые слова: синхронизация, химерное состояние, внешнее воздействие, нелокальная связь, фазовый осциллятор, параметр порядка, редукция Отта-Антонсена.

1. Введение

Химерные состояния в популяциях нелокально связанных осцилляторов представляют собой нетривиальные пространственно-временные структуры, сочетающие в себе области с синхронной и асинхронной динамикой. Со времени первого наблюдения Курамото и Баттогтоха [1] был достигнут значительный прогресс в теоретическом и экспериментальном исследовании химер [2].

Известно, что слабое неоднородное воздействие может управлять положением химеры в пространстве. В данной работе мы рассмотрим периодическое по времени и однородное по пространству внешнее воздействие. Основная идея исследования состоит в том, что химера на макроскопическом уровне представляет собой осциллирующий объект и, таким образом, подобно простым самосогласованным осцилляторам, она может быть синхронизирована по фазе или захвачена по частоте внешним сигналом. В частности, две связанные химеры могут синхронизироваться в смысле увлечения их средних частот, в то время как их внутренняя неоднородная структура сохраняется.

2. Модель

В качестве базовой модели замкнутой в кольцо одномерной среды длиной L используется модель осцилляторов Курамото-Баттогтоха [1], описываемая фазой $\varphi(x,t)$, динамика которой в каждой точке интервала $[0,L)$ определяется как общим средним полем, так и внешним периодическим воздействием с амплитудой ε и частотой Ω согласно уравнению

$$\partial_t\varphi = \int_0^L G(x-\tilde{x})\sin(\tilde{\varphi}-\varphi-\alpha)d\tilde{x} + \varepsilon\sin(\Omega t-\varphi). \qquad (1)$$

Здесь ядро $G(x) = \cosh(|x|-L/2)\,/2\sinh(L/2)$ воспроизводит слабое нелокальное взаимодействие внутри среды [3], α – фазовый сдвиг.

[1*] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 17-12-01534 (аналитические результаты), и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-52-12053 (численные результаты).

3. Синхронизация химерного состояния

Продемонстрируем эффект синхронизации устойчивого химерного состояния с помощью внешнего воздействия на следующем примере. При $L = 4.41$ в системе (1) при отсутствии внешнего воздействия существует устойчивая стационарная химера с частотой синхронного домена $\Omega_0 = -0.8$. При ненулевом внешнем воздействии на плоскости параметров (Ω, ε) для химерного состояния существует область захвата (синхронизации с внешней силой), когда частота вращения когерентного кластера совпадает с частотой стороннего воздействия (рис. 1). Таким образом, выбирая значения параметров внешнего воздействия из области синхронизации, можно добиться захвата частоты химерного состояния в некотором интервале возможных значений. Обратим внимание на то, что при этом изменяется длина интервала, содержащего синхронные элементы.

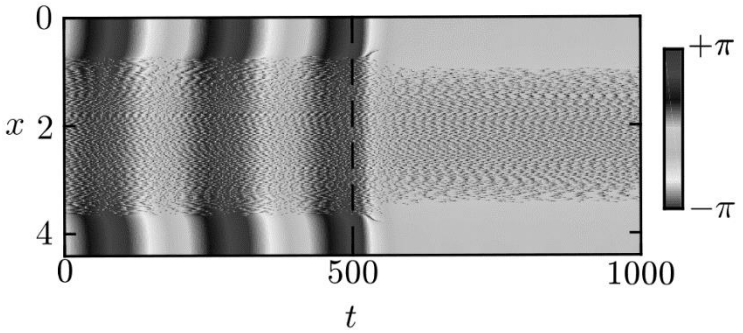


Рис. 1. Синхронизация химерного состояния при $L = 4.41$ внешним периодическим воздействием с частотой $\Omega = -0.83$ и амплитудой $\varepsilon = 0.25$. Цветом изображена динамика $\varphi(x,t) - \Omega t$. Внешнее воздействие включается в момент времени $t = 500$ (пунктирная линия)

Литература

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. V. 5, P. 380.
2. Omel'chenko O. E. The mathematics behind chimera states // Nonlinearity. 2018. V. 31, P. R121-R164. DOI: 10.1088/1361-6544/aaaa07.
3. Smirnov L. A., Osipov G. V., Pikovsky A. Chimera patterns in the Kuramoto-Battogtokh model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. V. 50, P. 08LT01. DOI: 10.1088/1751-8121/aa55f1.

ИССЛЕДОВАНИЕ АППАРАТНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЙРОНОПОДОБНОГО ГЕНЕРАТОРА С ВОЗБУДИМЫМ И АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫМ РЕЖИМОМ[1*]

Д.И. Большаков[1,2], М.А. Мищенко[1,2], В.В. Матросов[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
2 Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

В данной работе представлены результаты численного моделирования синхронизации пачечных колебаний двух нейронов, основанных на системе ФАПЧ, и определены области синхронизации колебаний в пространстве параметров модели.

Ключевые слова: синхронизация, пачечные колебания, нейроподобный генератор, аппаратная реализация.

1. Введение

Моделирование динамики нейронов и их сетей остается важным инструментом для понимания физиологии работы мозга и нервной системы. Кроме того, осознание принципов работы мозга в перспективе откроет возможность работать над нейроподобными компьютерами на принципиально новой архитектуре и лечить болезни, связанные с нервной системой, в том числе путём нейропротезирования. Создание аппаратных моделей нейронов актуально на сегодняшний день именно по причине высокого интереса к нейроморфным электронным устройствам. Создание же аппаратной модели на основе системы фазовой автоподстройки частоты (далее ФАПЧ) особо актуально, тем, что системы ФАПЧ очень распространены в радиотехнике и легкодоступны.

2. Математическая модель нейроноподобного генератора с возбудимым и автоколебательным режимом

В работе [1] была описана математическая модель нейроподобного генератора на основе ФАПЧ с полосовым RC-CR фильтром. Данная математическая модель представляет из себя две системы дифференциальных уравнений (1) и (2):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = y\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial\tau} = z,$$
$$3\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial z}{\partial\tau} = (\gamma - y)(2d+1) - z(\varepsilon_1(2d+1) + 3\varepsilon_2) - d\sin(\varphi) - 2\varepsilon_2\cos(\varphi) \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = y\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial\tau} = z,$$
$$2\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\partial z}{\partial\tau} = (\gamma - y)(d+1) - z(\varepsilon_1(d+1) + 2\varepsilon_2) - \varepsilon_2\cos(\varphi) \tag{2}$$

где, параметры ε_1, ε_2 являются параметрами инерционности фильтра, параметр γ является параметром начальной частотной расстройки системы, а параметр d являестя безразмерным параметром введенным для упрощения записи и приведения систем (1) и (2) к единым параметрам. Данные параметры вычисляются согласно уравнениям (3).

$$d = \frac{R+R_2}{R},\ \varepsilon_i = \Omega R_i C_i,\ \gamma = \frac{\omega_{ref} - \omega_{vco}}{\Omega} \tag{3}$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23001 мк и Программы повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета (соглашение №075-02-2020-1587 от 09/04/2020).

Отличительной особенность данной математической модели является возможность описания, как автоколебательной динамики нейроноподного генератора в случае $\gamma > 0$ (уравнения (1)), так и возбудимых колебаний в случае $\gamma < 0$ (уравнения (2)).

3. Аппаратная реализация нейроноподобного генератора с возбудимым и автоколебательным режимом

В рамках исследования аппаратной реализации нейроподобного генератора на основе системы ФАПЧ, описанной в работе [1], было проведено исследование областей существования различных режимов автоколебаний модели при параметре $\gamma > 0$ и проведено разбиение пространства параметров на области существования этих режимов. разбиение пространства параметров на области приведено на рисунках 1,2. Для каждой области можно сопоставить количество колебаний в пачке с кратностью предельного цикла в цилиндрическом фазовом пространстве. Результаты, полученные в экспериментальном исследовании данной модели нейроподобного генератора на основе системы ФАПЧ качественно похожи на результаты исследований в работе [2].

Далее проводилось исследование модели в возбудимом режиме при $\gamma < 0$. В возбудимом режиме модель нейроподобного генератора находится в состоянии равновесия. Для того, чтобы система покинула состояние равновесия, необходимо оказать воздействие на генератор. Данное воздействие может быть направлено на изменение устойчивости состояния равновесия, что может быть осуществлено путем изменения значений параметров ε_1, ε_2, либо на исчезновение данного состояния равновесия, что легко достигается изменением значения параметра γ в положительную сторону. Далее мы будем рассматривать именно этот способ воздействия, рассмотренный в работе [4].

Из работы [4] известно, что можно кратковременно изменять параметр γ путём подачи прямоугольного возбуждающего импульса. Следовательно, при подаче достаточно большого по амплитуде и достаточно длительного импульса можно кратковременно вывести систему из состояния равновесия и получить генерацию колебаний. Также в работе [4] было показано, что ключевую роль играет площадь подаваемого воздействия.

В рамках исследования была получена зависимость минимальной площади импульса, необходимого для возбуждения ответа в нейроподобном генераторе, от значения параметра γ, определяющего удаленность устойчивого состояния равновесия от границы автоколебательного режима. График зависимости представлен на рисунке 3. При уменьшении γ нужно подавать больший по площади импульс, для выведения системы из состояния равновесия.

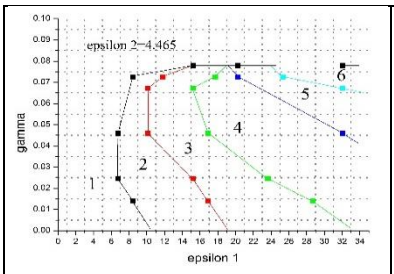


Рис. 1. Границы режимов автоколебаний системы при фиксированном параметре ε_2

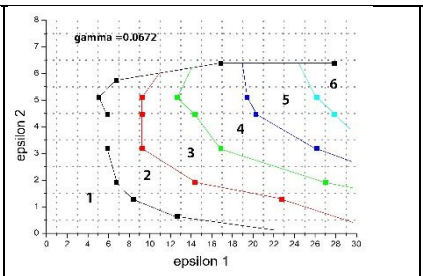


Рис. 2. Границы режимов автоколебаний системы при фиксированном γ

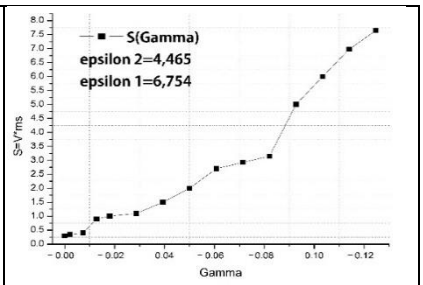


Рис. 3. Зависимость порогового значения площади импульса от параметра γ

Литература

1. Большаков Д.И., Мищенко М.А., Матросов В.В. //Труды XXIII Научной конференции по радиофизике. ННГУ, 2019. С.214-217.
2. Мищенко М.А., Шалфеев В.Д., Матросов В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2012. Т. 20, № 4, С. 122–130.

3. Мищенко М.А., Большаков Д.И., Матросов В.В.//Письма в ЖТФ, 2017. Т. 43, вып. 13. С. 10-18.
4. Мищенко М.А., Жукова Н.С., Матросов В.В.//Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, 2018. Т. 26, вып. 5, С. 6–19.

МОДИФИКАЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ В ОТКРЫТЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ[1*]

М.А. Боронина, В.А. Вшивков, И.Г. Черных

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Работа посвящена численному моделированию взаимодействия плазмы и магнитного поля в открытой линейной ловушке с образованием диамагнитного «пузыря». Особенностью задачи является большие характерные времена протекающих процессов. Параллельный алгоритм на основе метода частиц-в-ячейках позволил проводить расчёты начальных этапов взаимодействия за несколько суток на суперЭВМ. Требования к времени работы алгоритма вынуждают создать модификацию алгоритма для обработки частиц с целью его ускорения. Представлены результаты исследования работы алгоритма при динамической балансировке загрузки с применением векторизации.

Ключевые слова: физика плазмы, численное моделирование, метод частиц-в-ячейках, параллельные алгоритмы, смешанная декомпозиция, векторизация.

1. Введение

Новая идея удержания плазмы в линейной магнитной ловушке предполагает вытеснение магнитного поля ловушки частицами, инжектируемыми в ее центр, с образованием «диамагнитного пузыря» [1], при этом большая часть ионов двигается вдоль линий магнитного поля и не пересекает границу «пузыря».

В предположении аксиальной симметрии для моделирования цилиндрической ловушки используется цилиндрическая система координат и прямоугольная расчетная область в ней размерами [R_{max} x L_{max}]. Магнитное поле ловушки определяется двумя пробками на ее концах, в центре ловушки $H(0, L_{max}/2) = H_0$, пробочное отношение равно $R_m = H(0,0)/H(0\ L_{max}/2) = 2$. В начальный момент ловушка заполнена фоновой водородной плазмой плотности n_0, в точке $(0, L_{max}/2)$ начинается инжекция ионов. В модели выполнено условие квазинейтральности плазмы. С целью снижения требований к ресурсам ЭВМ применяется гибридная модель: ионы описываются как частицы, их траектории описываются характеристиками уравнения Власова, а электроны представляют собой сплошную среду и описываются уравнениями магнитной гидродинамики в приближении безмассовых электронов [2].

Для решения задачи используется метод частиц-в-ячейках, где модельные частицы с координатами, скоростями и зарядами, определёнными на лагранжевой сетке, представляют собой набор реальных частиц [3]. Остальные величины определены на сдвинутых на полшага эйлеровых сетках [4]. Более высокая точность результатов метода частиц достигается измельчением сетки и повышением количества частиц в ячейке сетки [5]. Постоянная инжекция приводит к увеличению общего числа частиц и ресурсов на их обработку. При этом, характерные времена формирования стационарной конфигурации «диамагнитного пузыря» достигают 10^4 обратных ионных циклотронных частот, и при временном шаге, например, 10^{-4} вычисления потребуют сотни суток. При этом трудности распараллеливания метода частиц-в-ячейках связаны с перемещениями частиц между ячейками сетки, а также с переходом от сетки к частице (расчет силы, действующей на ион) и обратно (расчет плотности заряда и средних скоростей ионов). Параллельный алгоритм, основанный на смешанной декомпозиции (по области и по частицам) позволил уменьшить времена расчётов в десятки раз по сравнению с однопроцессорной версией программы. Однако, в условиях ограниченного числа доступных процессоров появляется

[1*] Концепция гибридной модели создана в рамках гос. задания ИВМиМГ СО РАН (проект 0315–2019–0009). Исследование используемых алгоритмов проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-29-21025 мк.

необходимость в модификации применяемых алгоритмов с целью повышения их эффективности и использовании имеющихся процессоров в более интенсивном режиме. В работе представлена новая модификация ранее предложенного алгоритма [***] для возможности использования векторизации отдельных блоков вычислений.

2. Модификация алгоритма

Параллельный алгоритм основан на разделении вдоль оси ловушки расчетной области на подобласти, за каждую подобласть отвечает группа логических процессоров (Рис. 1)[6]. Внутри группы каждый процессор обрабатывает частицы этой подобласти, принимая для них необходимые сеточные данные, обеспечивая обмен данными для частиц при их вылете из их подобласти, и посылая результат в виде двумерных массивов главным процессорам группы. Вычисления на сетке и обмены границами подобластей производятся главными процессорами групп.

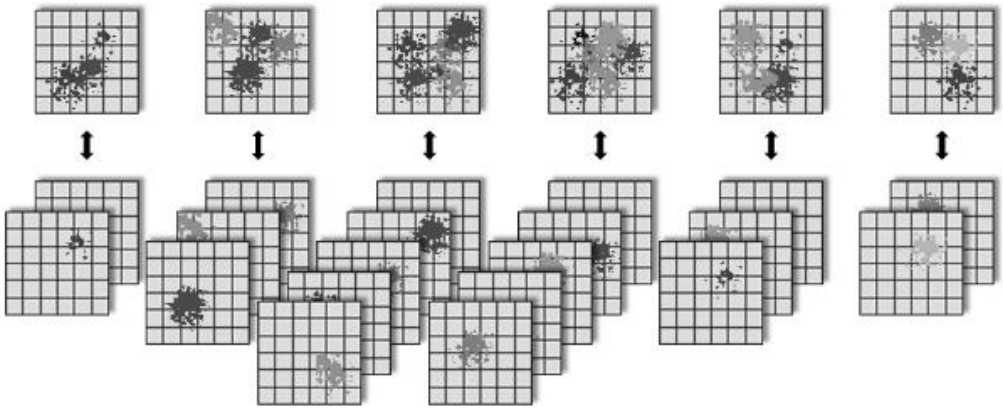


Рис. 1. Декомпозиция по области и по частицам

Распределение частиц в области непостоянно, поэтому большее число процессоров в группах для подобластей с более высокой плотностью частиц обеспечивает наилучшую загрузку процессоров. В статической конфигурации в центральных группах процессоров больше, т.к. на начальном этапе инжекция приводит к наибольшей плотности в подобласти с точкой инжекции (0, $L_{max}/2$). Однако, динамика частиц приводит к увеличению продольного размера «диамагнитного пузыря» и нелинейным изменениям плотности частиц в области, и статическое некогда оптимальное распределение процессоров по группам оказывается неэффективным в другие моменты времени. Модификация алгоритма включает в себя динамическое распределение процессоров по группам на основе среднего количества частиц в процессоре группы. Для построения оптимальной конфигурации из неглавных процессоров по одному процессору добавляется в группу с наибольшим средним числом частиц в процессоре этой группы и снова рассчитывается новое среднее количество частиц в процессоре. После завершения цикла группы с наименьшим средним числом частиц равномерно распределяют свои частицы, освобождая «лишние» процессоры. Процессоры группы, получившие «дополнительные» процессоры, отправляют им излишки своих частиц. По сравнению со временами расчетов время работы перебалансировки пренебрежимо мало.

С целью проведения высокоэффективных вычислений применяется векторизация, т.е. подход, при котором к нескольким данным применяется одна инструкция. Автоматическая векторизация циклов на эйлеровом этапе не дает существенного прироста в скорости вычислений, т.к. этот этап занимает малую часть общего времени счета. При высокоточных расчетах методом частиц-в-ячейках вычисление скоростей и координат частиц, плотностей заряда и тока занимает 80-99% времени [7], 30-40% которых составляет расчет плотностей. Вычисление скорости иона с номером j по силе Лоренца требует определения ближайших к частица узлов сетки (i,k), (i,k+1), (i+1,k), (i+1,k+1) и интерполяции местоположение частицы значений электрического и магнитного полей в этих узлах. Косвенная индексация и, как следствие, большие

накладные расходы приводят к медленной работе векторизованного цикла. Обратный переход от частиц к сетке стандартно реализуется как определение вкладов плотности заряда по частице в ближайшие к ней узлы сетки. Соответствующий цикл по частицам не может быть реализован из-за возникающей зависимости по данным: две частицы могут дать вклад в один и тот же узел i,k. Реализация обоих переходов с учетом векторизации требует использования специальных алгоритмов [8,9]. На данном этапе работы мы сфокусировались на векторизации цикла расчета плотности зарядов и плотностей токов. Метод, предложенный в [10] не требует сортировки и основан на вычислении вкладов значений в ячейки в вершины m ячейки icell, частица может давать вклад лишь в одну ячейку, поэтому зависимость по данным исключена и цикл по вершинам m=1..4 автоматически векторизуется компилятором. Обработка массива частиц блоками определенной длины, при которой данные помещаются в кэш, а также выравнивание данных необходимым для высокой скорости расчетов. Неизбежный пересчет по значениям в вершинах ячеек значений в узлах сетки не векторизуется, однако, вычисления на сетке не занимают длительное время по сравнению с обработкой частиц. Вычисление компонент средней скорости ионов происходит по тому же алгоритму и с учетом сдвига соответствующей сетки и вклада частицы в каждую вершину и реализуется в тех же циклах.

3. Результаты

В численных экспериментах величина H_0=2кГ, $n_0=10^{12}$см$^{-3}$. Единица времени $t_0 = 1/\omega_{ci} = 5.2\cdot10^{-8}$с, где ω_{ci} – ионная циклотронная частота. Длина измеряется в единицах $L_0 = c/\omega_{pi} = 22.8$см, где $\omega_{pi}=1.3\cdot10^{10}$с$^{-1}$ – ионная плазменная частота. Область имеет размеры Rmax = 4, Zmax = 12. Средняя скорость инжектируемых частиц $0.5V_A$, $V_A=4.4\cdot10^8$с – альфвеновская скорость.

На рис. 2 представлен модуль магнитного поля при t=7. Вблизи точки инжекции (0,6) образуется область малого магнитного поля с увеличивающимся со временем размером. При этом фоновые ионы также вытесняются входящим пучком. Наибольшее количество частиц находится в граничном слое «диамагнитного пузыря».

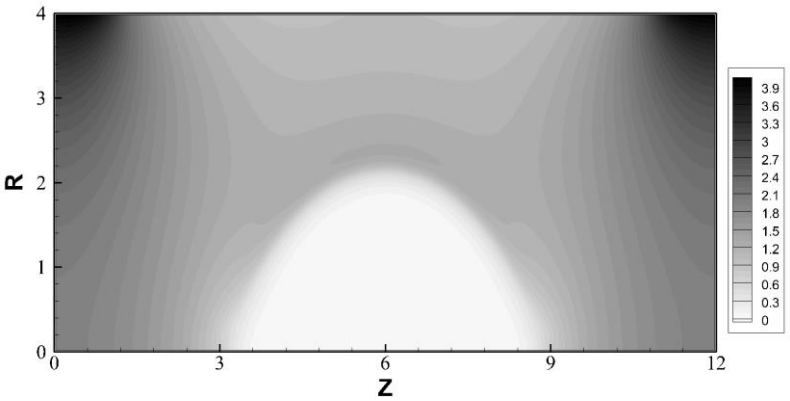


Рис. 2. Модуль магнитного поля

Вычисления проведены на сетке 100x300, с $7\cdot10^6$ временными шагами для достижения момента t=7, количеством фоновых ионов $2.7\cdot10^5$ (что соответствует 9 ионам в ячейке сетки в начальный момент). В единицу времени вводилось 10^6 частиц пучка, к моменту t=7 полное число частиц составило $7.27\cdot10^6$.

Для проведения вычислений использовались процессоры Intel Xeon Phi 7290 (Knights Landing (KNL), 1.5GHz), Intel Xeon E5-2697 v4 (Broadwell (BDW), 2.6 GHz) и Intel Xeon Platinum 8268 (Cascade Lake (CSL), 2.9 GHz).

Программа была написана на языке Fortran с применением MPI, компиляция производилась с помощью компилятора Intel, 17.0.4, ключ для векторизации использовался axCORE-avx2. Каждый логический процессор представляет собой одно ядро процессора, количество ядер np=64 было распределено между Ngr=30 группами. При статическом распределении процессоров по группе в центральных 2 группах с номерами g=15 и g=15 было наибольшее число процессоров и равнялось 8, оно равно было 5 для g=13, g=16, 4 для g=12, g=17, 3 для g=11, g=18, 2 для g=10, g=19 и 1 для всех остальных групп. Для динамического случая в момент t=5 в цен-

тральных группах находилось по 18 процессоров, т.к. именно там сосредоточено было подавляющее большинство частиц. В момент t=30 в центральных шести группах было уже по 12 процессоров, по 5 в соседних и по 3 среди их соседних групп, что соответствует распределению частиц в области. Общее время программы определяется максимальным числом частиц в процессоре, поэтому перераспределение частиц в группах при динамической балансировке позволило сократить времена расчета на ~30-40%. Так, для момента t=3 время расчетов составило 25 часов в статическом случае и 15 часов в динамическом.

В таблице 1 представлены времена расчета различными процессорами отрезка времени $T_{0.1}$ (времени работы алгоритма на промежутке $10^5\tau=0.1$) с началом в момент t=2.9, времена измерены в 10^3с. Три группы пар столбцов отвечают различным процессорам: первая соответствует процессорам с архитектурой (KNL), вторая – (BDW), третья – (CSL), первый столбец относится к расчетам плотности заряда и плотности тока частиц, второй – к полному расчету.

Таблица 1. Время работы версий кода с использованием различных процессоров, 10^3с

	KNL		**BDW**		**CSL**	
	расчет плотности	весь алгоритм	расчет плотности	весь алгоритм	расчет плотности	весь алгоритм
стандартный	1.23	4.42	0.26	1,80	0.33	1.08
векторизация	0.43	3.66	0.11	1,71	0.18	0.95
динамическая балансировка	0.82	3.32	0.17	1.34	0.22	0.82
векторизация и динамическая балансировка	0.29	2.74	0.07	1.28	0.12	0.73

Процессоры CSL позволяют проводить расчеты быстрее всего, примерно в 3 раза быстрее, чем KNL и 1.5-2 раза, чем BDW. При этом наиболее быстро рассчитываются плотности процессорами BDW. Векторизация наиболее эффективна на процессорах KNL, разница во временах расчета между векторизованным и невекторизованным алгоритмом без балансировки составляет ~3 раза на KNL, ~2.3 на BDW. ~1.8 на CSL. Совокупное использование векторизации и балансировки привело к ускорению расчетов плотностей в ~4.4 раза на KNL, ~3.7 на BDW и ~2.7 на CSL.

Эффективность векторизации процессорами CSL наиболее низкая, однако, время расчетов на них наименьшее за счет высокой тактовой частоты. Процессоры KNL лучше векторизуют, но малая тактовая частота не позволяет проводить расчеты так же быстро. Однако, для трехмерного случая и, соответственно, 8 вершин ускорение ожидается больше.

Расчеты проводились на кластере НКС-1П ССКЦ (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск).

4. Заключение

Разработан параллельный алгоритм для моделирования формирования «диамагнитного пузыря» в открытой магнитной ловушке. Основу алгоритма составляет метод частиц с применением смешанной декомпозиции для распараллеливания, при этом эффективность алгоритма зависит от архитектуры процессоров. Ускорение при использовании векторизации наиболее на процессорах KNL, однако быстрее всего весь расчет проходит на процессорах CSL. Использование динамической балансировкой загрузки процессоров и векторизацией позволило сократить времена расчета в 3-4 раза. Увеличение числа процессоров приведет к большей эффективности алгоритма за счет лучшей балансировки.

Литература

1. Beklemishev A.D. Diamagnetic "bubble" equilibria in linear traps // Physics of Plasmas, 2016, V. 23, 082506.

2. Vshivkova L.V., Dudnikova G.I. Hybrid Model of Particle Acceleration on a Shock Wave Front // Numerical Analysis and Its Applications: 6th International Conference, NAA 2016, Revised Selected Papers, Lecture Notes in Computer Science 10187, 2017. P. 737-743.
3. Hockney R. W., Eastwood J. W. Computer Simulation Using Particles, Bristol, Adam-Hilger, 1988.
4. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics via computer simulation (McGraw-Hill), 1985.
5. Lotov K.V., Timofeev I.V., Mesyats E.A., Snytnikov A.V., Vshivkov V.A. Note on quantitatively correct simulations of the kinetic beam-plasma instability // Physics of Plasmas, V. 22, 024502, 2015.
6. Kireev S. A Parallel 3D Code for Simulation of Self-gravitating Gas-Dust Systems // Parallel Computing Technologies, V. 5698, 2009. P. 406-413.
7. Boronina M. A., Chernykh I. G., Genrikh E. A., Vshivkov V. A. Parallel Realization of the Hybrid Model Code for Numerical Simulation of Plasma Dynamics // Journal of Physics: Conference Series, V. 1336, 012017, 2019.
8. Horowitz E. J. Vectorizing the interpolation routines of particle-in-cell codes // Journal of Computational Physics, V. 68, 1987. P. 56-65.
9. Nishiguchi A., Orii S., Yabe T. Vector calculation of particle code // Journal of Computational Physics. V.61, I.3, 1985. P. 519-522.
10. Vincenti H., Lobet M., Lehe R., Sasanka R., Vay J.-L. An efficient and portable SIMD algorithm for charge/current deposition in Particle-In-Cell codes // Computer Physics Communications, V. 210, 2017. P. 145-154.

ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА НА ПАРАМЕТРЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ИЗГИБНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В БАЛКЕ[1*]

Бриккель Д.М.[1], Ерофеев В.И.[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород

Рассмотрена задача о формировании интенсивных изгибных волн стационарного профиля в рамках геометрически нелинейной модели поврежденной балки. Определены новые зависимости параметров волн (амплитуда, ширина, длина волны) с учетом их геометрической нелинейности от параметров поврежденности материала.

Ключевые слова: изгибная волна, параметр поврежденности материала, геометрическая нелинейность.

1. Введение

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматривают отдельно от задач накопления повреждений. При разработке таких методов принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности [1].Основным достоинством такого подхода является простота, однако он обладает целым рядом недостатков, как и любой подход, не опирающийся на математические модели процессов и систем.

Авторы работ [2–4] считают задачу самосогласованной, включающей в себя, кроме уравнения развития поврежденности, динамическое уравнение теории упругости. Такой подход позволил рассмотреть ряд прикладных задач волновой динамики поврежденных материалов и элементов конструкций [5–11].

В данной работе в линейной и нелинейной постановках сформулирована математическая модель, описывающая распространение поперечных волн в балке с учетом поврежденности ее материала.

Рассматривается элемент, представленный в виде балки и совершающий поперечные (изгибные) колебания. Считая, что центральная ось балки остается нерастяжимой, дополнительно учитываем её геометрическую нелинейность работы (т.е. нелинейную связь деформации и перемещения). Считаем, что в материале балки могла накопиться поврежденность вследствие воздействия на неё статических и циклических нагрузок. Для описания меры поврежденности введем функцию Качанова – Работнова $\Psi(x,t)$, значения которой равны нулю, когда повреждения отсутствуют, и близко к единице в момент разрушения материала [12, 13].

2. Математическая модель

Обозначим перемещение частиц центральной оси элемента при изгибе через функцию $W(x,t)$. С учетом накопления повреждений в материале балки, динамика элемента описывается системой уравнений:

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант № 19-38-90282).

.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+c_s^2 r_y^2\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\frac{c_s^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^3\right]=\beta_1\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\alpha\Psi=\beta_2 E\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (1)$$

где $c_s=\sqrt{\frac{E}{\rho}}, r_y=\sqrt{\frac{J_y}{F}}$, где E – Модуль Юнга, ρ – плотность материала, J_y – осевой момент инерции, F – площадь поперечного сечения балки, α, β_1, β_2 – константы, характеризующие поврежденность материала (среди которых $\alpha=\frac{1}{T}$, где T – время релаксации [6], физический смысл других коэффициентов не столь очевиден; $\beta_1\cdot\beta_2<0$).

Решая систему (1), получим общее уравнение относительно поперечного перемещения W, и запишем его в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-\frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+c_s^2 r_y^2\cdot\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}+\frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha}\cdot\frac{\partial^5 W}{\partial x^4\partial t}-$$
$$-\frac{c_s^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^3\right]-\frac{c_s^2}{2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^3\right]=0. \qquad (2)$$

Введем безразмерные переменные $U=\frac{W}{W_0}; z=\frac{x}{r_y}; \tau=\frac{c_s}{r_y}$ и запишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+a_1\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+a_2\frac{\partial^3 U}{\partial\tau^3}+\frac{\partial^4 U}{\partial z^4}+a_2\frac{\partial^5 U}{\partial z^4\partial\tau}-$$
$$-\frac{a_3}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^3\right]-\frac{a_2 a_3}{2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^3\right]=0, \qquad (3)$$

где $a_1=\frac{-\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_s^2}, a_2=\frac{c_s}{r_y\alpha}, a_3=\frac{W_0^2}{r_y^2}$.

3. Анализ волновых процессов

Решение (3) запишем в виде уравнения, определяющего профиль стационарной волны:

$$U=U(\xi), \qquad (4)$$

где $\xi=z-V\tau$ – «бегущая» координата, $V=const$ – скорость волны.

При подстановке (4) в (3), исходя из условий, что $T\to 0$ (при малых значениях времени релаксации), т.е. $\alpha\to\infty$, решение последнего сведётся к уравнению движения для осциллятора Дуффинга [14]:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2}+m_1\theta+m_2\theta^3=0. \qquad (5)$$

Здесь $\theta=\frac{dW}{d\xi}$ – угол поворота поперечного сечения балки; $m_1=a_1+V^2; m_2=\frac{-a_3}{2}$.

Знаки коэффициентов m_1 и m_2 характеризуют возможность существования нелинейных стационарных изгибных волн. Первый коэффициент всегда положителен ($m_1>0$), а второй – всегда отрицателен ($m_2<0$).

Если исследовать фазовую плоскость уравнения (5) $\left(\theta, \frac{d\theta}{d\xi}\right)$, в таком случае точка с координатами (0,0) характеризуется устойчивым положением равновесия «центр» и коэффициенты m_1, m_2 - чисто мнимые числа, а точки $\left(\pm\sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}, 0\right)$ с собственными значениями действительных чисел разного знака характеризуются неустойчивым положением равновесия «седло» (рис.1).

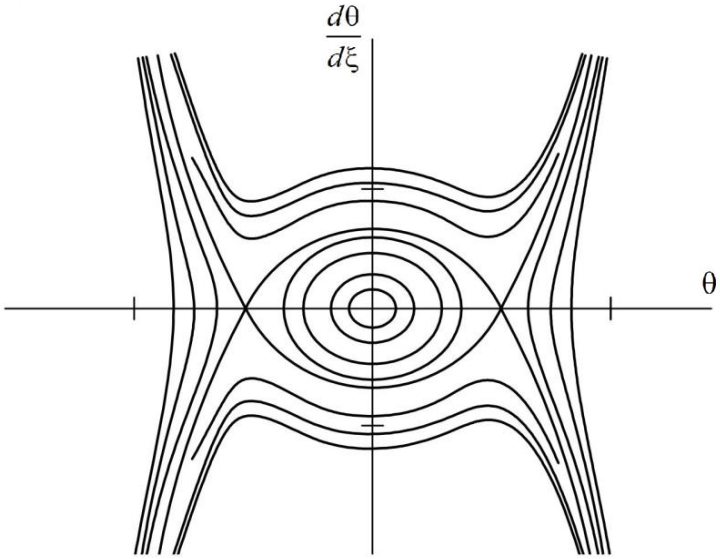


Рис. 1. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора

По фазовой плоскости нелинейного осциллятора можно судить о существовании в данной системе как периодических (движения по сепаратрисе вокруг устойчивого положения равновесия), так и уединённых стационарных волн (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом (синусоидальное колебание) [14], форма которого близка к меандру (рис.2)

$$\theta = Asn(k\xi, S). \qquad (6)$$

где A – амплитуда волны; $k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2A^2}{2}}$ – волновое число; $S^2 = \frac{m_2A^2}{2m_1 + m_2A^2}$ – квадрат модуля эллиптической функции, изменяющийся в интервале $0 \le S^2 \le 1$.

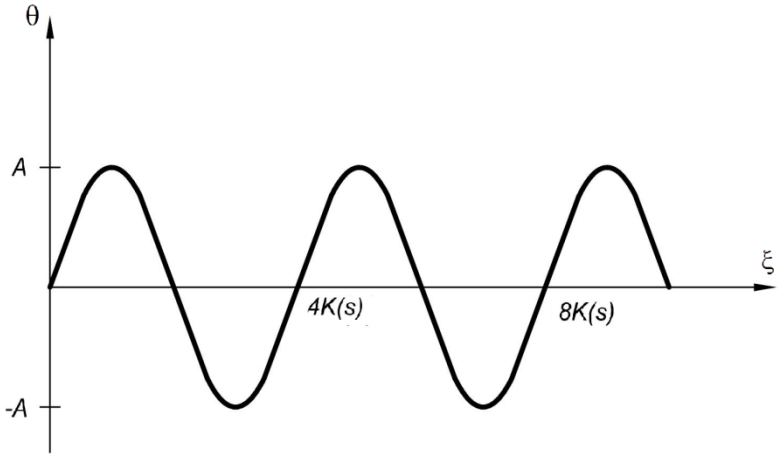


Рис. 2. График профиля нелинейной периодической стационарной волны

Выразим амплитуду волны A и волновое число k через параметры исходной задачи:

$$A=\sqrt{\frac{4\left(\frac{-\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_s^2}+V^2\right)r_y^2\cdot S^2}{S_0^2\left(1+S^2\right)}},\quad (7)$$

$$k=\sqrt{\frac{\left(\frac{-\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_s^2}+V^2\right)}{\left(1+S^2\right)}}.\quad (8)$$

Уединённая стационарная волна имеет форму перепада (кинка) (рис.3) и описывается гиперболическим тангенсом

$$\theta(\xi)=A^{(c)}th\left(\frac{\xi}{\Delta}\right),\qquad (9)$$

Здесь

$$\Delta=\sqrt{\frac{2}{\left(-\frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_s^2}+V^2\right)}}\quad (10)$$

– ширина волны,

$$A^{(c)}=\pm\sqrt{\frac{2\left(-\frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_s^2}+V^2\right)r_y^2}{W_0^2}}\quad (11)$$

– её амплитуда.

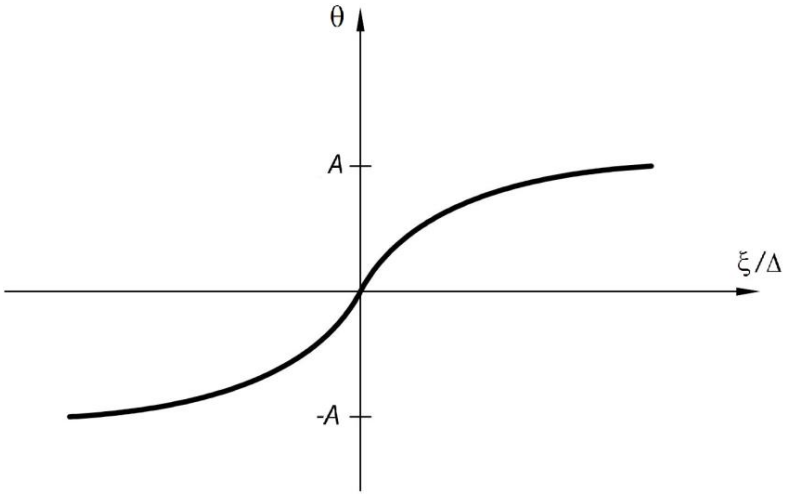


Рис. 3. График профиля нелинейной уединённой стационарной волны

Уравнения (7) и (10) показывают рост A и $A^{(c)}$ периодической и уединенной волны соответственно при увеличении параметра поврежденности материала. Однако можно заметить, что длина периодической волны $\Lambda \sim 1/k$ (см. (8)) и ширина уединенной волны Δ (см. (11)) уменьшаются с ростом параметра поврежденности материала.

Примечательно, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу является величиной постоянной

$$\frac{A}{k} = \frac{2r_y S}{W_0} = const, \qquad (12)$$

определяемой только радиусом инерции поперечного сечения балки.

Заметим, что произведение амплитуды волны на её ширину тоже является постоянной величиной

$$A^{(c)}\Delta = \frac{2r_y}{W_0} = const. \qquad (13)$$

Выражения (12) и (13) тождественны при S=1, поскольку при этом значении график эллиптического синуса переходит в гиперболический тангенс. Для балки кругового поперечного сечения осевой радиус инерции равен половине радиуса. Уравнение (13) в этом случае может быть выражено в виде $2A^{(c)}\Delta = \frac{d}{W_0}$, где d – диаметр балки.

4. Выводы

Развиваемый подход позволяет сформулировать и решить самосогласованную задачу, характеризуемую совместным решением уравнения динамики балки и кинетического уравнения поврежденности ее материала. При экспериментальном определении характеристик поврежденности материала, данная работа может найти применение при разработке методик акустического контроля длительно эксплуатируемых элементов конструкций.

Литература

1. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / отв.ред. академик РАН Ф.М. Митенков. – М.: Наука, 2009. – 280 с.
2. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. – 2010. – Т.56, № 4. – С. 554-557.
3. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 4. – С. 60-62.
4. Erofeev V., Nikitina E., Sharabanova A. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum // Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics, Maugin, Gerard A., Metrikine, Andrei V. (Eds.), Springer, Heidelberg. – 2010. – Vol. 21. – P. 143-148.
5. Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Смирнов С.И. Акустоупругость поврежденных материалов // Контроль. Диагностика. – 2012. – № 3. – С. 24-26.
6. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Series: Advances Structured Materials, Altenbach, Holm, Forest, Samuel (Eds.), Springer, Switzerland. – 2016. – Vol. 42. – P. 413-423.
7. Dar'enkov A., Plekhov A., Erofeev V. Effect of material damage on parameters of a torsional wave propagated in a deformed rotor // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 150. – P. 86-90.
8. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2016. – № 6. – С.14-18.
9. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. Влияние поврежденности материала на распространение продольной магнитоупругой волны в стержне // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т.11, № 4. – С.397-408.

10. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Влияние поврежденности материала на распространение волны Релея вдоль границы полупространства // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т.12, № 3. – С.293-300.
11. Brikkel D., Erofeev V., Nikitina E. Influence of material damage on the parameters of a nonlinear longitudinal wave which spread in a rod // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 747. – Article ID: 012053. – 5 pages.
12. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311с.
13. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
14. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400с.

ОБОБЩЁННЫЙ $\mathcal{H}_2$-КОНСЕНСУС В МНОГОАГЕНТНОЙ СИСТЕМЕ С НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕИДЕНТИЧНОЙ ДИНАМИКОЙ[1*]

Е.С. Бубнова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача достижения обобщённого $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-консенсуса в сети линейных неидентичных агентов с непрерывным временем и постоянной топологией связей. Сформулированы достаточные условия достижения обобщённого $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-консенсуса в терминах LMI.

Ключевые слова: многоагентная система, консенсус, обобщённая $\boldsymbol{\mathcal{H}_2}$-норма.

1. Введение

Задачам достижения консенсуса в многоагентных системах посвящено достаточно большое количество работ. В случае, когда агенты испытывают воздействие неопределённых внешних возмущений, одним из подходов исследования является теория $\mathcal{H}_\infty$-управления [1], которая позволяет оценить «средние значения» невязки целевого выхода. Однако часто на практике возникает необходимость оценки максимально возможных значений целевых выходов. В этом случае естественным подходом является использование обобщённой $\mathcal{H}_2$-нормы [2]. В настоящей работе получены достаточные условия достижения обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса.

2. Обобщённый $\mathcal{H}_2$-консенсус

Рассмотрим многоагентную систему, в которой динамика каждого агента описывается линейной системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_{1,i} u_i + B_{2,i} w_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ y_i &= C_{y,i} x_i, \qquad z_i = C_{z,i} x_i, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ – состояние i-го агента, $y_i \in \mathbb{R}^p$ – измеряемый выход, $z_i \in \mathbb{R}^q$ – целевой выход, $u_i \in \mathbb{R}^{m_{1,i}}$ – управление, $w_i \in \mathbb{R}^{m_{2,i}}$ – внешнее возмущение, ограниченное по $L_2[0,+\infty)$-норме. $A_i, B_{1,i}, B_{2,i}, C_{y,i}, C_{z,i}$ – стационарные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что пары $(A_i, B_{1,i})$ стабилизируемы, а матрицы $B_{1,i}$ имеют полный столбцовый ранг. Топология сети описывается связным неориентированным графом с матрицей Лапласа $L = [l_{ij}]$ и матрицей смежности $\mathcal{A} = [a_{ij}]$.

Рассмотрим задачу достижения консенсуса по целевым выходам z_i, $i = 1, \dots, N$, в многоагентной системе (1). Консенсус в сети (1) означает, что выходы z_i агентов должны сойтись к общему значению либо к общей заданной траектории

$$\lim_{t\to\infty} |z_i(t) - z_l(t)| = 0 \qquad \forall i, l = 1, \dots, N. \tag{2}$$

Условие достижения консенсуса (2) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\lim_{t\to\infty} |\tilde{z}_i(t)| = 0, \qquad \tilde{z}_i = z_i - \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} z_l, \qquad \forall i = 1, \dots, N, \tag{3}$$

где вспомогательный выход $\tilde{z}_i$ есть отклонение соответствующего целевого выхода от среднего значения.

В данной системе на каждый агент действует некоторое, в общем случае неизвестное, внешнее возмущение, поэтому будем рассматривать задачу гарантированного достижения

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

консенсуса в сети. В качестве критерия достижения консенсуса выберем следующий функционал

$$J(u_1,\dots,u_N)=\sup_{\{w_i\}\neq 0}\frac{\max\limits_i\sup\limits_{t\geq 0}|\tilde{z}_i(t)|_2}{\sqrt{\|w_1\|_2^2+\dots+\|w_N\|_2^2}}. \tag{4}$$

Консенсус с минимальным значением критерия (4) будем называть обобщённым $\mathcal{H}_2$-консенсусом, поскольку функционал (4) есть обобщённая $\mathcal{H}_2$-норма расширенной системы.

Обратимся теперь к синтезу распределённого протокола управления по усреднённым значениям выходов соседних агентов. Введём в рассмотрение динамический регулятор вида

$$\dot{v}_i=A_{c,i}v_i+B_{c,i}\overline{y},\quad u_i=C_{c,i}v_i+D_{c,i}\overline{y},\quad \overline{y}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(y_i-y_j), \tag{5}$$

где $v_i\in\mathbb{R}^{m_{c,i}}$ – состояние i-го регулятора. Определим следующие матрицы: $A=diag(F_{0,i})$, $B_u=diag(E_i)$, $B_w=diag(B_{w,i})$, $C_y=diag(F_{y,i})$,

$$C_z=\left(\frac{1}{N}L\otimes I_q\right)diag(C_{z,i}),\ F_{0,i}=\begin{bmatrix}A_i & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E_i=\begin{bmatrix}0 & B_{1,i}\\ I & 0\end{bmatrix},$$

$$B_{w,i}=\begin{bmatrix}B_{2,i}\\ 0\end{bmatrix},\ F_{y,i}=\begin{bmatrix}0 & I\\ C_{y,i} & 0\end{bmatrix},\ F_{y,i}=\begin{bmatrix}0 & I\\ C_{y,i} & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{L}=\begin{bmatrix}I_{m_{c,1}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & l_{11}I_p & 0 & l_{12}I_p & \cdots & 0 & l_{1N}I_p\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{m_{c,N}} & 0\\ 0 & l_{N1}I_p & 0 & l_{N2}I_p & \cdots & 0 & l_{NN}I_p\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Построим блочно-диагональную матрицу $V=diag(V_1,\dots,V_N)$ в которой матрицы V_i, $i=1\dots,N$, удовлетворяют условию

$$V_iE_i=\begin{bmatrix}I_{m_{1,i}+m_{c,i}}\\ 0_{(m_i-m_{1,i})\times(m_{1,i}+m_{c,i})}\end{bmatrix}$$

и положим $\overline{A}=VA\,V^{-1}$, $\overline{B}_w=VB_w$, $\overline{C}_y=C_yV^{-1}$, $\overline{C}_z=C_zV^{-1}$.

Теорема 1. Предположим, что матрицы $X=X^T\succ 0$ и Q, удовлетворяющие условиям

$$X=diag(X_i),\quad Q=diag(Q_i),\quad X_i=\begin{bmatrix}X_i^1 & 0\\ 0 & X_i^2\end{bmatrix},\quad Q_i=\begin{bmatrix}Q_i^1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$X_i^1\in\mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{c,i})\times(m_{1,i}+m_{c,i})},\qquad X_i^2\in\mathbb{R}^{(m_i-m_{1,i})\times(m_i-m_{1,i})},$$

$$Q_i\in\mathbb{R}^{(m_i+m_{c,i})\times(p+m_{c,i})},\qquad Q_i^1\in\mathbb{R}^{(m_{1,i}+m_{c,i})\times(p+m_{c,i})},$$

являются решениями задачи полуопределённого программирования

$$\inf\gamma^2$$

$$\begin{bmatrix}X\overline{A}+Q\tilde{L}\overline{C}_y+(X\overline{A}+Q\tilde{L}\overline{C}_y)^T & X\overline{B}_w\\ \overline{B}_w^TX & -I\end{bmatrix}\prec 0,\ \begin{bmatrix}X & \overline{C}_z^T\\ \overline{C}_z & \gamma^2I\end{bmatrix}\succcurlyeq 0. \tag{7}$$

Тогда существует динамический протокол вида (5) с параметрами

$$\begin{bmatrix}A_{c,i} & B_{c,i}\\ C_{c,i} & D_{c,i}\end{bmatrix}=(X_i^1)^{-1}Q_i^1,\qquad i=1,\dots,N, \tag{8}$$

обеспечивающий в сети (1) достижение обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса.

3. Заключение

В работе сформулированы достаточные условия решения задачи достижения обобщённого $\mathcal{H}_2$-консенсуса в сети неидентичных непрерывных линейных агентов с постоянной топологией связей.

Литература

1. Gao., Tong C., Wang L. H_∞ Dynamic Output Feedback Consensus Control for Discrete-Time Multi-Agent Systems with Switching Topology // Arab. J. Sci. Eng. 2014. V. 39. P. 1477–1487.

2. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты // Автоматика и телемеханика, 2017, № 8, С. 76–90.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

А.А. Бусалов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается нелинейная задача о переносе излучения в диффузионном приближении, обсуждаются условия применимости, основные преимущества и особенности данного приближения. Описывается алгоритм численного решения задачи.

.*Ключевые слова:* перенос излучения, диффузионное приближение, нелинейная система уравнений, итерационные методы.

Вопросы физического, математического и численного моделирования процессов переноса излучения обсуждаются в работах [1–5].

Одним из наиболее полных математических приближений для описания процессов переноса рентгеновского излучения является многогрупповое диффузионное приближение [1]. Уравнения диффузионного приближения представляют собой систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций: плотности и потока излучения [6]. Условием применимости диффузионного приближения является малость градиента плотности излучения, которая должна мало меняться на расстоянии пробега излучения *l*. При небольших градиентах поле излучения почти изотропно, а это условие положено в основу вывода диффузионного приближения. Если плотность излучения в некоторой области почти постоянна, то кванты проходят в данную точку со всех сторон одинаково, что приводит к изотропии поля излучения в ней. В близи же границы среды с пустотой плотность меняется сильно на расстоянии пробега и анизотропия углового распределения квантов велика – кванты преимущественно летят из тела в сторону пустоты, так как из пустоты они не поступают. Поэтому вблизи границы с пустотой диффузионное приближение может приводить к заметным ошибкам. В случае оптически толстых (плотных) тел градиенты плотности малы. И диффузионное приближение оправдано.

Диффузионное приближение, приводя в некоторых случаях к значительным ошибкам, как правило, все же не искажает качественной картины переноса излучения, даже когда распределение по углам сильно анизотропно. Это и позволяет пользоваться им для приближенного решения различных задач, в которых излучение существенно неравновесно.

В работе [7] рассмотрена нелинейная стационарная задача переноса излучения в кинетическом приближении и статистического равновесия, соответствующая модели двухуровневого атома в рамках предположения о полном перераспределении излучения по частоте.

В настоящей работе исследуется возможность применимости диффузионного приближения для данного класса задач.

Рассмотрим следующую систему уравнений переноса излучения и статистического равновесия:

$$(\omega,\nabla)\varphi(x,\nu,\omega)+h\nu_{12}\frac{\chi(\nu)}{4\pi}\left[B_{12}C_1(x)-B_{21}C_2(x)\right]\varphi(x,\nu,\omega)=h\nu_{12}\frac{\chi(\nu)}{4\pi}A_{21}C_2(x), \tag{1}$$

$$\left[C_{12}n_e(x)+B_{12}\int_I\int_\Omega\frac{\chi(\nu)}{4\pi}\varphi(x,\nu,\omega)d\nu d\omega\right]C_1(x)= \\ =\left[A_{21}+C_{21}n_e(x)+B_{21}\int_I\int_\Omega\frac{\chi(\nu)}{4\pi}\varphi(x,\nu,\omega)d\nu d\omega\right]C_2(x), \tag{2}$$

$$C_1(x)+C_2(x)=f(x) \tag{3}$$

с граничными условиями $\varphi(x,\nu,\omega)=0,\quad x\in\partial G,\quad (\omega,n(x))<0$.

Здесь $x=\{x_1,x_2,x_3\}\in G\subset R^3$, G – выпуклое открытое ограниченное множество с гладкой границей ∂G и диаметром $d>0$, $n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂G в точке $x\in\partial G$. $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}\in\Omega=\{\omega\in R^3:\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=1\}; \nu\in I=[0,\nu_0]$;
$h,\nu_{12},\nu_0,A_{21},B_{12},B_{21},C_{12},C_{21}$– заданные положительные числа, удовлетворяющие условию $B_{12}C_{21}-B_{21}C_{12}\geq 0$. Вывод уравнений и смысл коэффициентов см. в [2].

Построим диффузионное приближение, для этого решение (1) будем искать в виде разложения по сферическим функциям:

$$\varphi(x,\nu,\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\sum_{i=-k}^{k}\varphi_{k,i}(x,\nu)Y_{ki}(\mu) \tag{4}$$

При этом ограничимся двумя членами разложения $(k=0,1)$. После очевидных преобразований получим систему уравнений в диффузионном приближении (P_1-приближении).

$$div(D(x,\nu)\nabla\varphi^{(0)}(x,\nu)+\chi'\varphi^{(0)}(x,\nu)=F \tag{5}$$

где $\chi'=h\nu_{12}\chi(\nu)[B_{12}C_1(x)-B_{21}C_2(x)]$, $F=h\nu_{12}\chi(\nu)A_{21}C_2(x)$, $\varphi^{(0)}(x,\nu)=\int_{\Omega}\varphi d\omega$,

D –коэффициент диффузии. $D=[h\nu_{12}\chi(\nu)[B_{12}C_1(x)-B_{21}C_2(x)]]^{-1}$.

Уравнения статистического равновесия (2), (3) при конструировании диффузионного приближения будут иметь вид:

$$\left[C_{12}n_e(x)+B_{12}\int_I\chi(\nu)\varphi^{(0)}(x,\nu)d\nu\right]C_1(x)=$$
$$=\left[A_{21}+C_{21}n_e(x)+B_{21}\int_I\chi(\nu)\varphi^{(0)}(x,\nu)d\nu\right]C_2(x) \tag{6}$$

Таким образом, размерность построенной системы (3),(5),(6) относительно кинетического приближения уменьшается (до нескольких сотен раз) пропорционально числу направления фотонов в фазовом пространстве.

Для решения возникающей системы уравнений предлагается и обосновывается линеаризующий итерационный алгоритм решения.

Литература

1. Михалас Д. Звездные атмосферы. М.: Мир, 1982.
2. Иванов В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М.: Гостехтеоритздат, 1956.
3. Гермогенова Т.А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1966.
4. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. 1961, вып 61. С. 2-158.
5. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.:БИНОМ, 2006.
6. Белл Д., Глесстон С.Теория ядерных реакторов. М., Атомиздат,1974, 494с.
7. Калинин А.В.,Морозов С.Ф. Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, С. 1071-1080.

О СТРУКТУРЕ КРИВЫХ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ БИФУРКАЦИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМАХ, ДЕМОНСТРИРУЮЩИХ АТТРАКТОРЫ ШИЛЬНИКОВА[1*]

Т.К. Бурдыгина, А.А. Бобровский, С.М. Малых

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Настоящая работа посвящена исследованию бифуркационных кривых, отвечающих возникновению шильниковской петли седло-фокусных положений равновесия в системах Ресслера и Арнедо, Калле, Трессе.

Ключевые слова: бифуркационный анализ, аттрактор Шильникова, численный анализ.

В работе рассматриваются система Ресслера [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = bx + z(x - c) \end{cases} \quad (1)$$

и система Арнедо, Калле, Трессе [3]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y - \beta z + \mu x(1 - x) \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x, y и z – фазовые переменные, а a, c, β и μ – параметры систем.

Приведенные системы являются одними из основных простейших и известных моделей, демонстрирующих аттрактор Шильникова [4]. Напомним, что под аттракторами Шильникова понимаются такие гомоклинические аттракторы, которые содержат седло-фокусное состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием.

В частности, изучается бифуркационное множество гомоклинических петель седло-фокусного положения равновесия. Рассматриваются как однообходные (основные), так и многообходные (вторичные) гомоклинические траектории. Многообходные гомоклинические траектории располагаются между ветками однообходных.

Один из основных результатов работы – визуализация поведения динамических систем на примере систем Ресслера и Арнедо, Калле, Трессе (см. Рис. 1 и Рис. 2).

На рис 1. показаны две кривые для однообходных гомоклинических траекторий. Красная кривая для состояния равновесия (1,0,0), на основе которого образуется аттрактор, а черная – для (0,0,0). Кроме того, на ней представлены карты старшего ляпуновского показателя и карта нидингов. Черного кривая и карта старшего ляпуновского показателя в верхней части построены в прямом времени, а нижняя карта и красная кривая построены для системы в обратном времени. На карте старшего ляпуновского показателя синим цветом отмечены параметры системы, при которых старший показатель Ляпунова отрицательный (причем чем темнее синяя область, тем он меньше), а красным цветом – положительный. Серым цветом отмечены точки, при которых траектории уходят на бесконечность. Карты нидингов применяются для определения динамики неустойчивой сепаратрисы состояния равновесия системы типа седло-фокус. Нидинг – последовательности записываются в алфавите {0,1}. Далее берется точка на сепаратрисе близко к особой точке, и определятся правило, по которому записывается последовательность. Таким образом, каждая область карты соответствует определенной нидинг-последовательности.

На рис 2. изображен увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы для системы (2) в параметрах (μ,β_{new}), где β_{new} и β связаны соотношением $\beta=\beta_{new}+0.7\mu-0.22$. На диаграмме изображен фрагмент области параметров, где красная кривая попадает в область существования ат-

[1*] Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

трактора Шильникова (старший ляпуновский показатель положительный). Нижняя кривая соответствует многообходным траекториям. Кроме того, представлены фазовые портреты аттрактора с гомоклинической петлей для различных наборов параметров.

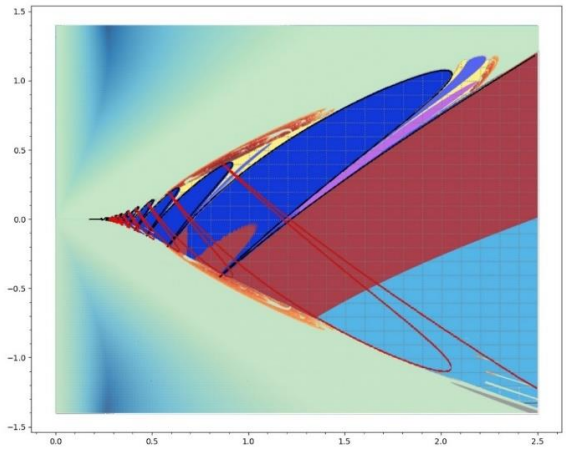


Рис 1. Бифуркационная диаграмма для системы Арнеодо, Калле, Трессе с двумя кривыми, соответствующими однообходным гомоклиническим траекториям для состояний равновесия (1,0,0) и (0,0,0).

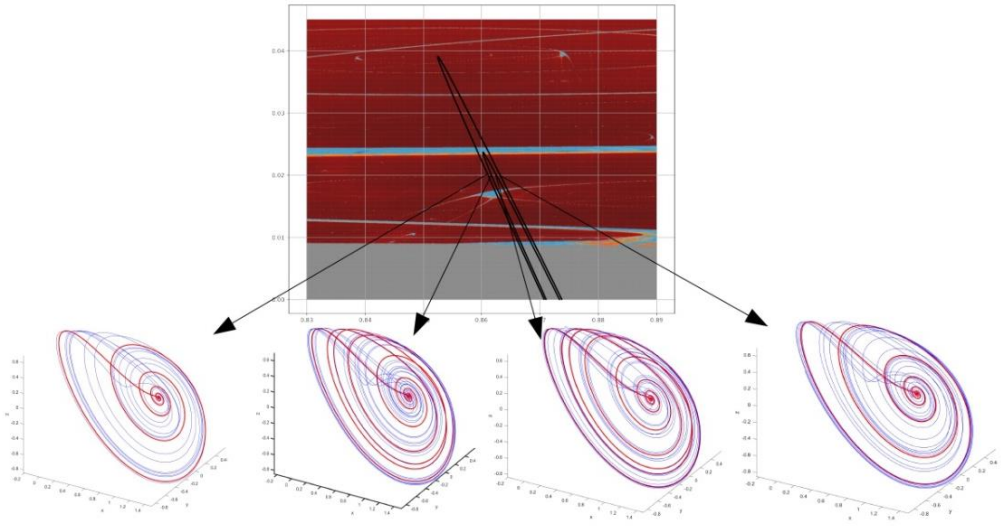


Рис 2. Фрагменты бифуркационных кривых системы Арнедо, Калле, Трессе, соответствующие различным гомоклиническим траекториям.

Литература

1. O.E. Rössler, “An equation for continuous chaos,” Physics Letters A 57, 397–398 (1976).
2. O. Rossler, “An equation for hyperchaos,” Physics Letters A 71, 155–157 (1979).
3. A. Arneodo, P. Coullet, and C. Tresser, “Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shilnikov,” Journal of Statistical Physics 27, 171–182 (1982).
4. L.P. Shilnikov, “Bifurcation theory and turbulence,” Methods of the Qualitative Theory of Differential Equations, 150–163 (1986).

РЕШЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

М.А. Быкова, С.А. Желтов, А.В. Филимонов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассмотрена проблема отображения параллельной программы на вычислительную систему с целью оптимизации времени выполнения за счет сокращения времени пересылки данных. Проблема сформулирована в виде квадратичной задачи о назначениях. Рассмотрен и реализован метод ветвей и границ для поиска глобального решения, а также приближенная версия алгоритма с сокращенной глубиной обхода дерева.

Ключевые слова: квадратичная задача о назначениях, метод ветвей и границ, генетический алгоритм.

1. Введение

Для эффективного использования такого дорогостоящего ресурса как распределенная вычислительная система необходимо решать задачи, связанные с оптимизацией времени работы программ, которые на этой системе выполняются. При этом одной из возникающих проблем является проблема отображения параллельной программы на вычислительную систему. Сформулируем её в виде квадратичной задачи о назначениях, а решение будем искать методом ветвей и границ.

2. Содержательное описание и постановка задачи

Имеется вычислительная система с несколькими узлами, и с определенной стоимостью передачи данных между ними. Есть некоторая задача, параллельный алгоритм которой будем считать уже реализованным. Её подзадачи могут коммуницировать между собой. Надо распределить их по узлам так, чтобы минимизировать стоимость пересылки данных.

Параллельную программу будем моделировать с помощью квадратной матрицы. Имеется n подзадач, матрица $\mathrm{C} = \left(\mathrm{c}_{i,j}\right)_{n*n}$, элементы которой моделируют объемы данных, передаваемых между *i-й* и *j-й* подзадачами.

Вычислительную систему будем моделировать с помощью квадратной матрицы. Имеется n вычислительных узлов, матрица $D = \left(d_{i,j}\right)_{n*n}$, элементы которой моделируют стоимость обмена данными между *i-м* и *j-м* вычислительными узлами.

Решение будем записывать в виде перестановки p длины n, которая ставит в соответствие *i-й* подзадаче $p(i)$ вычислительный узел.

Критерий минимизирует суммарные издержки на пересылку данных:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} d_{p(i),p(j)} \to min$$

Получили квадратичную задачу о назначениях [1], которая является NP-трудной в сильном смысле [2].

3. Метод ветвей и границ

Этот метод является вариацией полного перебора с отсевом подмножеств допустимых решений, заведомо не содержащих оптимума.

Метод основан на обходе дерева, в каждой вершине которого зафиксирована определенная часть допустимого решения задачи. Посещая очередную вершину, алгоритм рассчитывает верхнюю и нижнюю оценки, в границах которых находится лучшее решение для данной ветви.

Верхняя оценка является достижимой, ее будем находить случайным образом.

Нижняя оценка является недостижимой, её будем находить путем попарного произведения меньших стоимостей передачи данных на большие объемы передачи данных.

Решения квадратичной задачи о назначениях записываются в виде перестановок.

Помимо точного метода ветвей и границ рассмотрена его модификация, дающая приближенное решение. Эта модификация прекращает обход направления при достижении высоты дерева равной некоторому значению. Текущая на данном этапе верхняя оценка (находится генетическим алгоритмом) будет считаться лучшим решением по направлению.

4. Вычислительный эксперимент

Обе модификации реализованы средствами языка C++, получены следующие результаты:

Таблица 1. Результаты вычислений

№	Пример	Модификация алгоритма	Время работы, мс	Отклонение от оптимума
1	chr12a.dat	точная	6712	0 %
2	chr15a.dat	точная	523497	0 %
3	chr15b.dat	точная	289142	0 %
4	had14.dat	точная	7408277	0 %
5	had20.dat	приближенная	426968	0,77 %
6	nug25.dat	приближенная	1279765	5,88 %
7	nug20.dat	приближенная	373682	2,94 %

Эксперимент проводился на следующей машине: Intel Core i7 4700MQ @ 2.40 GHz, 8 GB, Windows 8.1.

Тестовые примеры взяты из публичной библиотеки QAPLIB [3].

Точная модификация действительно находит оптимальное решение, причем время поиска небольшое для задач размерности 12. Для больших размерностей время значительно увеличивается, для размерности больше 15 решение найти не удалось.

Приближенная версия алгоритма позволила найти близкие к оптимуму решения, причем за достаточно небольшое время и для больших размерностей, чем позволяла точная.

Литература

1. T. C. Koopmans and M. J. Beckmann, Assignment problems and the location of economic activities, Econometrica 25, 1957, 53–76.
2. Батищев, Д.И. Вычислительная сложность экстремальных задач переборного типа: Учеб. пособие [Текст] /Д.И. Батищев, Д.И. Коган. – Нижний Новгород Изд–во Нижегород. ун–та: Нижегород. гос. ун–т им. Н. И. Лобачевского, 1994. – 114с.
3. Burkard, R.E. QAPLIB – A Quadratic Assignment Problem Library [Text] /R.E. Burkard, S.E. Karisch, F. Rendl. – Journal of Global Optimization, Volume 10, Issue 4, 1997. – pp. 391–403.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ЭВОЛЮЦИОННО-ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

М.А. Быкова, Н.А. Хлопцев, С.В. Небайкин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе был изучен и применен эволюционно-генетический алгоритм для квадратичной задачи о назначениях с различными комбинациями кодировок и операторов. Были найдены оптимальные решения и близкие к оптимальным для известных тестовых примеров.

Ключевые слова: эволюционно-генетический алгоритм, квадратичная задача о назначениях, бинарное кодирование.

1. Введение

Квадратичная задача о назначениях является одной из фундаментальных комбинаторных задач. Она нашла множество применений в различных областях в сферах технологии, экономики и логистики. Так как квадратичная задача о назначениях является NP-трудной [1], имеет смысл использовать эвристические алгоритмы. В работе был изучен и применен эволюционно-генетический алгоритм для квадратичной задачи о назначениях с различными комбинациями кодирования и операторов.

2. Математическая постановка задачи

Даны 2 множества одинакового размера n и матрицы размера $n \times n$: $W = (w_{ij})$ и $D = (d_{kl})$, моделирующие связи между элементами каждого множества. Необходимо найти взаимно-однозначное соответствие элементов заданных множеств, заданное перестановкой $p \in \Pi_n$, что целевая функция будет принимать минимальное значение. $\min\limits_{p \in \Pi_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} d_{p(i)p(j)}$.

3. Эволюционно-генетический алгоритм

Эволюционно-генетический алгоритм представляет собой популяционно-генетический подход к решению задачи поиска, основанный на математическом моделировании биологических механизмов и процессов в живой природе с помощью принципов популяционной генетики. Выделяют 5 главных этапов алгоритма: формирование начальной популяции, воспроизводство новых особей, оценивание и обработка ограничений, формирование следующего поколения путем отбора [2].

В данной работе были рассмотрены перестановочная кодирование и классические операторы алгоритма, такие как: PMX и OX кроссоверы, β-турнир, пропорциональная схема селекции, реализованная рулеткой. Формирование начальной популяции и выбор родительских пар – случайные. Условие остановки алгоритма – лучшее решение не меняется на протяжении нескольких поколений. Также было разработано бинарное кодирование, которое представляет собой бинарную строку, кодирующую переход от текущего решения к новому [3]. Для данного кодирования был добавлен перестановочный кроссовер. Кроме того, были добавлены операторы селекции: утопия и комбинированная утопия. Разработанный алгоритм был программно реализован посредством C++.

4. Вычислительный эксперимент

Для вычислительного эксперимента были выбраны известные задачи из QAPLIB [4]. Первый вычислительный эксперимент нацелен на выявление лучшей комбинации операторов и кодировок, которые приведут к рекордным или близким к ним решениям. Второй – на оценку качества решений, получаемых выбранными комбинациями. Характеристики ПК, на котором производились эксперименты: ЦП – 8-ядерный процессор с тактовой частотой 4 ГГц (AMD FX-8350), ОЗУ – 12 Гб.

В таблице 1 приведены результаты эксперимента на примере размера 30 и разными конфигурациями алгоритма. Расшифровка конфигураций: CR – OX/PMX – кроссоверы; SL – B/R/UT/UT-C – β-турнир с коэффициентом β, пропорциональная схема селекции, реализованная рулеткой, утопия, комбинированная утопия; PR – количество родительских пар, GI – интервал перекрытия поколения.

Таблица 1. Результаты алгоритма для первого вычислительного эксперимента

Перестановочное кодирование			Бинарное кодирование		
Конфигурация	Значение критерия	Время (мс)	Конфигурация	Значение критерия	Время (мс)
CR-PMX SL-B2 PR-100 GI-0.5	1910480	1734	SL-B2 PR-33 GI-0.1	1893120	3111
CR-PMX SL-B2 PR-50 GI-0.2	1928920	991	SL-B100 PR-100 GI-0.2	1896230	7070
CR-PMX SL-B2 PR-100 GI-0.5	1930200	1443	SL-B100 PR-100 GI-0.1	1897260	15322
CR-PMX SL-UT-C PR-100	1933830	549	SL-B22 PR-33 GI-0.1	1897500	1890
CR-PMX SL-UT PR-50 GI-0.2	1936490	240	SL-B33 PR-50 GI-0.1	1901520	3716

Из полученных данных следует, что были найдены решения близкие к рекордному. Целевая функция лучшего найденного решения составляет 1893120, с отрывом от нижней границы 9.84%, когда значение целевой функции известного рекордного решения – 1818146 с отрывом 6.12%. На всех задачах решения, ближайшие к рекордному были получены с использованием бинарного кодирования. Из этого можно сделать вывод, что лучше использовать бинарную кодировку с β-турниром или утопией с интервалом перекрытия поколения от 0.1 до 0.3. Рассмотрев другие задачи с разными размерами, удалось достичь оптимальных решений и близких к оптимальным (Таблица 2).

Таблица 2. Результаты алгоритма для второго вычислительного эксперимента

Размер	Найденное значение критерия	Отрыв от нижней границы	Время (мс)
12	9552	0%	180
12	224416	0%	189
20	3683	0%	8816
30	152734	1.83%	9179
42	16258	5.7%	38364

Литература

1. Sahni S., Gonzalez T., P-complete approximation problems // Journal of the Association of Computing Machinery 23, 1976, P. 555-565. DOI: 10.1145/321958.321975.
2. Батищев Д. И., Костюков В. Е., Неймарк Е. А., Старостин Н. В., Решение дискретных задач с помощью эволюционно-генетических алгоритмов. Нижний Новгород, 2009. 88 с.
3. Быкова М.А. Многоуровневые методы архитектурно-зависимой декомпозиции в области высокопроизводительных вычислений. Нижний Новгород, 2017. С. 77-82.
4. Burkard R.E., Karisch S.E., Rendl. F. QAPLIB – A Quadratic Assignment Problem Library // Journal of Global Optimization, Volume 10, Issue 4, 1997. – P. 391–403. DOI: 10.1023/A:1008293323270.

АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫВОДА В СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ В СИСТЕМАХ С ПРОЦЕССОРАМИ ПОКОЛЕНИЯ INTEL CASCADE LAKE[1*]

Е.П. Васильев, В.Д. Кустикова, В.Д. Волокитин, Е.А. Козинов, И.Б. Мееров

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача анализа производительности вывода глубоких сверточных сетей, обученных с использованием различных библиотек глубокого обучения. В отличие от существующих исследований анализ ориентирован на многоядерные серверные архитектуры компании Intel. Эксперименты проводятся на вычислительном сервере с двумя процессорами Intel Xeon Platinum 8260L 2.4GHz (24 ядра 48 потоков в каждом процессоре). Анализ производительности выполняется на примере широко известных моделей ResNet-50 и GoogleNet-v3. Вывод реализуется средствами библиотек Intel Distribution of Caffe, TensorFlow, PyTorch, MXNet, OpenCV и Intel Distribution of OpenVINO toolkit. Эксперименты показали, что все перечисленные библиотеки работают за приемлемое время, при этом OpenVINO показывает лучшие результаты производительности в терминах общего времени выполнения вывода. OpenVINO хорошо масштабируется на 48 ядер. В OpenVINO предусматривается возможность выполнения асинхронного вывода, на котором достигается увеличение производительности от 1.4x для набора изображений размером 32 до 4.9x для набора изображений размером 1. Калибровка моделей в формат весов INT8 значительно повышает производительность вывода при неизменном качестве классификации.

Ключевые слова: глубокое обучение, нейронные сети, вывод, производительность.

1. Введение

В настоящее время алгоритмы глубокого обучения повсеместно применяются во многих областях: распознавание изображений [1-3], анализ видео [4], обработка естественного языка [5], биоинформатика [6], вычислительная физика [7,8] и многих других. В жизненном цикле моделей глубокого обучения можно выделить три этапа, а именно: *этап обучения*, во время которого разрабатывается архитектура модели и осуществляется ее обучение; *этап верификации*, во время которого проверяется качество решения задачи с использованием построенной модели; *этап внедрения и использования*, во время которого происходит внедрение модели в коммерческие продукты. Если первые два этапа, как правило, выполняются однократно на мощных серверах, то на последнем этапе осуществляется многократный запуск модели, предполагающий прямой проход по нейронной сети с целью решения задачи. Такой проход называется ***выводом*** (inference).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы исследовать производительность вывода широко известных глубоких нейросетевых моделей с использованием различных библиотек глубокого обучения. Отличительная особенность исследования от существующих [9-11] состоит в том, что получены результаты производительности вывода идентичных моделей на аппаратных платформах Intel.

Работа построена следующим образом. Вначале рассматриваются существующие открытые проекты бенчмаркинга глубоких моделей. Приводится краткое описание использованных библиотек глубокого обучения. Дается описание вычислительного эксперимента: тестовая инфраструктура, модели глубокого обучения, тестовые данные и метрики производительности. Затем выполняется анализ производительности вывода. Приводится описание эксперимента квантования моделей и анализ увеличения производительности INT8-моделей в сравнении с FP32-

[1*] Работа выполнена при поддержке компании Intel. Авторы выражают благодарность сотрудникам компании Intel за интерес и внимание к работе.

моделями. Далее приводится эксперимент по измерению производительности асинхронного (throughput) режима вывода моделей OpenVINO и выбора оптимальных параметров запуска на двухсокетных серверах с большим количеством физических ядер. Затем приводится сравнение производительности библиотек глубокого обучения, оптимизированных с помощью инструментов Intel.

2. Исследования производительности вывода глубоких моделей

Среди близких по тематике работ отметим следующие два проекта.

DAWNBench [12] – бенчмарк 3 моделей глубокого обучения с открытым доступом к результатам. Пользователь может запустить бенчмарк и прислать полученные результаты тестирования в GitHub-репозиторий проекта. При этом публикуются сведения о конфигурации оборудования и программного обеспечения, исходный код обучения и тестирования модели, достигнутая точность после каждой эпохи и данные о производительности. При этом корректность условий проведения эксперимента не гарантируется. Авторы бенчмарка предоставляют следующие показатели производительности: время обучения модели, время вывода на одном элементе входных данных.

MLPerf [9] – бенчмарк для измерения производительности программных реализаций этапов обучения и тестирования моделей глубокого обучения на CPU, GPU, ASIC и мобильных устройствах. Представленные на официальной странице проекта результаты в основном получены с помощью ускорителей и библиотек Nvidia. Бенчмарк позволяет собирать следующие показатели производительности вывода глубоких моделей в зависимости от типа теста: время обработки одного фрейма данных для одного потока данных; количество обработанных запросов в секунду для тестирования в режиме сервера; количество обрабатываемых изображений в секунду для оффлайн-режима.

3. Библиотеки глубокого обучения

В данной работе мы представляем сравнительный анализ производительности следующих программных комплексов: Intel Distribution of Caffe [13], TensorFlow [14], PyTorch [15], MXNet [16], OpenCV [17] и Intel Distribution of OpenVINO Toolkit [18]. Пакет Intel Distribution of Caffe представляет собой реализацию широко известной библиотеки Caffe [19], оптимизированную под архитектуры компании Intel. Пакеты TensorFlow и PyTorch относятся к числу библиотек, наиболее используемых при решении исследовательских задач. Пакет MXNet несколько менее распространен, но, тем не менее, по многим параметрам не уступает аналогам (кроссплатформенность, производительность и т.д.), а по каким-то и превосходит перечисленные ранее инструменты (большое количество программных интерфейсов, поддержка символьных вычислений, распределенное обучение). OpenCV – широко известная, хорошо зарекомендовавшая себя библиотека алгоритмов компьютерного зрения, в состав которой входит модуль, обеспечивающий вывод глубоких моделей, которые обучены с использованием разнообразных фреймворков. Как правило, библиотека используется для быстрой разработки приложений обработки и анализа изображений/видео. OpenVINO – относительно новый фреймворк, который включает в себя программные инструменты Intel для реализации приложений на базе глубокого обучения (промышленность и производство, здравоохранение, научные исследования, розничная торговля, охрана и безопасность). Рассмотрим более подробно возможности OpenVINO, относящиеся к выводу глубоких моделей.

Intel Distribution of OpenVINO toolkit содержит набор инструментов для оптимизации моделей глубокого обучения и создания высокопроизводительных приложений с использованием глубоких моделей. При этом вывод моделей оптимизирован под различное оборудование компании Intel: CPU, Intel Processor Graphics, Intel Movidius Vision Processing Unit (VPU), FPGA, Intel Gaussian & Neural Accelerator. Разработчики поддерживают вывод моделей, обученных с использованием большого числа широко известных фреймворков глубокого обучения, посредством их конвертации в промежуточное представление и внутренней оптимизации структуры модели. Вывод модели (inference) предполагает прямой проход по нейронной сети для некоторого набора входных данных, называемого далее «пачкой» (batch). Однократный прямой про-

ход для пачки в терминах рассматриваемого инструмента называется «запросом» (request). В OpenVINO поддерживается два режима вывода [20].

1) ***Режим минимизации времени выполнения одного запроса*** (latency mode). Предполагает создание и выполнение одного запроса для вывода модели на выбранном устройстве. Следующий запрос на вывод создается по завершении предыдущего. Во время анализа производительности количество сгенерированных запросов определяется числом итераций цикла тестирования модели. Снижение времени выполнения запроса на вывод достигается посредством распараллеливания вычислений на отдельных слоях сети.

2) ***Режим минимизации времени выполнения набора запросов*** (throughput mode). Предполагает создание набора запросов для вывода нейронной сети на выбранном устройстве. Порядок выполнения запросов может быть произвольным. Количество наборов запросов определяется количеством итераций цикла тестирования модели. Минимизация времени обеспечивается за счет параллельной обработки нескольких запросов, поставленных на исполнение.

Режим минимизации времени выполнения одного запроса используется в приложениях, для которых важно уменьшить время отклика программы, например, анализ дорожной ситуации со стационарной камеры или видеорегистратора, компьютерное зрение роботов, подавление шума в аудиопотоке. Режим минимизации времени выполнения набора запросов используется в задачах, не имеющих жестких ограничений на время обработки одного фрейма и позволяет быстрее завершить обработку большого количества независимых запросов, например, анализ текста поисковых запросов к серверу.

4. Вычислительный эксперимент

4.1. Программно-аппаратное окружение

Эксперименты проводятся на двухсокетной системе со следующими характеристиками: 2 процессора Intel Xeon Platinum 8260L 2.4GHz (2x24 cores), TurboBoost off, 196 ГБ ОЗУ, CentOS 7. Для сравнения производительности используются следующие библиотеки глубокого обучения: Intel Distribution of Caffe 1.1.0, TensorFlow 1.14.0, PyTorch 1.3.0, MXNet 1.5.0, OpenCV 4.1.1, Intel Distribution of OpenVINO toolkit 2020.2. В процессе тестирования используются предкомпилированные версии фреймворков, входящие в состав Anaconda 4.5.12. Используются версии фреймворков, собранные с поддержкой MKL-DNN [21].

Для сравнения производительности используются глубокие модели ResNet-50 [2] и Inception-v3 (GoogleNet-v3) [3], которые позволяют решать задачу классификации изображений с большим числом категорий. Выбранные модели содержат 25 и 23 миллиона параметров соответственно. Большое количество существующих топологий глубоких моделей разработано на основе архитектур ResNet и Inception, что позволяет использовать полученные в статье результаты производительности как приближенную оценку времени решения прикладных задач. Выбор топологий обусловлен тем, что для них можно найти обученные весы для всех выбранных в исследовании библиотек глубокого обучения. Следует отметить, что модель ResNet-50 используется в значительной части исследований производительности глубоких моделей [9, 12, 22, 23].

Качество работы моделей оценивается на валидационной выборке (50000 изображений) набора данных ImageNet (ILSVRC2012) [24]. Производительность вывода глубоких моделей анализируется на подмножестве из первых 12288 изображений указанной выборки.

Программная реализация вывода глубоких моделей и инфраструктуры для измерения производительности вывода, запущенного с использованием выбранных фреймворков, выполнена на языке Python. Исходный код выложен в открытый доступ на GitHub [25].

4.2. Показатели производительности

Эксперимент предполагает, что набор тестовых изображений делится на пачки определенного размера, размер пачки является параметром запуска. В ходе эксперимента вычисляется общее время обработки всех пачек. Данный показатель отражает общее время решения задачи, он справедлив для всех рассматриваемых библиотек.

Наряду с этим, для Intel Distribution of Caffe, TensorFlow, MXNet, PyTorch и для режима минимизации времени выполнения одного запроса в OpenVINO вычисляются следующие показатели:

- Латентность (Latency) – медиана времен обработки одной пачки.
- Среднее количество кадров, обрабатываемых за секунду (Frames per Second, FPS) – отношение размера пачки изображений к латентности.

Для режима минимизации времени выполнения набора запросов также вычисляется среднее количество кадров, обрабатываемых за секунду (FPS), но данный показатель определяется как отношение произведения размера пачки изображений и числа итераций ко времени выполнения всех запросов.

5. Анализ полученных результатов

5.1. Производительность квантованных глубоких моделей в OpenVINO

Квантование моделей – мощный инструмент для повышения производительности вывода. Процесс квантования модели в OpenVINO реализован как добавление специальных слоев квантования в модель. Во время операции квантования весов вычисляются динамические диапазоны значений параметров, и затем данный диапазон масштабируется к целочисленным значениям с округлением к самому близкому целому значению [26]. Чтобы компенсировать изменение качества модели, выбирается небольшое подмножество тренировочного набора данных, и на этом подмножестве выполняется дообучение квантованных весов.

Процедура квантования в OpenVINO работает следующим образом. Скачивается оригинальная классификационная модель с весами в формате FP32. Модель конвертируется в промежуточное представление при помощи инструмента Model Optimizer, входящего в состав OpenVINO. Затем модель калибруется в INT8-представление с помощью инструмента Calibration Tool из OpenVINO. Для этого используется 2% изображений из валидационного набора данных. Далее измеряется качество работы для модели в оригинальном фреймворке, модели OpenVINO в представлении FP32 и модели OpenVINO в представлении INT8.

Значение top-K это отношение количества изображений, для которых среди K максимальных вероятностей предсказанных классов находится истинный класс изображения, к количеству обработанных изображений. Стоит отметить, что значения метрик качества моделей может отличаться от результатов, опубликованных в оригинальной статье, поскольку процесс обучения моделей начинается с инициализации случайных весов и всегда уникален.

На рис. 1 представлены графики FPS для вывода моделей ResNet-50 и GoogleNet-v3 в latency режиме с пачками различного размера. Значительный прирост производительности можно объяснить как уменьшением размера весов модели, что позволяет оптимальнее кэшировать данные, так и использованием новых специальных инструкций AVX-512. Ускорение составило до **3.35x** для модели ResNet-50 и до **3.11x** для модели GoogleNet-v3 по сравнению с FP32-моделями.

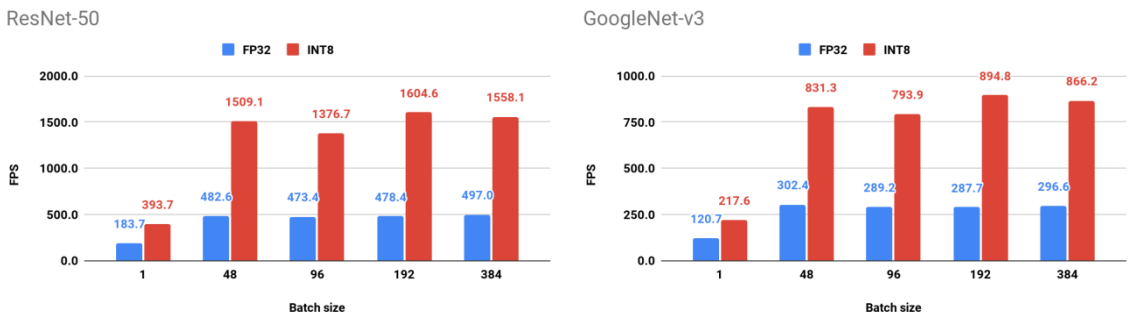


Рис. 1. Сравнение производительности обычной и квантованной модели

Каждый эксперимент по обучению глубоких моделей уникален, потому что начальное состояние весов является случайным распределением, в эксперименте участвовали модели, обученные в условиях, максимально приближенных к условиям оригинального исследования для

каждой модели. Также разные фреймворки могут иметь различную реализацию базовых слоев, что может сказаться на качестве работы модели в другом фреймворке. Небольшие отклонения на графиках от точности из оригинального исследования объясняются этими двумя эффектами. Небольшие отклонения квантованных моделей возникают из-за дискретности квантованных весов, однако данные отклонения благодаря процедуре квантизации в OpenVINO составляют доли процента. Сравнение качества работы моделей до и после квантования представлены на диаграммах ниже. Для модели GoogleNet-v3 в оригинальной статье не опубликована метрика точности top-5, поэтому она не представлена на диаграмме.

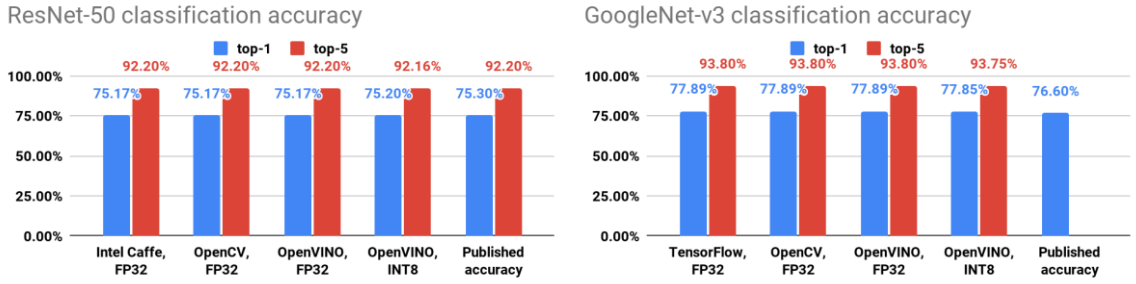


Рис. 2. Ошибки классификации top-1 и top-5

5.2. Исследование производительности режима минимизации времени выполнения набора запросов в OpenVINO

Использование OpenVINO в throughput-режиме позволяет дополнительно повысить производительность вычислений, т.к. в данном режиме загрузка данных и выполнение вычислений могут накладываться.

Эксперимент производился следующим образом. При инициализации OpenVINO устанавливалось количество «запросов», которое OpenVINO должен обрабатывать одновременно и независимо. Весь набор изображений для тестирования разбивался на пачки заданного размера. Затем пачки ставились в очередь и запускались на вывод по алгоритму Round Robin таким образом, чтобы одновременно обрабатывалось количество пачек, равное установленному количеству запросов. В эксперименте варьировались размер пачки и количество одновременно исполняемых запросов, чтобы определить значения, при которых будет получена максимальная производительность.

Максимальная производительность для асинхронного режима получена при использовании пачек размером в 4 и 8 изображений при обработке 24 или 48 запросов одновременно (рис. 3). При дальнейшем увеличении количества изображений в каждой пачке производительность начинает незначительно ухудшаться. Логично предположить, что при значительном увеличении размеров пачки производительность начинает ухудшаться, потому что возникает простаивание из-за долгого ожидания входных данных. Важным преимуществом обработки изображений в асинхронном режиме является высокое значение показателя FPS даже для запросов с размером пачки в одно изображение при условии достаточного их количества.

Варьируя количество одновременных запросов на исполнение, можно сделать выводы об их оптимальном количестве. Из представленных на рис. 4 графиков можно сделать вывод, что количество запросов должно быть таким числом, чтобы количество ядер процессора было ему кратно. Видно, что при использовании 32 (соотношение количества физических ядер к количеству запросов 3:2) запросов происходит потеря до 20% производительности. Наилучший показатель для модели ResNet-50 получен при использовании 24 запросов (2 физических ядра обслуживают каждый запрос) и 48 запросов (1 физическое ядро обслуживает каждый запрос), разница FPS между режимами менее 2%.

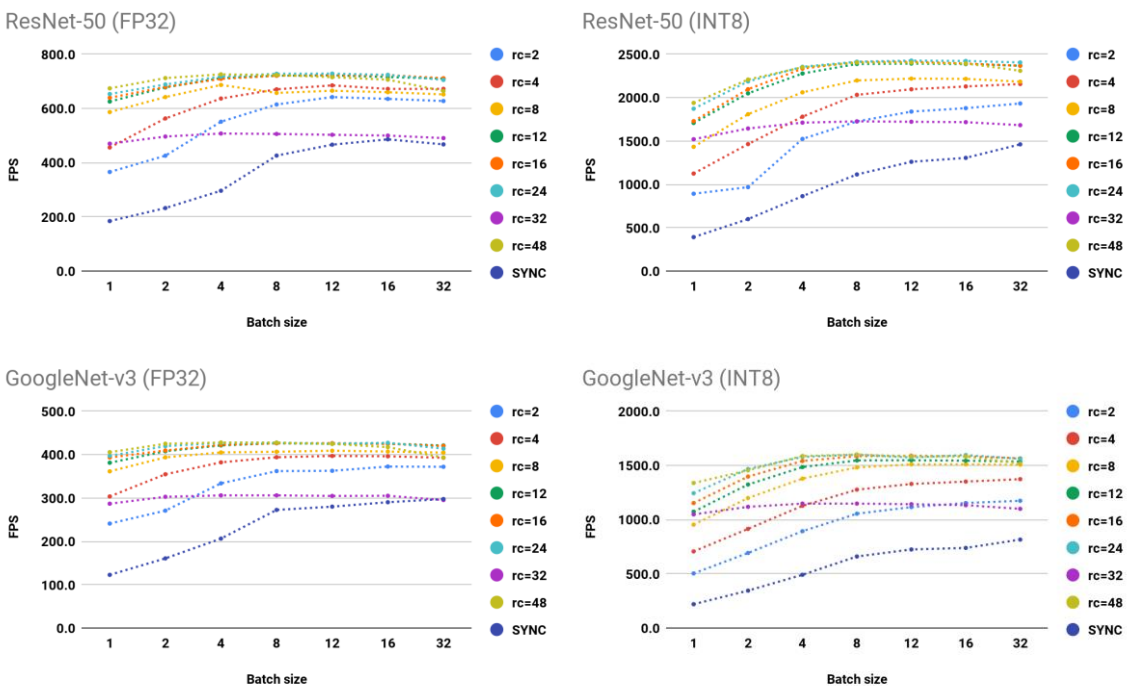


Рис. 3. Зависимость производительности throughput-режима от размера «пачки»

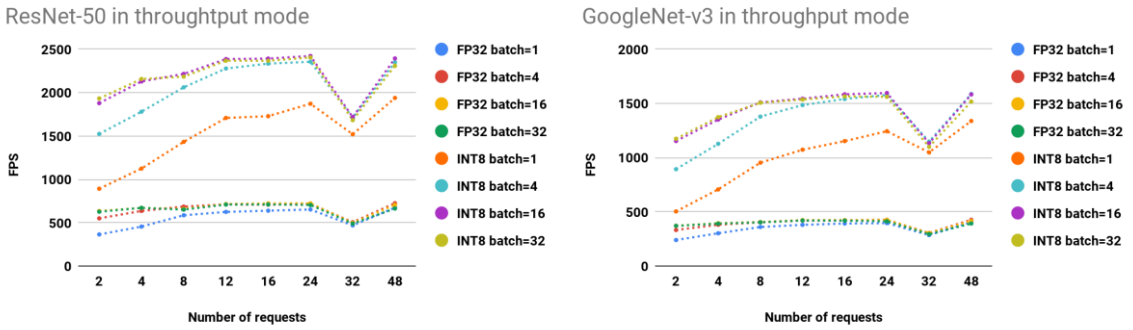


Рис. 4. Зависимость производительности throughput-режима от количества «запросов»

5.3. Сравнение производительности различных фреймворков

На графиках ниже (рис. 5) представлено время вывода глубоких моделей в различных фреймворках глубокого обучения и среднее количество кадров в секунду. Из представленных данных видно, что OpenVINO предоставляет максимальную производительность на много-ядерных процессорах Intel Xeon Scalable с использованием и FP32, и INT8 моделей.

На графиках есть очевидная особенность: модель GoogleNet-v3 в фреймворке PyTorch 1.3.0 запускалась без поддержки MKL-DNN из-за неполной поддержки всех слоев, поэтому не была достигнута максимальная производительность процессора с данным фреймворком. Модель ResNet-50 в фреймворке PyTorch показывает результаты, сравнимые с MXNet и TensorFlow.

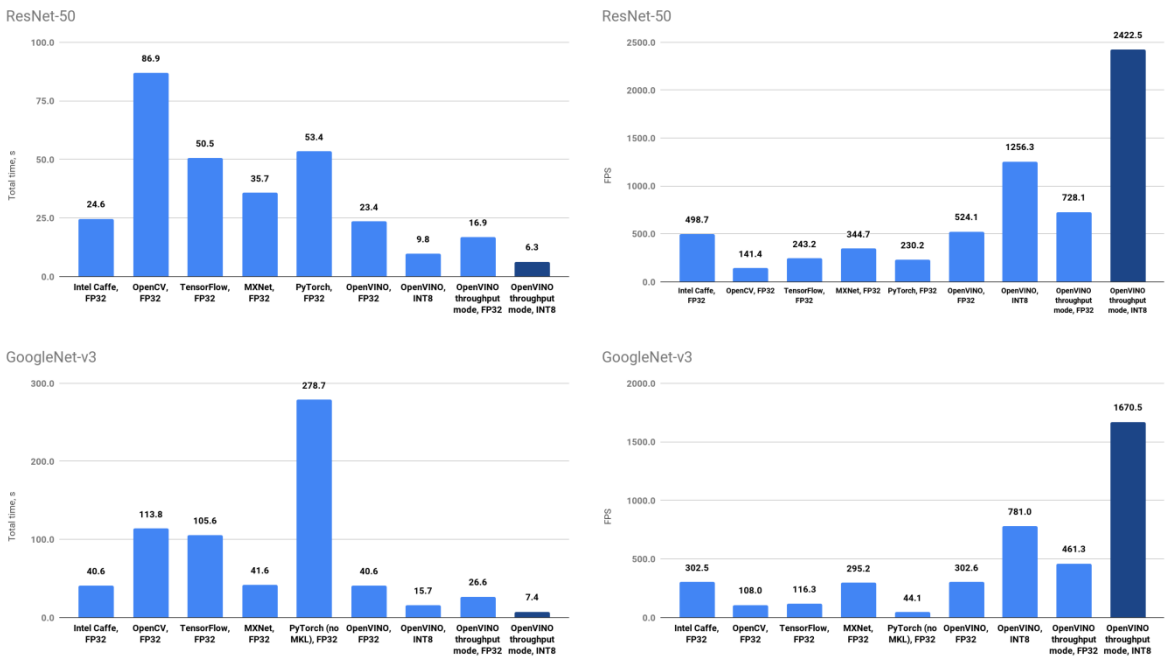


Рис. 5. Производительность различных библиотек глубокого обучения. Слева: время обработки 12288 изображений, справа: количество кадров в секунду.

4. Заключение

В представленной работе приводится анализ производительности библиотек глубокого обучения для двухпроцессорной системы на основе серверных процессоров поколения Intel Cascade Lake. Проведены эксперименты по достижению наибольшего ускорения обработки данных за счет выбора наилучших параметров запуска. Демонстрируется высокая производительность моделей глубокого обучения за счет использования низкоуровневой библиотеки MKL-DNN. Исследуется эффективность применения квантования и асинхронного режима вывода в Intel Distribution of OpenVINO toolkit. Квантование моделей в формат весов INT8 позволяет увеличить производительность в три раза по сравнению с моделями в формате FP32. Режим минимизации времени выполнения набора запросов позволяет повысить производительность от 1.4x для пачки размером 32 в изображения до 4.9x для пачки размером в 1 изображение. Расширение анализа на другие модели глубокого обучения является одним из направлений дальнейшей работы.

Литература

1. Voulodimos A., et al. Deep Learning for Computer Vision: A Brief Review // Computational Intelligence and Neuroscience. 2018. DOI: doi.org/10.1155/2018/7068349.
2. He K., et al. Deep Residual Learning for Image Recognition // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2016. P. 770–778. DOI: 10.1109/CVPR.2016.90.
3. Szegedy C., Vanhoucke V., Ioffe S., Shlens J., Wojna Z. Rethinking the Inception Architecture for Computer Vision // The IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2016. P. 2818–2826. DOI: 10.1109/CVPR.2016.308.
4. Ciaparrone G., Sanchez F., Tabik S. et al. Deep learning in video multi-object tracking: a survey // Neurocomputing. 2020. Vol. 381. P. 61-88. DOI: 10.1016/j.neucom.2019.11.023.
5. Young, T., Hazarika, D., et al. Recent trends in deep learning based natural language processing [Review Article] // IEEE Computational Intelligence Magazine. 2018. Vol. 13. P. 55-75 DOI: 10.1109/MCI.2018.2840738.
6. Ravi D., et al. Deep Learning for Health Informatics // IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics. 2017 Vol. 21, No. 1. P. 4-21. DOI: 10.1109/JBHI.2016.2636665.

7. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Comp. Phys. 2019. Vol. 378. P. 686-707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
8. George D., Huerta E.A. Deep Learning for Real-time Gravitational Wave Detection and Parameter Estimation: Results with Advanced LIGO Data // Physics Letters B. 2018. Vol. 778. P. 64-70. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.12.053.
9. Reddi V.J., et al. MLPerf Inference Benchmark // 2020 ACM/IEEE 47th Annual International Symposium on Computer Architecture (ISCA). 2020. DOI: 10.1109/ISCA45697.2020.00045.
10. Ignatov A., Timofte R., Kulik A. AI Benchmark: All About Deep Learning on Smartphones in 2019 // IEEE/CVF Int. Conf. on CV Workshop. 2019. DOI: 10.1109/ICCVW.2019.00447.
11. Yang C.,Liu J., Chan Y. Performance benchmarking of deep learning framework on Intel Xeon Phi // The Journal of Supercomputing. 2020. DOI: 10.1007/s11227-020-03362-3.
12. Coleman C., Narayanan D., Kang D. et al. DAWNBench: An End-to-End Deep Learning Benchmark and Competition // NIPS ML Systems Workshop. 2017.
13. Intel Distribution of Caffe. URL: https://github.com/intel/caffe (дата обращения: 20.10.2020).
14. TensorFlow. URL: https://www.tensorflow.org (дата обращения: 20.10.2020).
15. PyTorch. URL: https://pytorch.org (дата обращения: 20.10.2020).
16. Apache MXNet. URL: https://mxnet.apache.org (дата обращения: 20.10.2020).
17. OpenCV. URL: https://opencv.org (дата обращения: 20.10.2020).
18. Intel Distribution of OpenVINO toolkit. URL: https://software.intel.com/en-us/openvino-toolkit (дата обращения: 20.10.2020).
19. Caffe. URL: http://caffe.berkeleyvision.org (дата обращения: 20.10.2020).
20. Kustikova V., et al. DLI: Deep Learning Inference Benchmark // Communications in Computer and Information Science. 2019. Vol. 1129. P. 542-553. DOI: 10.1007/978-3-030-36592-9_44.
21. OneAPI Deep Neural Network Library (ранее MKL-DNN). URL: https://github.com/oneapi-src/oneDNN (дата обращения: 20.10.2020).
22. Abts D., Ross J., Sparling J. et al. Think Fast: A Tensor Streaming Processor (TSP)for Accelerating Deep Learning Workloads // IEEE 47th Annual International Symposium on Computer Architecture (ISCA). 2020. Vol.: 1. P. 145-158. DOI: 10.1109/ISCA45697.2020.00023.
23. Torelli P., Bangale M. Measuring Inference Performance of Machine-Learning Frameworks on Edge-class Devices with the MLMark Benchmark. URL: https://www.eembc.org/techlit/articles/MLMARK-WHITEPAPER-FINAL-1.pdf (дата обращения: 20.10.2020).
24. Russakovsky O., et. al. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge // International Journal of Computer Vision. 2015. Vol. 115. P. 211–252. DOI: 10.1007/s11263-015-0816-y.
25. Репозиторий с исходным кодом измерения производительности библиотек глубокого обучения. URL: https://github.com/itlab-vision/inference_performance_analysis (дата обращения: 20.10.2020).
26. Uniform Quantization in the Intel Distribution of OpenVINO Toolkil: URL: https://docs.openvinotoolkit.org/latest/pot_compression_algorithms_quantization_README.html (дата обращения: 20.10.2020).

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ НЕЙРОНОВ С РАЗЛИЧНЫМ ТИПОМ ПАЧЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ, СВЯЗАННЫХ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СВЯЗЬЮ[1*]

А.С. Васин[1], М.А. Мищенко[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
2 Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

В данной работе представлены результаты численного моделирования синхронизации пачечных колебаний двух нейронов, основанных на системе ФАПЧ, и определены области синхронизации колебаний в пространстве параметров модели.

Ключевые слова: синхронизация, пачечные колебания, нейроподобный генератор.

1. Введение

Исследование синхронизации в нейронных ансамблях мозга является актуальным направлением современной нелинейной динамики. Считается, что частичная синхронность в кортикальных сетях мозга генерирует различные ритмы, такие как альфа и гамма, регистрируемые экспериментально при помощи электроэнцефалографа, и ответственные за обработку информации. Или же повышенная синхронность может привести к патологическим видам активности, таким как эпилепсия. Поэтому важно знать, что влияет на синхронизацию и каковы механизмы ее возникновения.

2. Модель нейрона

В работе [1] предложена модель нейроподобного генератора на основе системы фазовой автоподстройки частоты с полосовым фильтром второго порядка. Мы рассматриваем данную модель, так как для такой системы ФАПЧ показано, что изменение напряжения на выходе полосового фильтра качественно похоже на динамику мембранного потенциала нейрона. Поскольку подобная система может быть реализована в виде электронного устройства, то исследование проводилось при помощи среды имитационного моделирования Simulink. Блок-схема генератора представлена на рис.1. Математическая модель, которая описывает систему, выглядит следующим образом:

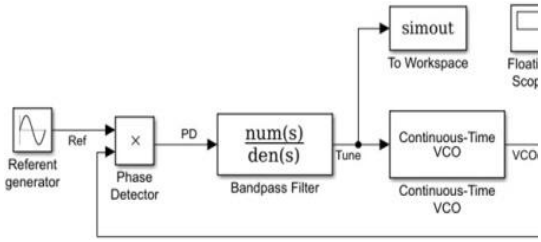


Рис. 1

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= y, \\ \dot{y} &= z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{z} &= \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1 cos\varphi)y, \end{aligned} \tag{1}$$

где φ и y – разность фаз и частот подстраиваемого и опорного генераторов, – параметры инерционности фильтра, γ – начальная частотная расстройка подстраиваемого и опорного генераторов. При использовании в качестве нейроподобного генератора переменная *y* интерпретируется как аналог мембранного потенциала, а параметр γ – как аналог внешнего тока.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-23001 мк и Программы повышения конкурентоспособности Нижегородского государственного университета (соглашение №075-02-2020-1587 от 09/04/2020).

3. Поиск синхронизации двух моделей нейронов

Из формулы для синаптического тока модели Ходжкина-Хаксли [2], была адаптирована формула (2) для исследования синхронизации двух нейроподобных генераторов, которая играет роль однонаправленной импульсной связи, имитирующей синаптическое воздействие.

$$I_{syn} = \frac{d(y_2 - y_{syn})}{1 + \exp\left(-\frac{y_1 - \theta_{syn}}{\kappa_{syn}}\right)}. \quad (2)$$

Индексы “1” и “2” обозначают ведущий и ведомый генераторы соответственно, y_{syn} – реверсивный синаптический потенциал, q_{syn} и k_{syn} – сдвиг и крутизна пороговой синаптической функции, d – сила связи. Путем варьирования параметра g_2, регулирующего частоту колебаний второго генератора, и параметра силы связи d были найдены области синхронизации импульсных колебаний (рис. 2), пачечных и импульсных колебаний (рис. 3) и пачечных колебаний с различным количеством импульсов в пачке (рис. 4).

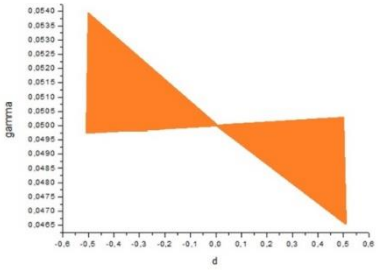


Рис. 2

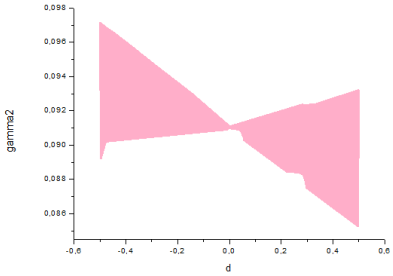


Рис. 3

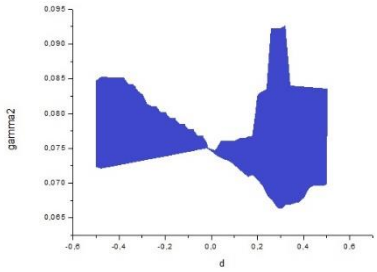


Рис. 4

Для поиска областей синхронизации был разработан алгоритм автоматического определения границ синхронного режима. Алгоритм нахождения областей синхронизации состоит в следующем:

1. Считаем относительную разность периодов колебаний двух генераторов и сравниваем её с установленным эталоном ε = 0.001.
2. Если разность меньше или равна эталону, то мы находимся в области синхронизации, и мы изменяем параметр g ведомого генератора в направлении искомой границы.
3. Если разность больше эталона, то мы находимся вне области синхронизации. Делаем шаг по γ, считаем относительную разность периодов и сравниваем с разностью из предыдущей итерации:
   - если разность периодов в i-ой итерации меньше, чем в (i - 1) -ой итерации, то мы движемся направлении области синхронизации по γ.
   - если разность периодов в i-ой итерации больше, чем в (i - 1) -ой итерации, то нужно изменить направление движения по γ на противоположное.

В данной работе рассмотрена динамика пары нейроподобных генераторов на основе ФАПЧ связанных однонаправленной импульсной связью, имитирующей синаптическое воздействие. Были найдены области синхронизации для различных соотношений между импульсами в пачке двух нейроподобных генераторов.

Литература

1. Мищенко М. А., Шалфеев В. Д., Матросов В. В. // Известия вузов. ПНД. 2012. Т. 20, № 4. С. 122.
2. Симонов А. Ю., Гордлеева С. Ю., Писарчик А. Н., Казанцев В. Б. // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т. 98, № 10. С. 707.
3. E. M. Izhikevich. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting.

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «МАРКОВСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ» ДЛЯ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ[1*]

В.Д. Волокитин[1], А.В. Линев[1], И.И. Юсипов[1], М.В. Иванченко[1], И.Б. Мееров[1], С.В. Денисов[1,2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
[2]Oslo Metropolitan University

Рассматривается задача о существовании независимых от времени генераторов марковской эволюции (Линдбладианов), которые дают стробоскопическую динамику, идентичную стробоскопической динамике исходной периодически модулированной квантовой системы. Известно, что данная задача может быть сведена к решению задачи положительно-определенного целочисленного программирования. Однако до сих пор не найдено алгоритмов, решающих ее за полиномиальное время. В работе предлагается эвристический алгоритм, позволяющий получить ответ на вопрос о возможности «марковского погружения» для моделей с размерностью гильбертового пространства $\boldsymbol{N} \leq \mathbf{8}$. Обсуждаются результаты реализации алгоритма на суперкомпьютере «Ломоносов-2».

Ключевые слова: открытые квантовые системы, Флоке-Линдбладиан, эвристический алгоритм, сокращение перебора, суперкомпьютеры.

1. Постановка задачи

Мы рассматриваем зависящую от времени квантовую версию основное кинетического уравнение, так называемое «уравнение Линдблада» [1]:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}(t)\rho = \frac{1}{i\hbar}\left[H(t),\ \rho\right] + \mathcal{D}(t)\rho$$

Данное уравнение задает эволюцию матрицы плотности ρ, описываемую периодическим во времени супероператором (Линдбладианом) $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t + T)$. Линдбладиан характеризуется периодическими гамильтонианом системы $H(t)$ и диссипативной частью $\mathcal{D}(t)\rho = \sum_i \left(A_i(t)\rho A_i^\dagger(t) - \frac{1}{2}\left\{A_i^\dagger(t)A_i(t), \rho\right\}\right)$, где $A_i(t)$ – периодически зависящий от времени оператор, не изменяющий след матрицы плотности. Уравнение Линдблада может быть записано в виде пропагатора на один период:

$$\mathcal{P}(T) = exp\left(\int_0^T \mathcal{L}(t)dt\right),$$

применение которого описывает стробоскопическую эволюцию системы. Пропагатор является полностью положительно определённым и сохраняющим след (CP-T) отображением [1].

Можно выделить два альтернативы:

1) $\exists \mathcal{L}_F$: $\mathcal{P}(T) = exp(T\mathcal{L}_F)$, то есть отображение $\mathcal{P}(T)$ может быть воспроизведено с помощью эффективного марковского основного уравнения, описываемого не зависящим от времени Флоке-Линдбладианом $\mathcal{L}_F$;

2) $\nexists \mathcal{L}_F$: $\mathcal{P}(T) = exp(T\mathcal{L}_F)$, то есть полученную стробоскопическую эволюцию невозможно воспроизвести без временной зависимости гамильтониана и/или диссипатора системы.

Ставится задача разработать алгоритм, дающий ответ на вопрос о существовании Флоке-Линдбладиана для систем («да/нет»), описанных основным уравнением.

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 19-72-20086. Эксперименты выполнены на суперкомпьютере МГУ «Ломоносов-2».

2. Сведение к задаче целочисленного программирования

Для ответа на вопрос о существовании Флоке-Линдбладиана необходимо, чтобы на «ветвях» логарифма оператора $\mathcal{P}(T)$ было хотя бы одно положительно определенное отображение, сохраняющее след матрицы плотности [2].

Каждому квантовому обображению соответствует положительно определенная эрмитова $N^2 \times N^2$ матрица, так называемая «матрица Чои» [3]. Для перехода между отображениями и матрицами Чои используется следующая операция (инволюция):

$$\langle i, j \left| T^{\Gamma} \right| k, l \rangle = \langle i, k \left| T \right| j, l \rangle,$$

где T и T^{Γ} – это, соответственно, отображение и матрица Чои. Для того чтобы отображение было полностью положительно определенным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая матрица Чои была положительно определенной.

В работе [2] продемонстрирована процедура, которая позволяет перейти от известного оператора $\mathcal{P}(T)$ к линейному матричному неравенству. В данной процедуре используется разложение матрицы отображения по собственным числам и проекторам собственных векторов:

$$\mathcal{P} = \sum_r \lambda_r P_r + \sum_c (\lambda_c P_c + \overline{\lambda_c} \mathrm{F} \overline{P_c} \mathrm{F}),$$

где сумма по r отвечает за действительные собственные числа, а сумма по c соответствует комплексно сопряженным парам собственных чисел матрицы отображения, P – спектральные проекторы собственных векторов (произведение левого и правого соответствующих собственных векторов), а F – флип-оператор ($\mathrm{F}|a> \otimes |b> = |b> \otimes |a>$). С использованием данного разложения логарифм может быть вычислен следующим образом:

$$Log(\mathcal{P}) = L_0 + 2\pi i \sum_c m_c (P_c - \mathrm{F} \overline{P_c} \mathrm{F}),$$

где L_0 – главная ветвь логарифма, а сумма соответствует вариации ветвей логарифма. Так как отображение, задаваемое оператором $\mathcal{L}$, имеет форму независимого от времени Линдбладиана тогда и только тогда, когда оно сохраняет след и является положительно определенным отображением [1], то определение этого свойства можно выполнить у соответствующий матрицы Чои:

$$\omega_{\perp} \mathcal{L}^{\Gamma} \omega_{\perp} \geq 0,$$

где $\omega_{\perp}$ – проектор на ортогональное дополнение к максимально запутанному состоянию.

Введем следующие обозначения [2]:

$$V_0 = \omega_{\perp} {L_0}^{\Gamma} \omega_{\perp}$$
$$V_c = 2\pi i \omega_{\perp} (P_c - \mathrm{F} \overline{P_c} \mathrm{F})^{\Gamma} \omega_{\perp}$$

Применяя их к свойству положительной определённости матрицы Чои, получаем, что существование Флоке-Линдбладиана связано с наличием целочисленного решения линейного матричного неравенства:

$$\exists \mathcal{L}_F \leftrightarrow \exists \left\{ m_c : V_0 + \sum_c m_c V_c \geq 0 \right\}$$

Поиск целочисленного набора $\{m_c\}$ является вычислительно сложной задачей выпуклого полуопределенного целочисленного программирования. Данная задача может быть решена алгоритмом, представленным в статье [4], за полиномиальное время от размеров системы *при фиксированном количестве матриц*, но в данной задаче количество матриц зависит от размерности системы и в этом смысле не является постоянным (так как это число матриц соответствует числу комплексно-сопряженных пар оператора $\mathcal{P}(T)$). В связи с этим потребовалась разработка эвристического алгоритма, позволяющего на практике решать задачи за приемлемое время.

3. Алгоритм

Предлагаемый алгоритм основан на сведении задачи целочисленного программирования, к соответствующий задаче с действительными коэффициентами, и решении поставленной задачи в 3 этапа:

1) **Решение действительной задачи**. На данном этапе изучается вопрос о существовании действительных решений. Если действительное решение у неравенства отсутствует, то и целочисленное тоже. Поиск действительного решения может быть осуществлен с использованием метода внутренней точки, реализованного, например, в системе Matlab.

2) **Построение области всех допустимых решений**. На этом этапе за счет введения дополнительных ограничений можно за полиномиальное время построить гиперкуб, который ограничивает область всех допустимых решений.

3) **Проверка целочисленных решений в допустимой области**. В завершении, зная все допустимые решения, можно проверить все целочисленные точки на выполнение условия положительной определенности. Данная часть алгоритма имеет переборную природу и, следовательно, может потребовать значительного времени счета. Тем не менее, в рассмотренных задачах при размерности гильбертова пространства $\boldsymbol{N} \leq \mathbf{8}$ нам удавалось находить решение за приемлемое время.

Далее рассмотрим каждый этап подробнее. Псевдокод полученного алгоритма приведен в **Таблице** 1.

3.1. Решение действительной задачи

Матричное линейное неравенство может рассматриваться как задача с действительными коэффициентами $\{x_i\}$, которая решается за полиномиальное время относительно количества слагаемых методом внутренней точки [5,6]. Для получения решения данным методом мы использовали процедуру $feasp$ из MATLAB. Поскольку данная процедура принимает на вход набор симметричных действительных матриц, а получаемые нами матрицы эрмитовы, мы выполняли переход к симметричным матрицам R_i, которые имеют удвоенный набор собственных чисел матриц V_i:

$$R_i = \begin{pmatrix} real(V_i) & imag(V_i) \\ -imag(V_i) & real(V_i) \end{pmatrix}$$

Само существование действительного решения мы допускали при возвращаемом значении параметра $t_{min} < \varepsilon = 10^{-5}$, то есть в случае численных ошибок мы допускали небольшие по величине отрицательные собственные числа в линейной комбинации R_i.

Если на данном этапе не удается найти действительное решение, можно утверждать, что целочисленного решения точно нет. В ином случае относительно этой точки на этапе 2 мы пытаемся построить гиперкуб, ограничивающий полученный спектраэдр[1].

3.2. Построение границ области допустимых решений

Так как мы уже нашли одно действительное решение (назовём его x^*), мы можем попробовать ограничить область всех допустимых действительных решений. Для построения верхних границ к матричному линейному неравенству добавляется ограничение на каждую переменную:

$$\begin{cases} R_0 + \sum_i x_i R_i \geq 0 \\ x_j \geq X_j^{max} \end{cases}$$

Данная система также является линейным матричным неравенством и может быть приведена к симметричным матрицам и решена тем же полиномиальным методом внутренней точки.

[1] *Спектраэдром* называют область допустимых решения линейного матричного неравенства, которая является ограниченным конусом, пересечённым с аффинным подпространством.

Максимальное значение X_j^{max}, при котором все ещё существует действительное решение неравенства, может быть постепенно определено бинарным поиском. В качестве первого приближения можно использовать значение x_j^*, округленное вверх ($Round(x_j^*)$).

Аналогично составляется система для нахождения нижних границ допустимых решений:

$$\begin{cases} R_0 + \sum_i x_i R_i \geq 0 \\ x_j \leq X_j^{min} \end{cases}$$

В данном случае бинарным поиском ищется минимальное значение X_j^{min}, при котором существует решение. В данной системе для первого приближения мы использовали значение x_j^*, округленное вниз ($Floor(x_j^*)$).

Поскольку мы решали задачу с действительными коэффициентами, а нас интересуют только целочисленные, то границы допустимых целочисленных решений считаются с округлениями: $K^{max} = Floor(X^{max})$, $K^{min} = Round(X^{min})$. Поэтому находить точные значения границ гиперкуба X^{max} и X^{min} необязательно, достаточно чтобы гиперкуб включал все необходимые целочисленные значения возможных решений.

3.3. Перебор целочисленных решений

Когда нам удалось построить гиперкуб, ограничивающий возможные целочисленные решения, то мы можем проверить целочисленные точки, принадлежащие этому гиперкубу, на положительную определенность получаемых матриц. При этом, в случае существования решения нам необязательно проверять все точки, а достаточно найти хотя бы одну точку, удовлетворяющую положительной определённости. Из-за этого, для более эффективного поиска можно использовать различные эвристики обхода точек гиперкуба, например, обход из центра.

Может возникнуть ситуация, что объемы полученного гиперкуба слишком велики для проверки всех целочисленных точек. В таком случае можно попробовать проверить только целочисленные точки вокруг действительного решения x^*, но если в этой части области решения не найдется, то нельзя утверждать, что его не существует. Понимая, что гипотетически вполне возможны ситуации, когда максимальное время перебора будет неудовлетворительным, мы ограничиваем число перебираемых точек, исходя из оценки имеющегося времени и вычислительных ресурсов, в случае исчерпания которых давая ответ «Результат не известен». По нашим наблюдениям в задачах, которые мы решали, такие случаи встречались очень редко. Мы предполагаем, что большой объем гиперкуба больше предрасполагает к наличию решения системы, которое обычно и встречалось в окрестностях точки x^*.

Таблица 2. Алгоритм поиска целочисленного решения линейного матричного неравенства

1. Вычисление оператора системы $\boldsymbol{\mathcal{P}(T)}$ на один период
2. Вычисление $\{\boldsymbol{V_k}\}$ – протекторов ветвей логарифма ($\boldsymbol{Log(\mathcal{P}(T))}$) и $\{\boldsymbol{R_k}\}$
3. Поиск действительного решения неравенства $\boldsymbol{R_0 + \sum_i x_i R_i \geq 0}$
4. Если $\{\boldsymbol{x_i}\}$ существуют:
5. Построение границ гиперкуба $\{\boldsymbol{K_{min}}\}, \{\boldsymbol{K_{max}}\}$ методом бинарного поиска
6. Проверка целочисленных точек в ограниченной области на удовлетворение условий $\boldsymbol{V_0 + \sum_i k_i V_i \geq 0}$
7. Если $\{\boldsymbol{k_i}\}$ существует:
8. Решение найдено.
9. Иначе:
10. Если проверены все целочисленные точки ограниченной области:
11. Решения не существует.
12. Иначе:
13. Ответ неизвестен.
14. Иначе:
15. Решение не существует.

4. Результаты

В качестве тестовой задачи использовалась система из одного спина с фотонной модой, который содержит не более одного фотона, описывается периодическим по времени гамильтонианом и единственным диссипативным каналом, который моделирует излучение фотонов:

$$\mathrm{H}(t) = \frac{\Delta}{2}\sigma^z + \frac{\Omega}{2}\left(a^\dagger\sigma^- + \sigma^+ a\right) + Acos(\omega t)\sigma^x$$

$$A_1 = \sqrt{\gamma}a,$$

где $\sigma^x, \sigma^z, \sigma^-$ и σ^+ – матрицы Паули, a и $a^\dagger$ – операторы рождения и уничтожения фотонов, Δ – уровень расщепления, Ω – сила спинно-фотонной связи. Для эксперимента были зафиксированы параметры $\Delta = 0.1$, $\Omega = 1$ и $\gamma = 0.01$, и варьировались параметры, отвечающие за частоту и амплитуду модуляции.

Рис. 1. Зависимость существования Флоке-Линдбладиана от амплитуды и частоты модуляции в модели с одним спином и фотонной модой. На графике желтый цвет означает существование Флоке-Линдбладиана (“да”), синий цвет соответствует отсутствию Флоке-Линдбладиана («нет»). Случаев, когда процедура не нашла ответа за отведенное время, в данной задаче нами не обнаружено.

Как видно из рисунка 1, даже в такой простой модели как один спин с фотонной модой, когда размер супероператора системы составляет всего 16x16, уже получается нетривиальная картина существования независящего от времени Линдбладиана с аналогичной стробоскопической эволюцией. Данная диаграмма размера 400×100 ($h = 0.04$) считается, с использованием Matlab, за 2 часа на настольном компьютере с процессором Intel i7-5820K (6 ядер, 12 потоков, 3.3GHz), что является приемлемым. Учитывая экспоненциальную трудоемкость алгоритма, никакие введенные эвристики не гарантируют приемлемого времени работы. Более того, уже при исследовании систем с двумя спинами и фотонной модой, которое мы выполняем на кластере МГУ «Ломоносов-2», наблюдается взрывной рост числа целочисленных точек, которые необходимо исследовать, что приводит к существенным вычислительным затратам. Тем не менее, первичные результаты показывают, что при многих значениях модельных параметров алгоритм позволяет приемлемо ограничить число точек и установить факт наличия или отсутствия решения за несколько часов расчетного времени. Продолжение исследования этой модели является основным направлением нашей дальнейшей работы.

Литература

1. Breuer H. P. et al. The theory of open quantum systems. – Oxford University Press on De-mand, 2002.

2. Wolf M. M. et al. Assessing non-Markovian quantum dynamics //Physical Review Letters. – 2008. – Т. 101. – №. 15. – С. 150402
3. Życzkowski K., Bengtsson I. On duality between quantum maps and quantum states //Open systems & information dynamics. – 2004. – Т. 11. – №. 1. – С. 3-42
4. Khachiyan L., Porkolab L. Computing integral points in convex semi-algebraic sets //Proceedings 38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – IEEE, 1997. – С. 162-171.
5. Nesterov Y., Nemirovskii A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. – Society for industrial and applied mathematics, 1994.
6. Nemirovskii A., Gahinet P. The projective method for solving linear matrix inequalities //Proceedings of 1994 American Control Conference-ACC'94. – IEEE, 1994. – Т. 1. – С. 840-844.

СЕЗОННЫЕ РЕТРОСПЕКТИВНЫЕ ПРОГНОЗЫ, ВЫПОЛНЕННЫЕ НА ОСНОВЕ КЛИМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИВМ РАН[1*]

В.В. Воробьева[1,2], Е.М. Володин[3]

[1]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
[2]Московский центр фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН,
[3]Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН

Приведено описание климатической модели INM-CM5-0 Института вычислительной математики (ИВМ РАН) и схемы подготовки набора начальных данных для проведения ретроспективных модельных экспериментов 1980-2014 гг. сезонного временного масштаба. Осуществлен анализ результатов проведенных экспериментов. Результаты хорошо соответствуют данным реанализа, что подтверждает дальнейшую возможность использования климатической модели ИВМ РАН для сезонных прогнозов и показывает необходимость дальнейшего исследования.

Ключевые слова: климатическая модель, сезонный прогноз, верификация, реанализ

1. Введение

Одним из важных требований к математической модели Земной системы в последние годы становится концепция бесшовного прогнозирования [1], т.е. универсальности использования модели для составления прогнозов погоды и климата различной заблаговременности. Данная работа посвящена оценке качества сезонного прогноза, выполненного с помощью климатической модели ИВМ РАН, разработанной и используемой до сих пор для получения долгосрочных климатических прогнозов, на основе которых в [2] показана схожесть модели по различным характеристикам с природной системой.

Важной составляющей оценки качества прогнозов является корреляционный анализ. Вычислены коэффициенты корреляции аномалий для метеополей температуры на 2м, температуры на 850 гПа, геопотенциалов изобарических поверхностей 200 гПа и 500 гПа,

осадков и давления на уровне моря для различных регионов. Кроме того, большую роль в качестве прогностической информации играет предсказательная способность модели по отношению к различным климатическим индексам. Например, известно, что индекс Северо-Атлантического колебания NAO [3] связан с изменением направления и скорости ветра между регионами Арктики и субтропической Атлантики, что влияет на сезонный перенос тепла и влаги между Атлантикой и соседними континентами, положение шторм-треков, температуру поверхности океана, океанические течения и ледяной покров арктического и субарктического региона [4]. Индекс Тихоокеанско-Североамериканского колебания PNA [5] определяет атмосферную циркуляцию, температуру и осадки на севере Тихого океана и над Северной Америкой и связан с эпизодами Эль-Ниньо-Южного колебания [6], что позволяет говорить о важности хорошей предсказуемости индекса для всей климатической системы. В данной работе на основе прогнозов на зимние сезоны 1980-2014г.г. вычислены индексы NAO, PNA, исследуется отклик на Эль-Ниньо, оценивается предсказуемость изменчивости стратосферы, правильность отображения фазы квазидвухлетнего колебания.

Полученные оценки сравниваются с аналогичными результатами, полученными по данным реанализа ERA-Interim и полулагранжевой глобальной конечно-разностной модели общей циркуляции атмосферы ПЛАВ ФГБУ «Гидрометцентр России» [7], используемой для рутинных сезонных прогнозов.

[1*] Исследование выполнено в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 20-05-00673) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России №075-15-2019-1624).

2. Описание климатической модели ИВМ РАН

Климатическая модель Института вычислительной математики (ИВМ) РАН INM-CM5-0 относится к классу моделей совместной общей циркуляции атмосферы и океана. Уравнения гидротермодинамики океана [8,9] и атмосферы [10,11] в квазистатическом приближении решаются конечно-разностным методом. Координатами являются долгота, широта и σ-координата. Конечно-разностная схема в атмосферном блоке имеет второй порядок по пространству и первый порядок по времени (использована полунеявная схема, в которой гравитационные волны рассматриваются неявно) [12]. Для адаптации модели к массивно-параллельным компьютерам в океаническом блоке при решении уравнения переноса используется явная схема (вместо неявной, основанной на методе расщепления по координатам), а также итерационный метод (вместо прямого) решения уравнений для уровня океана и баротропных составляющих скорости [12]. В [13] показана параллельная реализация кода блока океана.

Семейство климатических моделей ИВМ РАН представлено в различных разрешениях. В данной работе используется конфигурация модели с разрешением в атмосферном блоке 2°×1.5° по долготе и широте, 73 уровнями по вертикали (с верхней границей расчетной области на высоте около 60 км) и разрешением 0.5°×0.25° по долготе и широте, 40 сигма-уровнями по вертикали в блоке общей циркуляции океана. В связи со сложностью моделирования динамики океана у полюса, в модели INM-CM5-0 использована сетка в обобщенных сферических координатах с Северным полюсом вне расчетной области на территории Сибири и местоположением Южного полюса, совпадающим с географическим.

Атмоферный блок в модели дополнен аэрозольным блоком, содержащим прогностические уравнения для концентрации 10 веществ: крупной и мелкой фракций пыли и морской соли, сернистого газа, сульфатного аэрозоля, гидрофильной и гидрофобной форм черного и органического углерода. В радиационном блоке учитываются как прямой, так и непрямой эффект аэрозолей [12]. В блок динамики океана входит блок динамики морского льда [14].

Посредством библиотеки MPI произведено разбиение модельных расчетов на разные группы параллельных процессов. Шаг по времени в динамическом блоке атмосферы равен трем минутам, процедуры физических параметризаций атмосферы вызываются один раз в час, а радиации – один раз в три часа. В блоке динамики океана шаг по времени составляет пятнадцать минут. Блок динамики атмосферы передает информацию о значении всех своих прогностических переменных на каждом шаге по времени, раз в три минуты. Концентрации аэрозолей передаются в блок динамики атмосферы раз в три часа. С целью уменьшения времени счета до двух раз достаточным является выделение равного числа ядер для блока эволюции малых газовых составляющих и для блока динамики атмосферы. Обмен данными между атмосферой и океаном происходит раз в два часа. Внутри каждого из блоков применяется метод двумерной декомпозиции.

Более подробно программная реализация модели INM-CM5-0 и ее масштабируемость на современных вычислительных системах описана в работе [15].

При выполнении данного исследования использовалось 32 процессорных ядра для блока динамики атмосферы, 32 ядра для аэрозольного блока и 96 ядер для блока динамики океана. Таким образом, было задействовано 160 процессорных ядер на всю модель. На расчет одного сезонного прогноза продолжительностью 5 месяцев уходило примерно 5 часов реального времени.

3. Составление набора начальных данных и модельные эксперименты

Климатические модели обладают большой чувствительностью к небольшим изменениям начальных данных [16], поскольку в модельном расчете ошибка от задания начальных условий увеличивается со временем, создавая большое расхождение с картиной реальной погодной обстановки. Помимо вычислительной погрешности измерений существует ошиб-

ка, связанная с недостаточной пространственно – временной плотностью наблюдений, полученных с метеорологических станций, космических станций, атмосферных зондов, прибрежных радаров, океанических буев, и т.д. Для увеличения пространственно – временной плотности наблюдений создаются реанализы атмосферы и океана, объективно сочетающие данные наблюдений и специально разработанной модели для генерации значений метеополей в каждой точке пространства и времени. Данные реанализа широко используются в исследовании взаимосвязей различных климатических процессов, для верификации прогнозов различных прогностических систем, а также в задании начальных данных для прогностических систем, наиболее хорошо соответствующих реальной погодной и климатической картине.

В данном исследовании используются среднемесячные данные реанализа Simple Ocean Data Assimilation (SODA) 3.4.2 [17] за октябрь и ноябрь 1980 – 2014 годов, а также данные реанализа ERA–Interim за 00:00 1–ого ноября 1980 – 2014 годов. При составлении набора начальных данных используется технология устранения смещения модельного климата по отношению к реальному, согласно которой к среднеклиматическим модельным данным за 1 ноября прибавляется аномалия реанализа за 1 ноября рассматриваемого года. Для вычисления климатологии модельных данных за 1980-2014 гг. предварительно проведен модельный эксперимент по протоколу CMIP6.

Проведен ансамбль из 10 численных сезонных экспериментов для каждого года из диапазона 1980-2014гг. с началом 1 ноября и продолжительностью 5 месяцев. Ансамбль экспериментов составлен путем небольшого отклонения начальных данных температуры воздуха и скорости ветра от исходного значения. Величина отклонения выбрана произвольно, поскольку в первый расчетный месяц расхождение в получаемых результатах значительное.

4. Оценка сезонных прогнозов модели INM-CM5-0

По результатам ансамбля модельных экспериментов были вычислены средние за все зимние сезоны коэффициенты корреляции аномалий температуры на 2 метрах, температуры на 850 гПа, геопотенциала изобарической поверхности 200 гПа, геопотенциала изобарической поверхности 500 гПа, осадков и давления на уровне моря для четырех регионов: глобально по всей Земле, в тропиках (20°ю.ш.- 20°с.ш.), Северных экстратропиках (20°с.ш.-90°с.ш.), Южных экстратропиках (90°ю.ш.- 20°ю.ш.). Большая часть метеополей имеет наибольшие значения коэффициентов корреляции в тропиках, что обусловлено явлениями Эль–Ниньо, обеспечивающими большую климатическую предсказуемость в регионе. Коэффициенты корреляции аномалий, вычисленные по экспериментам с моделью ИВМ РАН сравнимы с результатами, полученными для модели ПЛАВ, ориентированной на сезонные прогнозы, а для отдельных метеополей и регионов превышают коэффициенты корреляции модели ПЛАВ. Предсказуемость количества осадков в сезонных прогнозах модели INM-CM5-0 низка, однако прогноз количества осадков является сложной задачей и его успешность остается низкой во многих моделях [18]. Показано, что в годы явлений Эль–Ниньо и Ла–Нинья, коэффициенты корреляции температуры на двух метрах имеют большие значения, чем в остальные года, и во многих случаях их величина тем больше, чем более ярко выражено явление.

Графики средней вдоль экватора U – компоненты скорости ветра на уровнях давления от 10 до 70 мбар с ноября по февраль годов с наиболее сильным западным (1980-1981 гг.) и восточным (2005-2006 гг.) ветром в данной области за всю историю метеонаблюдений для модели INM-CM5-0 показывает сходство с аналогичным графиком для реанализа ERA-Interim. Следовательно, климатическая модель ИВМ РАН верно отображает фазу квазидвухлетнего колебания.

Картины средних за декабрь-январь-февраль аномалий давления на уровне моря, осадков и температуры поверхности в зимний сезон наиболее сильного явления Эль-Ниньо (1997-1998гг.) для реанализов ERA-Interim, GPCP v2.3 (для осадков) хорошо соответствуют осредненным по ансамблю экспериментов результатам для модели INM-CM5-0, однако в

большинстве точек сетки аномалии модельных данных принимают меньшие значения, чем данные реанализа.

Индекс Тихоокеанско-Североамериканского колебания вычисляется по формуле [5], адаптированной под модельную сетку климатической модели ИВМ:

$$PNA_{m,n} = 0.25 \cdot \left(A^{m,n}_{160W,20.25N} - A^{m,n}_{166W,44.25N} + A^{m,n}_{114W,54.75N} - A^{m,n}_{54W,30.75N} \right),$$

где $A^{m,n}_{i,j} = \dfrac{Z^{m,n}_{i,j} - \dfrac{\sum_{n=1}^{35} Z^{m,n}_{i,j}}{35}}{\dfrac{1}{34} \cdot \sum_{n=1}^{35} \left(Z^{m,n}_{i,j} - \dfrac{\sum_{n=1}^{35} Z^{m,n}_{i,j}}{35} \right)}$, $Z^{m,n}_{i,j}$ —среднемесячные данные высоты геопотенциала 500 мбар за 1980-2015гг., $m = \overline{1,12}$ - номер месяца, $n = \overline{1,35}$ - порядковый номер года в интервале 1980-2014гг., i- долгота, j - широта. Вычисленные значения индекса PNA за 1980-2014 гг. для реанализа ERA-Interim лежат в диапазоне значений ансамбля прогнозов модельного индекса PNA, за исключением зимнего сезона 1985-1986 года, в который значение индекса реанализа принимает большее значение, чем наибольшее значение модельного индекса PNA в ансамбле экспериментов. Значения коэффициентов корреляции временных рядов 1980-2015 гг. индексов PNA модели и реанализа ERA-Interim для каждого месяца с ноября (коэффициент корреляции 0.60) по февраль (коэффициент корреляции 0.41) уменьшаются с течением времени, что объясняется увеличивающимся смещением модельных прогностических данных по отношению к данным реанализа. Среднее за зимний сезон значение коэффициента корреляции, равное 0.6, превышает значения для каждого месяца в отдельности, поскольку случайные флуктуации усредняются, и вклад отклика на Эль-Ниньо становится более значимым. В годы наиболее сильных явлений Эль-Ниньо значения индекса PNA, вычисленного по данным сезонных прогнозов климатической модели INM-CM5-0, имеют положительные значения, а в годы Ла-Нинья, наоборот, отрицательные, что согласуется с индексом, вычисленным для данных реанализа ERA-Interim, а также с другими исследованиями, подтверждающими взаимосвязь явлений Эль-Ниньо и Ла-Нинья с Тихоокеанско-Североамериканским колебанием [19].

Индекс NAO вычисляется согласно [3] как среднее за зимний сезон значение коэффициента проекции средних по ансамблю среднемесячных модельных аномалий давления на уровне моря на первую ЭОФ среднемесячных аномалий давления на уровне моря реанализа в Атлантическом секторе (20° с.ш. - 80° с.ш., 90° з.д. - 40° в.д.). При этом исходные данные обработаны так, чтобы среднее значение индекса NAO за все рассматриваемое время равнялось нулю, среднеквадратичное отклонение равнялось единице, и положительный индекс NAO соответствовал низкому значению давления в Арктике. Аналогичным способом вычислены временные ряды индекса NAO для реанализа ERA-Interim и инструментальных данных CRU [20]. Коэффициент корреляции временных рядов индексов NAO за 1991-2010 гг. для модели INM-CM5-0 и реанализа ERA-Interim достигает значения 0.703, а для модели INM-CM5-0 и инструментальных данных CRU - 0.677, в то время как другие существующие модели показывают более низкие результаты. Ранее наилуший результат прогноза зимнего индекса NAO показывала модель UKMO-GloSea5 (коэффициент корреляции 0.41 для 10-членного ансамбля и 0.6 для 24-членного ансамбля) и модель JMAMRI (0.3 для ансамбля из 10 экспериментов).

Коэффициент корреляции временных рядов значений проекции аномалии среднемесячной температуры воздуха на первую ЭОФ реанализа, возможность использования которой в качестве основного индекса, характеризующего динамику стратосферы, была показана в [21], за зимние сезоны 1980-2014 гг. для модели и реанализа достигает значения 0.47, что меньше, чем коэффициент корреляции индексов NAO. Таким образом, стратосферная изменчивость вносит значительный вклад, но, вероятно, является не единственной причи-

ной предсказуемости индекса. Другим фактором предсказуемости индекса NAO может быть задание начальных данных в тропосфере.

В зимние сезоны наибольшей положительной (1986-1987 гг.) и отрицательной (1988-1989 гг.) проекции аномалии среднемесячной температуры воздуха модели INM-CM5-0 на первую ЭОФ реанализа ERA-Interim вертикальные распределения аномалии температуры воздуха модели показывают схожую картину с реанализом, однако аномалии температуры INM-CM5-0 имеют меньшие по модулю значения.

5. Заключение

При помощи данных реанализов SODA3.4.2 и ERA-Interim, заранее проведенного по протоколу CMIP6 модельного эксперимента 1980-2015гг. с климатической моделью INM-CM5-0 и технологии устранения смещения модельного климата по отношению к реальному построены наборы начальных данных за 1 ноября 1980-2014гг. Проведен ансамбль из 10 экспериментов с климатической моделью ИВМ РАН, разработанной и используемой до сих пор для получения долгосрочных климатических прогнозов.

Проведена оценка качества сезонных прогнозов климатической модели ИВМ РАН с точки зрения предсказуемости фазы квазидвухлетнего колебания, индексов Северо-Атлантического колебания и Тихоокеанско-Североамериканского колебания, отклика на Эль-Ниньо и изменчивости стратосферы.

Результаты показывают хорошее соответствие данным реанализа, что подтверждает возможность использования климатической модели ИВМ РАН для сезонных прогнозов и показывает необходимость дальнейшего исследования.

Литература

1. Hoskins B. The potential for skill across the range of the seamless weather-climate prediction problem: a stimulus for our science. // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2013 V. 139 № 672 P. 573-584.
2. Volodin E.M., Mortikov E.V., Kostrykin S.V., Galin V.Ya., Lykossov V.N., Gritsun A.S., Diansky N.A., Gusev A.V., Yakovlev N.G. Simulation of the present-day climate with the climate model INMCM5 // Climate Dynamics. 2017 V. 49 N 11-12 P. 3715-3734.
3. Hurrell J.W., and Deser C. North Atlantic climate variability: The role of the North Atlantic Oscillation. // J. Mar. Syst. 2009 V. 78 №. 1 P. 28-41.
4. Hurrel J.W., James W., et al. The North Atlantic Oscillation: Climatic Significance and Environmental Impact. // Geophysical Monograph Series, 134 . - American Geophysical Union, Washington, DC, 2003.- 279 p.
5. Wallace J.M., Gutzler D.S. Teleconnections in the geopotential height field during the Northern Hemisphere winter // Mon. Wea. Rev. 1981 № 109, 784–812.
6. Renshaw A.C., Rowell D.P., and Folland C.K.Wintertime low-frequency weather variability in the North Pacific–American Sector 1949–93 // J. Clim. 1998 V. 11 P. 1073–1093
7. Толстых М.А. Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. – М, Обнинск: ОАО ФОП. – 2010 – 111 с.
8. Дианский Н.А. Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. М. Физматлит, 2013 272 с.
9. Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., Volodin E.M. Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on the multicomponent splitting method // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2010 V. 25 № 6 P. 581–609.
10. Алексеев В.А., Володин Е.М., Галин В.Я., Дымников В.П., Лыкосов В.Н. Моделирование современного климата с помощью атмосферной модели ИВМ РАН. Препринт ИВМ РАН. М., 1998 180 с.
11. Галин В.Я., Володин Е.М., Смышляев С.П. Модель общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН с динамикой озона // Метеорология и гидрология. 2003 № 5 С. 13–23.

12. Володин Е.М., Мортиков Е.В., Кострыкин С.В. и др. Воспроизведение современного климата в новой версии модели климатической системы ИВМ РАН // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 164–178.
13. Terekhov K.M., Volodin E.M., Gusev A.V. Methods and efficiency estimation of parallel implementation of the σ-model of general ocean circulation // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2011 V. 26 № 2 P. 189–208.
14. Яковлев Н.Г. Восстановление крупномасштабного состояния вод и морского льда Северного Ледовитого океана в 1948–2002 гг. Часть 1: Численная модель и среднее состояние // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2009 Т. 45 № 3 С. 383–398.
15. Мортиков Е.В. Повышение масштабируемости программного комплекса модели Земной системы высокого пространственного разрешения // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015): труды международной научной конференции. Челябинск: ЮУрГу, 2015 С. 431–435.
16. Du H., Doblas-Reyes F. J., García-Serrano J., Guémas V., Soufflet Y., and Wouters B. Sensitivity of decadal predictions to the initial atmospheric and oceanic perturbations. // Climate Dyn.. 2012 V. 39 N 7-8 P. 2013–2023.
17. Carton J.A., Chepurin G.A., Chen L. SODA3: A New Ocean Climate Reanalysis. // Journal of Climate. 2018, American Meteorological Society. DOI: 10.1175/jclid-18-0149.1.
18. Киктев Д.Б., Толстых М.А., Зарипов Р.Б., Зайченко М.Ю., Муравьев А.В., Круглова Е.Н., Куликова И.А., Мирвис В.М., Мелешко В.П., Матюгин В.А., Львова Т.Ю. Совместные испытания технологий глобального сезонного прогноза на основе моделей Гидрометцентра России и ГГО. // Информационный сборник № 38 Результаты испытания новых и усовершенствованных технологий, моделей и методов гидрометеорологических прогнозов. – 2011- С. 4-13.
19. Zhou Z.Q., Xie S.P., Zheng X.T., et al. Global warming–induced changes in El Niño teleconnections over the North Pacific and North America. // J. Clim., 2014, № 27, pp. 9050–9064.
20. Jones P.D., Jónsson T. and Wheeler D. Extension to the North Atlantic Oscillation using early instrumental pressure observations from Gibraltar and South-West Iceland. // Int. J. Climatol., 1997, №17, pp. 1433-1450.
21. Воробьева В.В., Володин Е.М. Исследование структуры и предсказуемости первой моды изменчивости в стратосфере на основе климатической модели ИВМ РАН // Метеорология и гидрология, 2018, №11, с.41−48.

К ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАБОТЫ ВЭУ В СОСТАВЕ ВЕТРОПАРКА В ПОСЕЛКЕ ТИКСИ, РЕСПУБЛИКА САХА

В.П. Гергель[1], А.В. Иванов[2], С.В. Стрижак[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Институт системного программирования им. В.П. Иванникова РАН

В работе рассматривается постановка задачи выбора оптимальных параметров работы 3-х ветроэлектрических установок в составе ветропарка в поселке Тикси, в Республика Саха. Для расчета физических параметров в ветропарке используется открытый пакет WRF-ARW. В ходе расчета получены значение скорости ветра, поля температуры, давления, значение вырабатываемой мощности ветроэлектрических установок. Сформулирована оптимизационная задача, определена целевая функция, выбраны 4 изменяемых параметра. Два параметра, углы рыскания и атаки, являются варьируемыми. Расчеты проведены на вычислительном кластере ИСП РАН.

Ключевые слова: ветроэлектрическая установка, ветропарк, расчет, скорость, целевая функция, параметры, угол, мощность.

1. Введение

Проектирование и выбор оптимальных параметров для ветроэлектрических установок (ВЭУ) в составе ветропарка является актуальной задачей, в особенности ввиду строительства новых ветропарков на территории РФ. Одним из интересных направлений для исследования может быть проблема выбора наилучших режимов работы ветропарка с учетом влияния локальных метеоусловий, а также взаимного расположения ВЭУ в реальной местности. К изменяемым параметрам можно отнести угловую скорость вращения ветроколеса, угол рыскания, угол поворота лопасти по отношению к вектору набегающего потока и другие.

2. Ветропарк в поселке Тикси

В данной работе рассматривается ветропарк в поселке Тикси, Республика Саха. В ноябре 2018 года в арктическом поселке городского типа Тикси, который является важным транспортным узлом для Северного Морского пути, были введены в эксплуатацию 3 японских ветроэлектрических установки (ВЭУ) мощностью 0.3 МВт каждая при участии компаний ОАО «Саха-энерго» и ПАО «РусГидро». ВЭУ ветропарка Тикси расположены на высоте порядка 120 м над уровнем моря в 4 км от поселка Тикси и 2.7 км от моря Лаптевых, рис. 1.

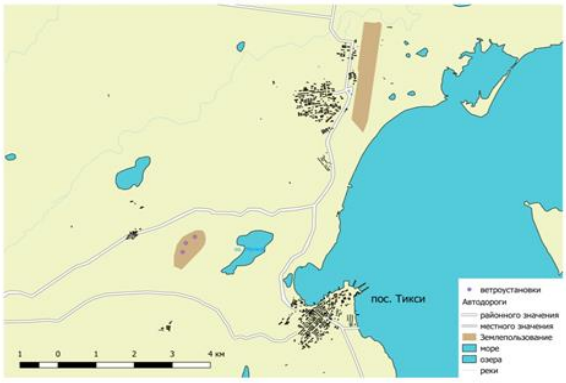


Рис. 1. Карта поселка Тикси. Open Street Map

2.1. Модель WRF-ARW

Расчетный код WRF-ARW активно используется для прогнозирования мощности ветропарка. Модель WRF-ARW является моделью регионального прогноза погоды, для построение которого ей необходимы граничные и начальные условия [1,2]. Источниками данных в таком случае могут выступать глобальные модели, данные наблюдений или данные реанализа прогнозов. В качестве материнской модели для WRF-ARW как правило используются данные расчетов по модели Global Forecast System (GFS).

Модель WRF-ARW позволяет получить большой спектр физических величин, описывающих погодные условия. В качестве основных параметров, как правило, выделяют распределение скорости ветра, температуры и давления. В качестве второстепенных параметров могут выступать влажность воздуха, распределение осадков, тип осадков и многое другое. В WRF-ARW существует различные модели параметризации, в том числе модель для параметризации работы ВЭУ - Actuator Disk Model [3].

2.2. Расчетная область и сетка

Для модельного расчета была выбрана ограниченная область в пределах поселка Тикси. Для более точного прогнозирования внутри основной рассматриваемой области (d01) были выбраны подобласти d02 – d05 (каждая из которых имела разрешение в три раза крупнее предыдущей, т.е. от 27 км – d01, до 333 м – d05), охватывающие посёлок Тикси и прилегающую морскую акваторию, схема расположения областей изображена на рис. 2. Количество уровней по вертикали равно 33. Расчет проводился для 66 часов в период 28.09.2019 00:00 – 30.09.2019 18:00. В результате расчета были получены значения мощности для ВЭУ и ветропарка в целом.

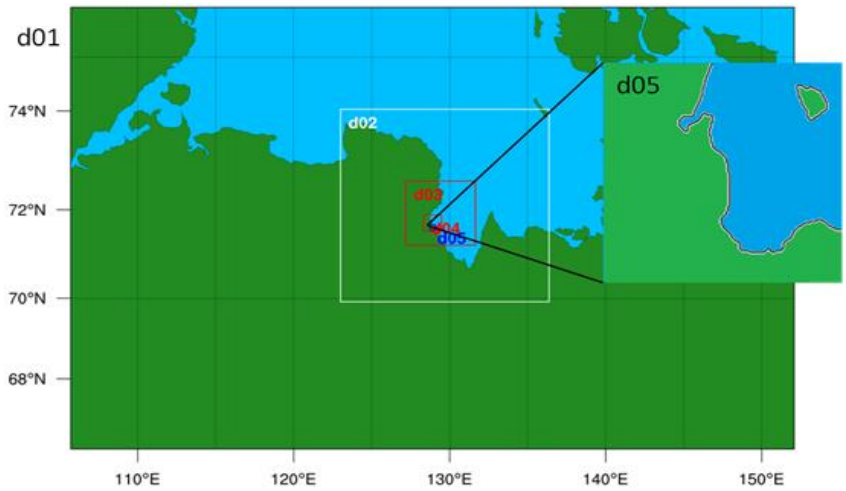


Рис. 2. Схема расположения основной области с изображением вложенных подобластей

Для сравнения результатов была выбрана метеостанция Тикси: 71°34'48"N 128°54'E, высота над уровнем моря 7 м. В ближайшей к месту расположения метеостанции точке области d05 выводились данные о температуре на уровне 2 м над поверхностью, давлении и скорости ветра на поверхности (на уровне метеостанции). График сравнения величины скорости приведен на рис. 3. Конфигурация модели и результаты моделирования приведены в [4].

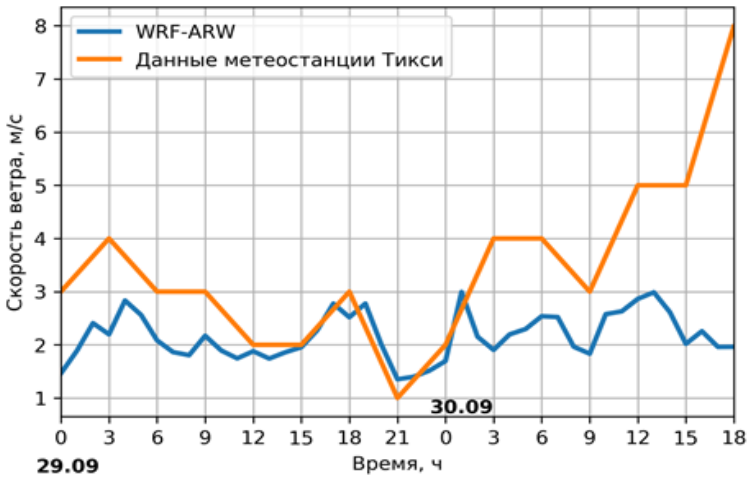


Рис. 3. Сравнение скорости ветра в точке расположения метеостанции Тикси для модельных и реальных данных

В целом, результаты модели соответствуют реальным данным, во всяком случае, они повторяют профиль изменения показателей. Помимо этого, было произведено моделирование выработки энергии ветропарка с помощью встроенной модели, которая проанализирована в [3]. Характеристики ВЭУ, а именно: кривая мощности и коэффициента тяги в зависимости от скорости, были взяты из параметров похожих ВЭУ из открытых источников в Интернете. Результатом моделирования является динамика мощности ВЭС Тикси в заданный период, рис. 4. Можно заметить, что результаты соответствуют среднему значению ветра в заданной области.

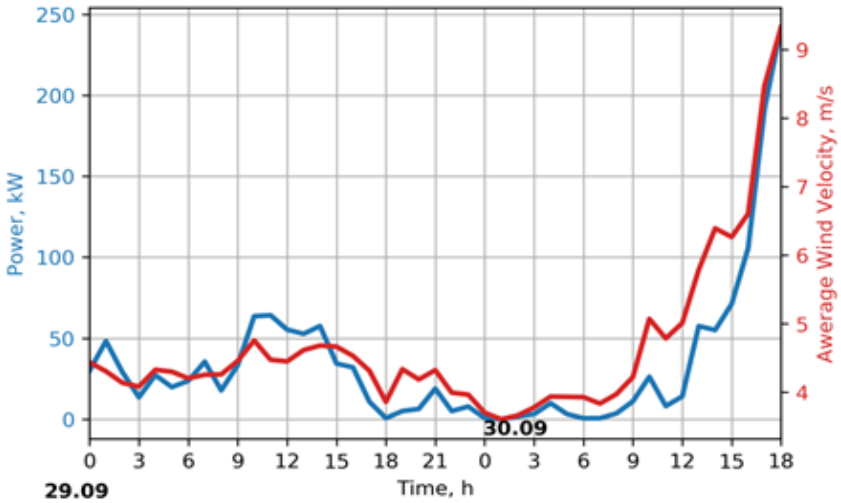


Рис. 4. Моделирование изменение суммарной мощности выработки энергии ВЭС Тикси 29 и 30 сентября

2.3. Постановка задачи оптимизации вырабатываемой мощности ветропарка

Известно, что передние ВЭУ оказывают существенное влияние на работу задних ВЭУ. Существует понятие дефицита скорости. Вихревой след за ВЭУ может отклоняться.

Данные с метеостанции, расположенные в 10 км от ветропарка, показывают, что направление ветра меняется в диапазоне углов от $\theta_1 = 0$ до $\theta_2 = 90$ градусов. Таким образом, возникает задача выбора оптимального угла поворота гондолы двигателя ВЭУ (угла рыскания), угла поворота лопасти для получения максимального значения мощности ВЭУ.

Работы в области проведения оптимизационных расчетов для ветропарков и конструкции ВЭУ практически не проводились ранее в РФ. Среди зарубежных коллективов, которые занимаются вопросами оптимизации при проектировании новых ветропарков, можно выделить научные группы из JHU, USA (Prof. C. MENEVEAU); KU Leuven, Belgium (Dr. Johan Meyers);

EPFL, Lausanne, Switzerland (Prof. Fernando Porte-Agel); NREL (Dr. P.A. Fleming); Stanford University (Dr. J. Park); Aalborg University, Aalborg, Denmark (Prof. Zhe Chen) [5-14].

Данными коллективами рассматривались следующие задачи:

1) оптимизация расположения ВЭУ в ветропарке [5-7];

2) выбор оптимальных параметров (угол рыскания оси ветроколеса, угловая скорость вращения, параметры управления и др.) [14];

3) оптимизация геометрической формы лопасти ВЭУ с целью снижения уровня шума на местности и увеличения долговечности конструкции, изготовленной из композиционного материала.

Для решения подобных задач формировалась целевая функция, которая учитывала различные критерии и ограничения на изменяемые параметры. Среди используемых методов оптимизации можно выделить:

- генетические алгоритмы;
- последовательное квадратичное программирование;
- кросс-энтропийный метод;
- подход на базе комбинации метода сопряженных градиентнов, метода Polak–Ribière для определения весовых коэффициентов и поискового алгоритма Brent [8,9];
- методы машинного обучения на базе “Bayesian ascent” [10,11];
- метод роя частиц [12,13].

В данной работы была сформулирована целевая функция *f*(x), связанная с выработкой суммарной мощности.

Известно, что мощность для одиночной ВЭУ равна:

$$P = \frac{1}{2}\rho A U^3 C_p(\alpha, 0).$$

В задаче оптимизации могут рассматриваться произвольный набор параметров:

$$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N).$$

Целевая функция для суммарной мощности ветропарка определена в виде:

$$f_i(\boldsymbol{x}) = P_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{o}; U, \theta^W).$$

Цель любой оптимизации заключается в достижении предельных значений показателей эффективности при соблюдении заданных ограничений. На этапе постановки задачи исследователь определяет набор параметров, которые необходимо максимизировать, минимизировать или ограничивать. Оптимизация показателей производится за счет варьирования входных параметров. Исследователь задает состав варьируемых переменных, диапазоны их изменения и, возможно, связь с другими входными параметрами. Обычно при проведении оптимизационных исследований требуется решение не одной, а нескольких задач оптимизации, различающихся:

- составом варьируемых переменных (от минимальных изменений в проекте до полного перепроектирования);
- значениями ограничений (анализ возможности ослабления отдельных требований к проекту);
- количеством и составом критериев оптимизации (от полного множества альтернативных проектов до единственного варианта).

В ходе решения задачи необходимо решить задачу о нахождении максимума целевая функция *f(x)*:

$$\max_x f(x) \triangleq \sum_{i=1}^{N} P_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{o}; U, \theta^W), \;\; \boldsymbol{x}^1 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{x}^u,$$

где $x = (\alpha_1, o_1, \dots, \alpha_N, o_N), N$ – число ветроэлектрических установок.

Вырабатываемая мощность ВЭУ зависит от 4 параметров: угла поворота лопасти (угла атаки), значения скорости набегающего потока, угла направления вектора скорости набегающего потока, угла рыскания. Диапазон изменения 2-х выбранных параметров из 4-х заданных согласно изменению метеоданных в районе расположение ветропарка в поселке Тикси, а также технических характеристик ВЭУ с мощностью *P*=0.3 МВт. Диапазон для изменения всех параметров известен, угол рыскания $\boldsymbol{o}$ изменяется от -10 до 10 градусов, угол поворота лопасти $\boldsymbol{\alpha}$ от -10 до 10 градусов. Общее количество расчетных случае равно 25.

Для решения оптимизационной задачи можно использовать ПО Globalizer Software, разработанную в ННГУ им. Н.И. Лобачевского для задач многоэкстремальной оптимизации.

Литература

1. Skamarock W. C., Klemp J. B., Dudhia J., Gill D. O., Liu Z., Berner J., Wang W., Powers J. G., Duda M. G., Barker D. M., et al. A Description of the Advanced Research WRF Model Version 4, 2019.
2. Jiménez P.A., Navarro J., Palomares A.M., Dudhia J. Mesoscale modeling of offshore wind turbine wakes at the wind farm resolving scale: a composite-based analysis with the weather research and forecasting model over Horns Rev. Wind Energy, vol. 18, issue 3, 2014, pp. 559–566.
3. Fitch A. C. et al. Local and Mesoscale Impacts of Wind Farms as Parameterized in a Mesoscale NWP Model // Monthly Weather Review, 2012, 140(9_, 3017–3038.
4. Иванов А. В., Стрижак С. В., Захаров М. И. Моделирование метеоусловий в районе порта и в прибрежной зоне залива Тикси // Труды Института системного программирования РАН. – 2019. – Т. 31, № 6. – С. 163–176.
5. González J.S., Rodríguez Á.G., Mora J.C., Payán M.B., Santos J.R. Overall design optimization of wind farms // Renew Energy. 2011, 36(7):1973–1982
6. MEYERS J., MENEVEAU C. Optimal turbine spacing in fully developed wind-farm boundary layers // Wind Energy, 2012, 15, 305–317.
7. Gebraad P. M. O., Teeuwisse F. W., van Wingerden J. W., Fleming P.A., Ruben S. D., Marden J. R., Pao L. Y. Wind plant power optimization through yaw control using a parametric model for wake effects–a CFD simulation study // Wind energy.2014. 19:95–114
8. Goit J. P., Meyers J. Optimal control of energy extraction in wind-farm boundary layers // J. Fluid Mech. 2015, vol. 768, pp. 5_50.
9. Bokharaie V. S., Bauweraerts P., Meyers J. Wind-farm layout optimization using a hybrid Jensen–LES approach // Wind Energ. Sci., 2016, 1, 311–325.
10. Park J., Law K. H. A data-driven, cooperative wind farm control to maximize the total power production // Appl. Energy. 165, 151–165 (2016).
11. Park J., Law K. H. Bayesian ascent: A data-driven optimization scheme for real-time control with application to wind farm power maximization // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2016, 24, 1655–1668.
12. Hou P., Hu W., Soltani M, Chen C., Chen Z. Combined optimization for offshore wind turbine micro siting // Appl Energy. 2017. 189:271–282.
13. Hou P., Hu W., Soltani M., Chen Z. Optimized Placement of Wind Turbines in Large-Scale Offshore Wind Farm Using Particle Swarm Optimization Algorithm // IEEE TRANSACTIONS ON SUSTAINABLE ENERGY. 2017.
14. Bastankhaha M., Porte-Agel F. Wind farm power optimization via yaw angle control: A wind tunnel study // J. Renewable Sustainable Energy. 2019. 11, 023301.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫМИ ДВОЙНИКАМИ

Е.В. Глазунова, А.А. Деулин, М.С. Куликов, Н.В. Старостин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»

В настоящей работе представлен метод планирования сложных вычислительных экспериментов на основе данных, полученных в ходе предыдущих экспериментов с использованием интерполяции на базе модифицированного метода Шепарда и поиска точек для проведения дополнительных экспериментов по границам диаграммы Вороного.

Ключевые слова: управление параметрическим расчетом, многомерная аппроксимация.

1. Введение

Применение суперкомпьютерных двойников реальных высокотехнологичных изделий обеспечивает значительное сокращение натурных испытаний, однако при этом резко увеличиваются объёмы виртуальных испытаний, что для сложных многопараметрических моделей требует значительных вычислительных ресурсов (одно виртуальное испытание параметризованной модели может занимать десятки часов на сотнях вычислительных узлов).

Целью данной работы является разработка методов обеспечивающих сокращение объёмов виртуальных испытаний без потерь в качестве характеристик высокотехнологичного изделия.

2. Постановка задачи

Входными данными для задачи планирования виртуальных испытаний на базе суперкомпьютерных двойников являются:

1. перечень и диапазоны значений варьируемых параметров модели высокотехнологического изделия;
2. перечень целевых характеристик, которые находятся в сложной зависимости от параметров моделей – получение конкретных значений целевых характеристик обеспечивается виртуальным испытанием суперкомпьютерного двойника с заданными параметрами;
3. результаты ранее проведённых виртуальных испытаний в виде набора точек в пространстве параметров модели со значениями целевых характеристик – «опорные точки»;
4. число планируемых новых дополнительных виртуальных испытаний, которое может быть проведено с учетом имеющихся в наличии вычислительных ресурсов.

В задаче планирования виртуальных испытаний требуется:

1. построить гладкие интерполяции зависимостей целевых характеристик от параметров модели;
2. построить обобщенную функцию оценки ошибки построенных интерполяций в пространстве параметров модели;
3. рассчитать план виртуальных испытаний в виде дополнительного набора точек в пространстве параметров модели с учетом ограничений на число новых испытаний.

Главной целью задачи планирования является поиск такого плана виртуальных испытаний, при котором проведённый комплекс численного моделирования обеспечивает получение интерполяций зависимостей целевых характеристик с минимальной погрешностью.

3. Проблема выбора алгоритма многомерной интерполяции

Задача построения многомерной интерполяции заключается в построении многомерной функции, проходящей через набор заданных точек («опорные точки»). Так как в общем случае «опорные точки» могут не соответствовать узлам некоторой регулярной решетки в многомерном пространстве параметров исследуемой модели, то интерес представляют «общие» методы интерполяции, не использующие регулярную сетку. Для рассматриваемого класса задач интерес представляют следующие алгоритмы интерполяции:

1. регрессия гауссовского процесса (Кригинг) – метод интерполяции, для которого интерполированные значения моделируются гауссовским процессом, управляемым предшествующими ковариациями [1];
2. метод обратных взвешенных расстояний (IDW) – значения неизвестным точкам вычисляются со средневзвешенным значением, где веса «опорных точек» обратно-пропорциональны расстоянию до этих точек [2];
3. интерполяция по естественным соседям – метод основан на диаграмме Вороного для набора пространственных точек, веса «опорных точек» выбираются пропорционально доли ячейки диаграммы Вороного, которая попала бы внутрь ячейки диаграммы Вороного соответствующей искомой точке [3];
4. метод Шепарда – в качестве оценки величины в произвольной точке использует среднее взвешенное значение полиномиальных аппроксимирующих функций, построенных вокруг каждой из «опорных точек» методом наименьших квадратов (могут использоваться как линейные функции так и полиномы второй и третьей степени) [2,4].

Данные алгоритмы за относительно небольшие вычислительные издержки обеспечивают вычисление «гладких» интерполяций целевых характеристик, находящихся в зависимости от значительного числа варьируемых параметров модели высокотехнологического изделия. Экспериментально установлено, что для рассматриваемого класса задач лучшие результаты демонстрирует метод Шепарда второго порядка.

4. Концепция построения функции оценки ошибки

При построении плана проведения дополнительных испытаний одним из ключевых вопросов является оценка качества построенных функций интерполяции, а также определение точек, в которых найденные зависимости с высокой вероятностью имеют максимальную ошибку.

Так как в общем случае, вид и особенности искомых зависимостей априори неизвестны, то можно с гарантией полагаться исключительно на результаты значений целевых характеристик в «опорных точках». В данных точках отклонения построенных функций интерполяций от искомых зависимостей равно 0. Если исходить из предположения о гладкости искомых зависимостей, то и функция оценки ошибки в окрестности «опорных точках» также должна быть гладкой, так как определяется как модуль разности найденной и искомой зависимости. Следовательно, вероятнее всего функции интерполяции в общем случае имеют максимальное отклонения от целевых функций в точках, которые удалены на максимальные расстояние от «опорных» точек – это границы ячеек диаграммы Вороного для заданного набора «опорных точек».

Задачу вычисления оценки ошибки функций интерполяции переформулируем в терминах величины вклада каждой «опорной точки» в найденную зависимость. Для этого в каждой ячейке диаграммы Вороного построим новую функцию интерполяции без учета ее «опорной точки». В качестве оценки ошибки предлагается принять максимальные расхождения найденных функций интерполяции, вычисленных на границах ячеек диаграммы Вороного.

Важным элементом представленной концепции является построение диаграммы Вороного в многомерном пространстве. Для построения диаграммы Вороного предлагается приближенный алгоритм, основанный на распространении волны на регулярной сетке в многомерном пространстве:

1. указывается точность ε (шаг в пространстве варьируемых параметров, параметр алгоритма) – тем самым неявно задается регулярная сетка в пространстве варьируемых параметров (нет необходимости хранить узлы регулярной сетки);

2. для каждой «опорной точки» вычисляется ближайший узел сформированной сетки – «опорный узел»;
3. каждый «опорный узел» является источником «волны», которая на первом такте включает узлы, расположенные от опорных на расстояние не более ε на втором такте на расстоянии не более 2ε и так далее;
4. встреча двух «волн» от разных источников определяет область, по которой проходит граница доменов диаграммы Вороного – выбранную точку из данной области будем называть «граничной точкой».

Необходимо отметить что для данного алгоритма, так же как и для других алгоритмов построения диаграммы Вороного в существенно многомерных пространствах характерна проблема связанная с необходимостью хранения «большого» количества данных связанных с описанием «граничных точек» диаграммы Вороного, при этом отсутствует необходимость в хранении всех узлов регулярной сетки.

5. Алгоритм расчета плана виртуальных испытаний

На основании оценок меры вероятной «ошибки» для точек на границах диаграммы Вороного полученных в п.4 ставится задача отбора заданного количества «граничных точек» для проведения дополнительных испытаний с учетом общего количества возможных испытаний.

Отбор заданного количества «граничных точек» проводится на основании следующих требований:
1. целесообразно отбирать «граничные точки» с наибольшим значениями оценки ошибки;
2. нецелесообразно отбирать «граничные точки», расположенные близко друг от друга в пространстве параметров.

В качестве алгоритма отбора заданного количества «граничных точек» предлагается метод дихотомии:
1. выбирается начальный интервал порога, определяющий допустимые расстояния между отбираемыми «граничными точками»: минимальное допустимое значение (левая граница интервала) определяется как 0, максимально допустимое значение (правая граница интервала) определяется как величина расстояния между парой максимально удаленных точек в многомерном пространстве параметров;
2. выбирается текущее значение порога – центр интервала допустимых значений порога;
3. все найденные «граничные точки» упорядочиваются по убыванию значений оценки ошибки;
4. выбирается «граничная точка» с максимальной оценкой ошибки – помещается в множество «отобранных точек», а из множества «граничных точек» исключаются точки, для которых расстояние до выбранной точки не превышает текущего значения порога;
5. пока упорядоченное множество «граничных точек» не пусто переход к п.4, иначе п.5;
6. если число «отобранных точек» превысило заданное ограничение, то левая граница интервала принимается равной текущему значению порога, иначе правая граница интервала принимается равной текущему значению порога;
7. пока левая граница интервала не сравнялась с правой границей переход к п.2, иначе выход.

6. Результаты применения алгоритма планирования испытаний

Предложенный алгоритм был протестирован на практической задаче определения гидродинамических характеристик, обладающей следующими характеристиками:
1. размерность пространства параметров задачи – 4;
2. количество целевых функций – 6;
3. характеристики функций – многоэкстремальные, гладкие функции.

Для оценки результатов применения алгоритма определения точек для проведения дополнительных испытаний было проведено сравнение суммарной ошибки в точках равномерной сетки интерполяционной функции построенной на базе точек полученных в результате применения алгоритма и интерполяционной функции построенной на базе аналогичного количества

точек равномерно распределённых в пространстве. Результаты проведенных испытаний на 200 итерациях по 10 точек каждая приведены на Рис.1.

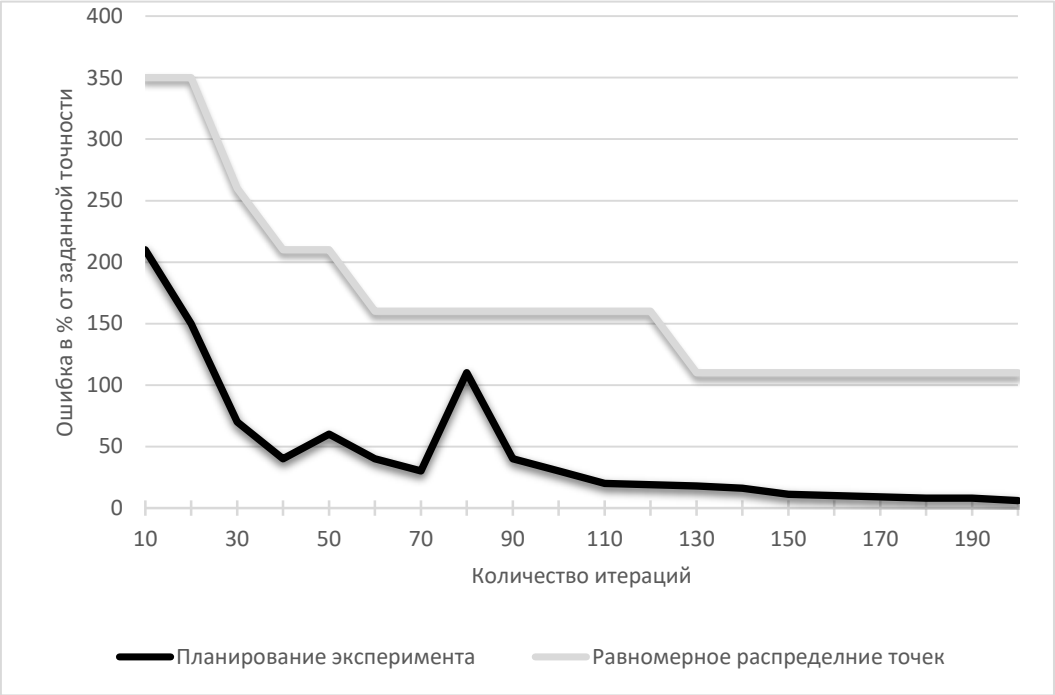


Рис. 1. Результаты испытаний

Приведенные графики демонстрируют следующие результаты:

1. наблюдается сокращение объёмов виртуальных испытаний более чем в 6 раз – средняя точность интерполяционной функции, построенной на основе равномерной сетки на 130 итерациях соответствует точности интерполяции, построенной на базе точек, полученных алгоритмом интерполяции Шепарда на диаграммах Вороного на 20 итерациях;
2. наблюдается хорошие показатели по точности интерполяции искомых зависимостей – функция интерполяции за 200 итераций, построенная на основе равномерной сетки так и не достигла точности функции интерполяции, построенной на точках, полученных алгоритмом интерполяции Шепарда на диаграммах Вороного на 90 итераций.

Литература

1. Байков В., Бакиров Н., Яковлев А. Математическая геология. Том I.. – 1-е изд. – Ижевск: «Институт компьютерных исследований», 2012. – С. 227. – ISBN 978-5-4344-0053-4.
2. Shepard, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data (1968).
3. Sung W. Park, Lars Linsen, Oliver Kreylos, John D. Owens, and Bernd Hamann. Discrete Sibson interpolation. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 12(2):243–253, 2006.
4. Francesco Dell'Accio, Filomena Di Tommaso. Scattered data interpolation by Shepard's like methods: classical results and recent advances // Proceedings of Kernel-based Methods and Function Approximation 2016, Volume 9 · 2016 · Pages 32–44.

ТРИ ТИПА ДИНАМИЧЕСКОГО ХАОСА[1*]

С.В. Гонченко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Настоящая работа является обзором недавних результатов, полученных в теории динамического хаоса и связанных с открытием его третьей новой формы, т.н. смешанной динамики. Этот тип хаоса отличается от двух его классических форм, консервативного и диссипативного хаоса, и главное его отличие состоит в том, что аттракторы и репеллеры могут пересекаться. В работе дается теоретическое обоснование этого явления, а также приводится ряд примеров систем из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика.

Ключевые слова: динамический хаос, странный аттрактор, репеллер, бифуркация, консервативная динамика.

1. Введение

Целью настоящей работы является обзор недавним результатов, полученных в теории динамического хаоса, которые заставляют по-новому взглянуть на саму эту теорию. В основе этих результатов лежит наблюдение того, что аттракторы и репеллеры в системе могут пересекаться, т.н. явление *смешанной динамики*, что на первый взгляд кажется невозможным и противоречащим здравому смыслу. Однако еще в работе [1] было, например, установлено, что двумерные диффеоморфизмы могут иметь бесконечно много устойчивых и бесконечно много вполне неустойчивых периодических траекторий (стоков и источников соответственно). При этом, что важно, замыкания множества стоков и множества источников имеют непустое пересечение. По любому разумному определению аттрактора, периодические стоки должны ему принадлежать, а периодические источники должны принадлежать репеллеру (аттрактору при обращении времени). Тогда такие аттракторы и репеллеры, как замкнутые множества, должны пересекаться.

Таким образом, явление, открытое в [1], несомненно указывает на то, что возможен такой тип хаоса, при котором аттрактор пересекается с репеллером. Но тогда, в конце 90-х, этот вывод не был сделан, поскольку он полностью противоречил общепринятой в то время концепции динамического хаоса, по которой аттрактор не может пересекаться с репеллером, а консервативный хаос рассматривался как совершенно другой тип хаоса, для которого термины аттрактор и репеллер вообще не употреблялись или не имели здесь смысла.

Консервативный хаос характерен для гамильтоновых систем или, более общо, для систем, сохраняющих фазовый объем, и ассоциируется с хаотическим поведением траекторий на всем фазовом пространстве, как говорят «хаос размазан по всему пространству». При этом фазовой портрет такой динамики выглядит как нечто вроде хаотического моря с беспорядочно разбросанными внутри него эллиптическими островами. Типичный пример такого портрета показан на рис. 1a для отображения Чирикова $\bar{x} = x + \bar{y},\ \bar{y} = y + k * sinx$, заданного на цилиндре $0 < x < 2\pi, -\infty < y < +\infty$.

Хаос в диссипативных системах имеет совсем другую природу, и он ассоциируется со странными аттракторами. Если фазовое пространство компактно и система не консервативна, то наряду с аттракторами у нее существуют и репеллеры, которые определяются как аттракторы при обращении времени. В случае диссипативной динамики, аттракторы и репеллеры разделены, и для них можно построить систему непересекающихся поглощающих и отталкивающих областей. На рис. 1b представлен интересный пример системы [3] $x' = y, y' = \alpha x + \beta yz - 25x^3, z' = -1 + z^2 + x^2$ у которой при $\alpha = -20,\ \beta = 3.2$ наблюдаются одновременно аттрактор и репеллер Лоренца.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 19-11-00280 Российского Научного Фонда.

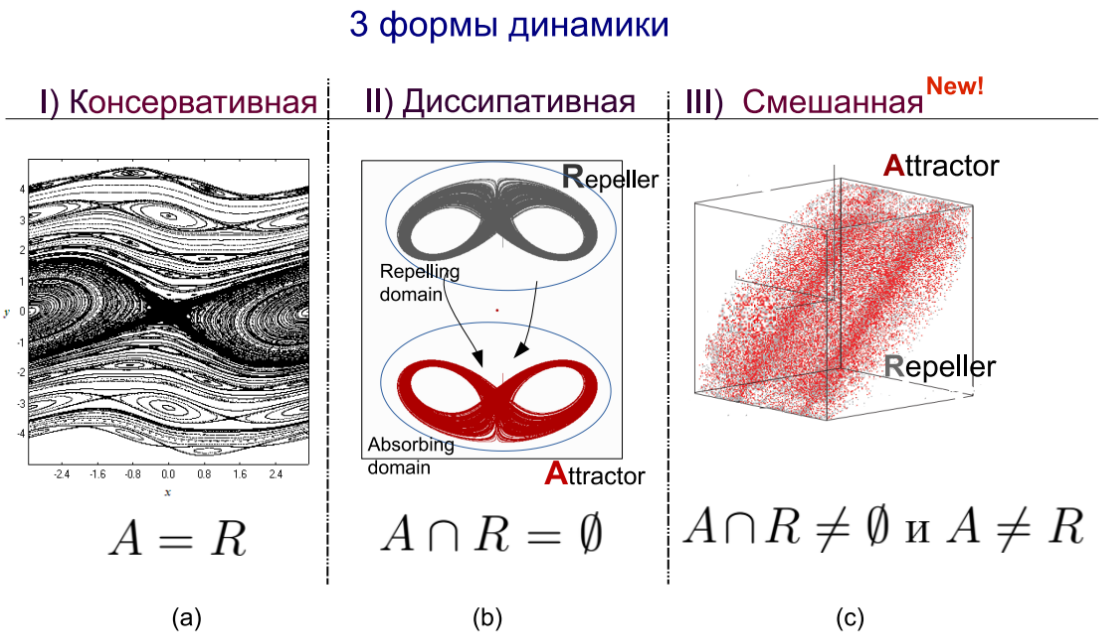


Рис. 1. Примеры трёх типов хаоса в динамических системах

Эти два типа динамического хаоса, консервативный и диссипативный, настолько различны, что кажется нет и не может быть никакой теоретической схемы их объединяющей. Однако в работе [2] была предложена такая схема – концепция, по которой существуют три независимые формы динамического хаоса, демонстрируемого конечномерными системами. В этой концепции нет ничего необычного, и аттрактор здесь понимается как устойчивое замкнутое инвариантное множество системы с возможно единственным уточнением, что под устойчивостью понимается т.н. устойчивость при постоянно действующих возмущениях (которую можно рассматривать как устойчивость относительно сколь угодно малого шума, см. определение 3).

Как показано в работе [2], любой гомеоморфизм f компактного фазового пространства $\mathcal{M}$ имеет замкнутые инвариантные множества A и R, которые называются полным аттрактором и полным репеллером гомеоморфизма f (или, что более точно, полными аттрактором и репеллером по Рюэллю), см. определение 6 настоящей главы. При этом, полный аттрактор A определяется как *максимальное замкнутое инвариантное множество гомеоморфизма f, которое является устойчивым при постоянно действующих возмущениях*.

Это определение аттрактора идейно восходит к классическим работам Конли, Рюэлля и Харли [4,5,6], но, по-существу, является новым, поэтому мы обсуждаем его в параграфе 2. Как обычно, множество R (полный репеллер) определяется как полный аттрактор для гомеоморфизма f^(-1).

Тогда по концепции трех форм хаоса из [2], все консервативные системы устроены очень просто: единственным устойчивым множеством, в том числе и при обращении времени, здесь является все фазовое пространство $\mathcal{M}$, которое поэтому следует считать одновременно и аттрактором, и репеллером системы, т. е. здесь имеет место соотношение A=R. С другой стороны, в случае диссипативной динамики имеет место соотношение A∩R=∅. По законам формальной логики остается еще такая возможность A∩R≠∅ и A≠R (когда аттрактор и репеллер пересекаются, но полностью не совпадают), которую мы относим к третьему типу динамического хаоса, смешанной динамике, отличного от консервативного и диссипативного.

Как уже хорошо известно, смешанная динамика встречается во многих моделях, в том числе из приложений, см., например, [7-14]. На рис.1c представлен пример такой модели, неголономной модели кельтского камня, в которой смешанная динамика была обнаружена в работе [7]. Здесь на одном рисунке показаны фазовые портреты аттрактора (красные точки) и репеллера (серые точки) для соответствующего трехмерного отображения Пуанкаре модели. Визуально, аттрактор и репеллер пересекаются, так что общая картинка выглядит преимущественно в темно-розовых тонах.

В основу концепции трех типов динамики легло новое определение аттрактора (для гомеоморфизмов компактных фазовых пространств), которое дано в [2] самых общих, топологических, терминах и хорошо согласуется с тем, что наблюдается в моделях при численных экспериментах. Это определение аттрактора из [2] мы обсуждаем ниже.

2. К вопросу об определении аттрактора

Сначала напомним некоторые факты и определения из топологической динамики [15]. Рассмотрим гомеоморфизм f (непрерывное и взаимооднозначное отображение) компактного метрического пространства $\mathcal{M}$.

Последовательность точек $\{y_i\}, i = 0, \pm 1, \ldots,$ называется траекторией отображения f, если $y_{i+1} = f(y_i)$. Точка $\alpha \in \mathcal{M}$ называется предельной (соотв., α-предельной), если существует подпоследовательность точек y_i на траектории $\{y_i\}$, такая, что $y_i \to \alpha$ при $j \to +\infty$ (соотв., при $j \to -\infty$). Замкнутые множества всех ω-предельных и α-предельных точек называются ω-предельным и α-предельным множеством траектории $\{y_i\}$, говорят также что они являются ω- и α-предельными множествами точки y_1 (или любой другой точки на её траектории).

Для этих динамических объектов в топологической динамике, см., например, [15], существуют свои аналоги, в основе которых лежит понятие траектории.

Определение 1. Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ называется **ε-траекторией** (длины N) отображения f, если $dist\big(f(x_j), x_{j+1}\big) < \varepsilon$ для всех $j = 1, \ldots, N-1$.

Мы будем говорить, что ε-траектория $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ **соединяет** точки x_1 и x_N, и что x_N **достижима** от x_1 (по ε-траекториям длины N).

Аналогично определяются положительные и отрицательные -траектории, а ε-аналог ω-предельного множества точки x_1, т.н. **пролонгация** точки x_1, определяется как пересечение множеств ω-предельных множеств для всех положительных ε-траекторий точки x_1 при $\varepsilon \to 0$.

Определение 2. Замкнутое инвариантное множество Λ называется **цепно-транзитивным**, если для любого $\varepsilon > 0$ и любых двух точек $x \in \Lambda$ и $y \in \Lambda$ существует ε-траектория, которая лежит в Λ и соединяет x и y.

Определение 3. Замкнутое инвариантное множество A_{tot} называется **устойчивым относительно постоянно действующих возмущений** (или тотально устойчивым), если оно устойчиво по Ляпунову относительно ε-траекторий для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. То есть, если для любого $\delta > 0$ существуют такое достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что любая положительная ε-траектория любой точки множества A_{tot} не покидает его δ-окрестности.

Определение 4. CRH-аттрактором называется цепно-транзитивное, устойчивое относительно постоянно действующих возмущений, замкнутое инвариантное множество, целиком лежащее в некоторой поглощающей области U.

Соответственно, **CRH-репеллер** определяется как CRH-аттрактор для системы, получаемой при обращении времени.

Можно высказать целый ряд аргументов в пользу такого определения аттрактора, которое обобщает другие хорошо известные, например, определения гиперболических аттракторов и аттракторов лоренцевского типа, а также явно содержит условие устойчивости. Кроме того, так определенный аттрактор является инвариантом топологической эквивалентности.

Что ксается важности CRH-аттракторов для теории динамического хаоса в целом, то, например, в работе [2] было отмечено, что у конечномерных систем с компактным фазовым пространством $\mathcal{M}$ могут быть CRH-аттракторы только следующих трех типов:

- **консервативного типа** – когда все фазовое пространство $\mathcal{M}$ является цепно-транзитивным множеством, и тогда оно само будет одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером;
- **диссипативного типа** – когда в любой окрестности CRH-аттрактора существуют точки (отличные от точек самого аттрактора), положительные полутраектории которых стремятся к нему;
- **смешанного типа** – тогда это обратимое ядро (reversible core), т.е. CRH-аттрактор, который одновременно является и CRH-репеллером; в этом случае траектория все время находится в окрестности этого аттрактора-репеллера, но к нему не стремится ни в прямом, ни в

обратном времени. Более того, для любой точки, не принадлежащей ядру, найдется такое $\varepsilon > 0$, что любая ее положительная и отрицательная ε-траектория не соединяет эту точку с точками обратимого ядра.

Разнообразные примеры CRH-аттракторов всех трех типов приведены в [2,16].

Далее будем предполагать, что фазовое пространство $\mathcal{M}$ гомеоморфизма f не является цепно-транзитивным, соответственно, динамика не является топологически консервативной.

Определение 5. Множество A_x называется **аттрактором точки x**, если оно является CRH-аттрактором и достижимо из x по ε-траекториям для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что у точки x может быть несколько CRH-аттракторов. Если число таких аттракторов конечно, то их объединение – это полный *аттрактор* точки x. В случае бесконечного числа аттракторов, полным аттрактором точки x будем называть *замыкание объединения всех аттракторов точки x*. Так определенный полный аттрактор – замкнутое инвариантное множество $A_0(x)$, но он не обязательно будет устойчивым множеством. Можно показать, что минимальное замкнутое устойчивое множество, содержащее $A_0(x)$ – это *пролонгация* множества $A_0(x)$, т.е. множество всех точек, достижимых из $A_0(x)$ для всех произвольно малых $\varepsilon > 0$. Мы будем называть это множество *полным аттрактором по Рюэллю точки x*. Аналогичным образом мы определяем:

Определение 6. Полный аттрактор отображения f– это замыкание объединения всех CRH-аттракторов его точек, а **полный аттрактор по Рюэллю** отображения f – это пролонгация его полного аттрактора.

Литература

1. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. т.216. С. 76-125.
2. Гонченко С.В., Тураев Д. В..О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды МИАН, 2017. т.297. С. 133-157.
3. Гонченко А.С., Самылина Е.А., Тураев Д.В. Об обратимых системах с аттрактором и репеллером Лоренца // в печати
4. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // Comm. Math. Phys. 1981. v.82, 137–151.
5. Conley C.C. Isolated invariant sets and the Morse index //American Mathematical Soc. 1978. No. 38.
6. Hurley M. Attractors: persistency, and density of their basins // American Mathematical Soc. 1982. v.269, No. 1, 247-271.
7. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. 2013. v.18, No.5, 521-538.
8. Kazakov A.O. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane //Regular and Chaotic Dynamics, 2013, v.18(5), 508-520.
9. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D.V. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators //Physica D: Nonlinear Phenomena. 2017, v.350, 45-57.
10. Kuznetsov S. P. Regular and chaotic motions of the Chaplygin sleigh with periodically switched location of nonholonomic constraint //EPL (Europhysics Letters), 2017, v.118(1), 10007.

О БИФУРКАЦИЯХ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМ ПЕРЕСЕЧЕНИЕМ МНОГООБРАЗИЙ СЛОЖНОГО СЕДЛА[1*]

С.В. Гонченко, О.В. Гордеева

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Изучаются структура и бифуркации множества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к неподвижной точке типа сложное седло. Построена бифуркационная диаграмма на плоскости управляющих параметров, которая содержит только одну бифуркационную кривую, отвечающей в точности бифуркациям неподвижной точки. Описано новое бифуркационное явление «скачка гиперболичности», когда, в результате одной только локальной седло-узловой бифуркации неподвижной точки, нетривиальное гиперболическое множество скачком меняет свое местоположение.

Ключевые слова: трансверсальное пересечение, сложное седло, бифуркационная диаграмма, гиперболическое множество, топологическая схема Бернулли.

1. Введение

Одним из фундаментальных результатов в теории динамического хаоса по праву считается открытие сложной структуры множества $\boldsymbol{N}$ траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической траектории, т.е. траектории по которой трансверсально пересекаются инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия грубой седловой периодической орбиты. Существование таких гомоклинических траекторий было установлено А.Пуанкаре еще в конце 19-го века. Однако сама задача об описании структуры множества $\boldsymbol{N}$,. задача Пуанкаре-Биркофа, была решена лишь в 60-х годах в работах Смейла [1] и Шильниква [2]. Причем в работе [2] было дано полное описание этого множества:

Теорема Шильникова [2]: N является локально максимальным равномерно гиперболическим множеством, траектории которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.

Бифуркации систем с негрубыми (нетрансверсальными) гомоклиническими траекториями к грубым седловым периодическим орбитам были изучены во многих работах, первой из которых является работа Гаврилова и Шильникова [3]. По сути в этой работе были заложены основы математической теории негиперболического хаоса. В работе Лукьянова и Шильникова [4] был рассмотрен случай трансверсальной гомоклинической траектории к негиперболической периодической траектории простейшего седло-узлового типа. Решение этой задачи, помимо ее важности для теории динамических систем, послужило еще и математическим обоснованием известного сценария «перехода к хаосу через перемежаемость», когда большой странный аттрактор проявляется сразу же после исчезновения устойчивой периодической траектории. В работах [5,6] были также исследованы бифуркации систем с квадратичными гомоклиническими траекториями к седло-узловым периодическим орбитам. Эта задача, по сути, связывала вместе два явления в математической теории синхронизации – возникновение гомоклинических структур внутри зоны синхронизации и бифуркации при выходе из этой зоны.

В настоящей работе мы рассматриваем еще один новый случай трансверсальной гомоклинической траектории к негрубой периодической орбите, которая в рассматриваемом случае является невырожденным сложным седлом (т.е. его первая Ляпуновская величина равна нулю, а вторая положительна). Отметим, что соответствующая проблема была поставлена еще в обзоре [7] как одна из основных задач в теории глобальных бифуркаций. По своей постановке, соот-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0729-2020-0036 Министерства Науки и Высшего Образования РФ.

ветствующая бифуркационная задача имеет (как минимум) коразмерность 2, так как ее видимая негрубость связана только с вырождением лишь одной периодической траектории – неподвижной точки O рассматриваемого двумерного диффеоморфизма f_0, инвариантные устойчивое и неустойчивое одномерные многообразия которой пересекаются трансверсально в точках гомоклинической траектории Γ_0. В работе рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ диффеоморфизмов, где μ = (μ_1, μ_1) - параметры, управляющие бифуркациями сложного седла. Пусть U_0 – достаточно малая окрестность контура $O \bigcup \Gamma_0$. Обозначим через B_2 топологическую схему Бернулли из двух символов, а через N_μ множество траекторий диффеоморфизма f_μ, целиком лежащих в U_0 . Стандартно доказывается, что на плоскости параметров (μ_1, μ_1) существуют две бифуркационные кривые L_1 и L_2, отвечающие седло-узловым бифуркациям неподвижной точки (см. рис. 1), которые разбивают эту плоскость на две области E_1 и E_2 такие, что в E_1 существует только одна грубая седловая неподвижная точка O и, а в области E_2 – три неподвижные точки: седло O_1 , устойчивая O_2 и седло O_3 ; на кривой E_1 точки O_1 и O_2 сливаются в седло-узел O_{12} , на кривой E_2 точки O_2 и O_3 сливаются в седло-узел O_{23} . Основной результат статьи составляет следующая

Основная теорема. Множество N_μ всегда содержит нетривиальное подмножество Ω_μ, траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с траекториями B_2, и кроме того (i) $N_\mu = \Omega_\mu$ при $\mu \in E_1$; (ii) $N_\mu = \Omega_\mu + \{O_2 , O_3\}$ при $\mu \in E_2$ и здесь множество Ω_μ является равномерно гиперболическим. При $\mu \in L_1$ множество Ω_μ содержит седло-узел O_{12} и $N_\mu = \Omega_\mu + O_3$ (скачок гиперболичности); при $\mu \in L_2$ множество Ω_μ равномерно гиперболично и $N_\mu = \Omega_\mu + O_{23}$.

2. Постановка задачи

Рассматривается C^r – гладкий диффеоморфизм f_0 ($r \geq 3$), имеющий неподвижную точку типа сложное седло и гомоклиническую к ней траекторию Γ_0. Предполагается, что других вырождений f_0 не имеет, т.е. f_0 удовлетворяет условиям:

А) f_0 имеет неподвижную точку O типа сложное седло с мультипликаторами $\lambda_1 = \lambda$, где $0 < |\lambda| < 1$, и $\lambda_2 = 1$ и Ляпуновская величина $l > 0$.

В) Инвариантные многообразия $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ пересекаются трансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0.

Рассматривается U_0 – малая фиксированная окрестность неподвижной точки O .

Пусть $M \in W^{ss} \cap U_0$ – некоторая гомоклиническая точка траектории Γ_0 и $\Pi^+ \subset U_0$ – ее достаточно малая окрестность.

Диффеоморфизмы, удовлетворяющие условиям **А)** и **В)**, образуют в пространстве C^r-гладких диффеоморфизмов, бифуркационную кривую коразмерности 2. (см.рис. 1) Параметры отвечают за бифуркации сложного седла. Для изучения бифуркаций диффеоморфизма f_0 мы будем рассматривать параметрическое семейство $f_{\bar{\mu}}$, диффеоморфизмов, при этом f_0 является элементом этого семейства при $\bar{\mu} = 0$.Показывается, что семейство двух параметрическое и параметры отвечают за бифуркации сложного седла.

Выберем в U_0 при $\bar{\mu}=0$ две точки траектории Γ_0: $M^+ \in W^{ss}_{loc}(O)$ и $M^- \in W^{u}_{loc}(O)$. Пусть Π^+ и Π^- – достаточно малые, диаметра ε, окрестности точек M^+ и M^- соответственно. Очевидно, существует натуральное q такое, что $M^+ = f_0^q(M^-)$. При всех достаточно малых $\bar{\mu}$ в U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма $f_{\bar{\mu}}$: *локальное* $T_0 = f_{\bar{\mu}}\big|_{U_0}$ и *глобальное* $T_1 = f_{\bar{\mu}}^q : \Pi^- \to \Pi^+$. По построению, любая однообходная периодическая траектория, целиком лежащая в U, должна иметь ровно по одной точке пересечения с окрестностями Π^+ и Π^-. Точку такой траектории на Π^+ можно рассматривать как неподвижную точку соответствующего отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T_0^k : \Pi^+ \to \Pi^- \to \Pi^+$, где T_0^k действует из Π^+ в Π^-. Мы опишем множество траекторий целиком лежащих в U_0.

3. Свойства отображений T_0 и T_1

В U_0 можно выбрать C^{r-1}-гладкие локальные координаты (x, y), в которых отображение T_0 запишется виде, аналогичном [5]:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda(\bar{\mu})x + h(x, y, \bar{\mu})x^2 y \\ \bar{y} = \mu_1 + (1+\mu_2)y + y^3 + O(y^3), \end{cases} \tag{1}$$

где $|\lambda(\bar{\mu})| < 1$, $\lambda(0) = \lambda$. Обратим внимание, что второе уравнение системы (1) не зависит от x. В координатах (x, y) неподвижная точка O лежит в начале координат и ее инвариантные многообразия W^{ss} и W^u распрямлены: $W^u : \{x = 0\}$, $W^{ss} : \{y = 0\}$.

Опишем неподвижные точки отображения (1). За поведение неподвижной точки в окрестности нуля отвечают два бифуркационных параметра (μ_1, μ_2). Плоскость параметров разбивается на три области бифуркационной кривой $\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^3 = 0$ (см.рис 1).

Введем вспомогательные обозначения $\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^3 = Q$, а через α обозначим наибольшую координату по переменной y неподвижной точки.

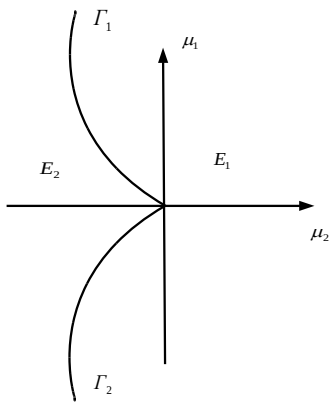


Рис. 1

Равенство нулю параметра Q соответствуют трем различным биффуркационным случаям:

1. Если $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$ имеем вырождение неподвижной точки в сложное седло.(рис.2), параметр $a = 0$;

2. Если $(\mu_1, \mu_2) \in \Gamma_1$: $\mu_1 = \left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ (рис.3), то имеем две неподвижные точки с ординатой $y_1 = -\sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2}} = a$, соответствующей седло-узлу и $y_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2}}$ соответствующей седлу;

3. Если $(\mu_1, \mu_2) \in \Gamma_2 : \mu_1 = -\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ (рис.4), неподвижные точки с ординатой $y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2}} = a$ соответствующей седлу и $y_2 = -\sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2}}$ - седло-узлу.

Неравенство $Q > 0$, задает область E_1, в этом случае неподвижная точка седло с ординатой $y = \sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2} - \sqrt{Q}} = a$ (рис.5);

В случае $Q < 0$, имеем область E_2, и три неподвижные точки , с ординатами $y_1 = 2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$, $y_2 = 2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, $y_3 = 2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$, $\alpha = \max(y_1, y_2, y_3)$ (рис.6);

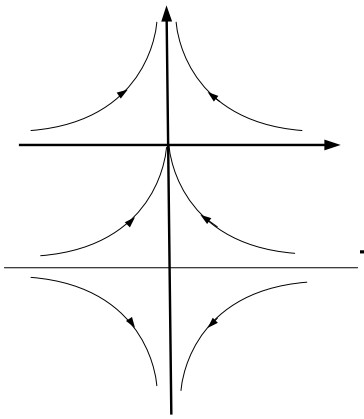


Рис. 2

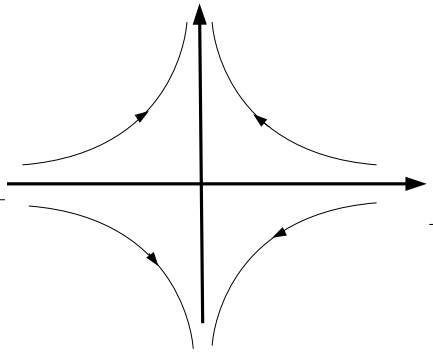


Рис. 3

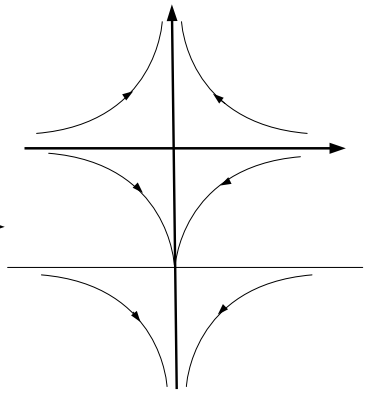


Рис. 4

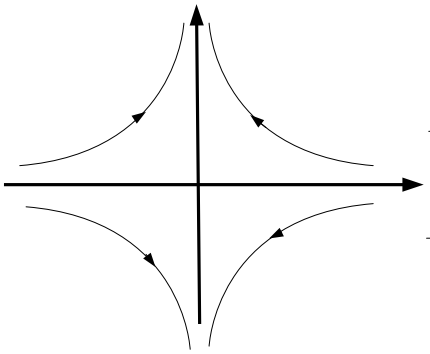


Рис. 5

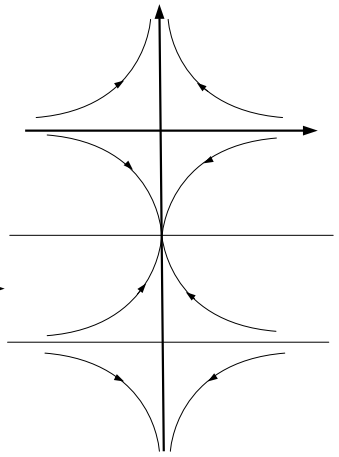


Рис. 6

Обозначим через a наибольшую координату по переменной y неподвижной точки.

Пусть (x_i, y_i), $i = \overline{0,..,k}$, – множество точек на U_0 таких, что $T_0(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$. Одним из важных достоинств локальных координат (1) является то, что соотношение $(x_k, y_k) = T_0^k(x_0, y_0)$ допускает в них весьма удобное для дальнейших исследований представление. А именно, в следующей лемме дано такое представление отображения $T_0^k : U_0 \to U_0$ в так называемой перекрестной форме аналогичной [5,6].

Лемма. Для всех достаточно малых μ отображение $T_0^k : (x_0, y_0) \to (x_k, y_k)$ может быть записано в следующем виде:

$$x_k = \lambda^k(\overline{\mu})x_0 + o(\lambda^k)\xi_k(x_0, y_k, \overline{\mu})$$

$$y_0 = \alpha_k + \beta_k(y_k - y^-) + \beta_k O((y_k - y^-)^2)$$

где функции $\xi_k(x_0, y_k, \overline{\mu})$ равномерно ограничены вместе с производными до порядка $(r-2)$, $\|x_k\|_{C^{r-1}} \to 0$ и $\rho_k \to 0$ при $k \to \infty$ и

$$\begin{cases} \alpha_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k}} + ...; \beta_k = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2k}\right)^3 (y^-)^3} + ..., если \mu_1 = \mu_2 = 0 \\ \alpha_k = \alpha + \dfrac{1}{k} + ...; \beta_k = \dfrac{1}{(3ak)^2 (y^- - a)^2} + ..., при.. \left(\dfrac{\mu_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\mu_2}{3}\right)^3 = 0..и..\mu_1 > 0; \\ \alpha_k = \alpha + (y^- - a)e^{-(3a^2+\mu_2)k} + ...; \beta_k = e^{-(3a^2+\mu_2)k} + ... \end{cases}$$

многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, α наибольшая по y координата неподвижной точки.

Глобальное отображение $T_1 : \Pi^- \to \Pi^+$ при всех достаточно малых $\overline{\mu}$ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} \overline{x}_0 - x^+ = F\left(x_1, y_1 - y^-, \overline{\mu}\right) \\ \overline{y}_0 = G\left(x_1, y_1 - y^-, \overline{\mu}\right) \end{cases}, \qquad (2)$$

где $(x_0, y_0) \in \Pi^+$, $(x_1, y_1) \in \Pi^-$; функции F и G – C^{r-1}-гладкие и $F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$.

Перепишем отображение (2) еще и таким образом:

$$\overline{x}_0 - x^+ = ax_1 + b(y_1 - y^-) + O(x_1^2 + |x_1(y_1 - y^-)| + (y_1 - y^-)^2)$$

$$\overline{y}_0 = cx_1 + d\left(y_1 - y^-\right) + O(x_1^2 + |x_1(y_1 - y^-)| + |y_1 - y^-|^2),$$

где коэффициенты a, b, c, d, включая x^+ и y^-, гладко зависят от $\overline{\mu}$. Так как T_1 – диффеоморфизм, то $ad - bc \neq 0$. Трансверсальность гомоклинеческого пересечения означает, что $d \neq 0$.

Литература

1. Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points // Diff. And Comb. Topology, Princeton Univ. Press, 1965, С. 63-80.
2. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре –Биркгофа // Матем. сб. 1967. – т.74(116). – С. 378-397.
3. Н.К. Гаврилов , Л.П. Шильников, О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой/ I.- Матем сб. – 1972, – Т.88(130). – №4. – 475-492; II.- Матем сб.-1973.- т.90(132). – №1. – С.139-157.

4. Лукьянов В.И., Шильников Л.П О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.//ДАН СССР . – 1978. – Т.243. – №1. – с. 26-29.
5. С.В. Гонченко, О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов, И.И. Овсянников. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к седло-узловой неподвиж-ной точке.// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.- Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. – 2014.- № 2.
6. Gonchenco S.V, Gordeeva O.V., Lukyyanov V.I., Ovsyannikov I.I. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a saddle-node //Regular and chaotic dynamics. V. 19. № 4. 2014. P. 461-473.

7.В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников. Теория Бифуркаций // Динамические системы-5, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, 1986.

О ДИСКРЕТНЫХ ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ АТТРАКТОРАХ И СЦЕНАРИЯХ ИХ ВОЗНИКНОВЕНИЯ[1*]

А.С. Гонченко[1], Е.А. Самылина[2]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Для однопараметрических семейств трехмерных отображений изучаются сценарии возникновения странных гомоклинических (содержащих только одну неподвижную точку) аттракторов. Описаны 3 различных вида таких сценариев в ориентируемом случае и 4 в неориентируемом. Феноменологически показано как такие сценарии могут приводить к возникновению дискретных гомоклинических ориентируемых неориентируемых аттракторов. В докладе будут также даны примеры реализации этих сценариев в случае трехмерных обобщенных отображений Эно.

Ключевые слова: странный аттрактор, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, гомоклиническая траектория, инвариантная кривая, трехмерное обобщенное отображение Эно

1. Сценарии в ориентируемом случае

В работах [1-3] были исследованы некоторые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в случае трехмерных ориентируемых отображений. Здесь термином «гомоклинический» мы ограничиваем круг рассматриваемых странных аттракторов только теми, которые содержат ровно одну неподвижную точку (типа седло, если все мультипликаторы действительны, или седло-фокус, если у неподвижной точки есть пара комплексно-сопряженных мультипликаторов). Универсальность сценариев означает, во-первых, то, что они могут реализовываться в общих однопараметрических семействах, и во-вторых, то, что для таких сценариев не требуется выполнения каких-либо специальных свойств рассматриваемых систем (типа наличия симметрий и т.п.).

В работе [1] были описаны три различных сценария такого рода, связанных с возникновением дискретных аттракторов лоренцевского типа, восьмерочного типа и спирального типа соответственно. Качественные схемы для первых двух сценариев показаны на рис. 1, а для третьего – на рис. 2. Все они могут реализовываться в однопараметрических семействах $T\mu$ трехмерных ориентируемых отображений, и все начинаются с тех значений μ, при которых $T\mu$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $O\mu$ которая при некотором значении параметра μ теряет устойчивость, и здесь в сценариях появляются различия.

[1*] Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2019-1931.

А.С. Гонченко благодарит РНФ (грант № 20-71-00079).

Доклад выполнен при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041).

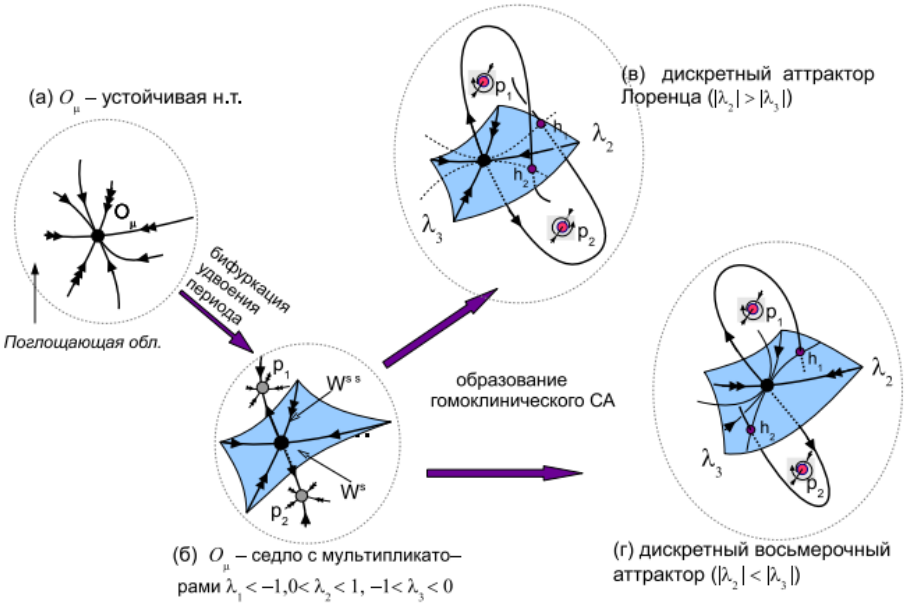


Рис. 1. Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению либо дискретного аттрактора Лоренца, (путь (а) - (б) - (в)), либо дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) - (б) - (г))

Сценарий 1 возникновения дискретного аттрактора Лоренца (путь (а) – (б) – (в) рисунка 1). При некотором значении μ точка теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: она сама становится седловой типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в её окрестности рождается устойчивый цикл периода 2 (он в этот момент становится аттрактором). Затем при изменении параметра, в результате серии некоторых бифуркаций, этот цикл и все притягивающие инвариантные множества, которые от него отрождаются, теряют устойчивость. Каким способом это происходит, зависит от конкретной задачи. При этом важно, что инвариантные многообразия седловой точки, пересекаются и, когда $W^u(O)$ целиком лежит в поглощающей области, образуется гомоклинический аттрактор. Поскольку точка O имеет в этот момент мультипликатор $\lambda_1 < -1$, то два других мультипликатора λ_2 и λ_3 будут действительными и разных знаков. В случае, когда $0 < \lambda_2 < 1$, $-1 < \lambda_3 < 0$ и $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, конфигурация получающегося гомоклинического аттрактора очень похожа на конфигурацию известного аттрактора Лоренца, см. рис. 1в. При этом роль состояния равновесия аттрактора в случае отображения будет играть неподвижная точка O (седло типа (2,1)), а в “дырках” дискретного аттрактора, вместо несимметричных равновесий модели Лоренца [4], будут лежать точки седлового цикла периода 2. Заметим также, что точка O делит одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O)$ на две связные компоненты – сепаратрисы W^{u+} и W^{u-}. Поскольку неустойчивый мультипликатор неподвижной точки O отрицателен, то имеет место ***симметрия*** между этими сепаратрисами в силу того, что $T(W^{u+}) = W^{u-}$ и $T(W^{u-}) = W^{u+}$н, т. е., точки на сепаратрисах будут “прыгать” под действием отображения T поочередно с одной сепаратрисы на другую (в классическом аттракторе Лоренца каждая из сепаратрис сама по себе инвариантна, но они симметричны друг другу из-за глобальной симметрии модели Лоренца).

Сценарий 2 возникновения дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) – (б) – (г) рисунка 1). Начало этого сценария такое же, как и в первом случае. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки такие, что опять $\lambda_1 < -1$, $0 < \lambda_2 < 1$, $-1 < \lambda_3 < 0$, но уже $|\lambda_3| > |\lambda_2|$, но. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 1(г), будет похож на аттрактор, возникающий при периодическом возмущении двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седлового равновесия [5]. Поэтому такой аттрактор был назван в [1, 3] “дискретным восьмерочным аттрактором”.

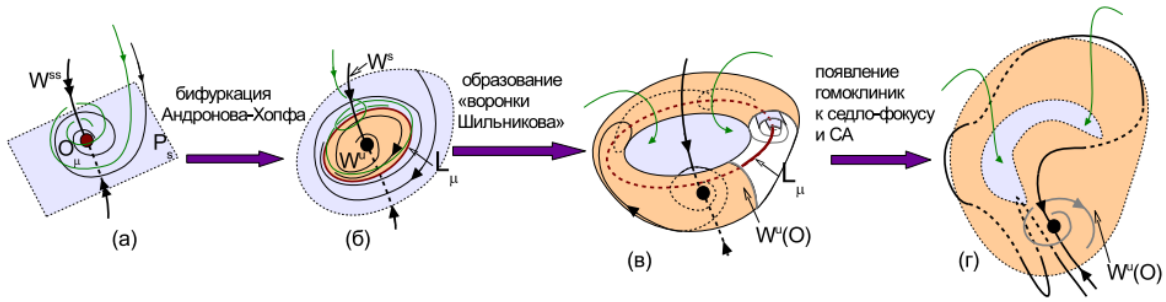


Рис. 2. Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного аттрактора Шильникова

Сценарий 3 возникновения дискретного аттрактора Шильникова (рис. 2). Этот сценарий существенно отличается от первых двух тем, что первой бифуркацией потери устойчивости точки O здесь является бифуркация Андронова-Хопфа. В результате этой бифуркации неподвижная точка становится седло-фокусом типа (1,2), т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а из нее рождается замкнутая инвариантная кривая $L\mu$, рис. 2(б). Соответственно предполагается, что при дальнейшем изменении μ сначала аттрактором является эта кривая $L\mu$, а затем она теряет устойчивость (каким способом – зависит от конкретной задачи, см., например, [2]), и формируется странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус и его неустойчивое двумерное многообразие, рис. 2(г). При этом важным этапом в становлении аттрактора является образование т.н. “воронки Шильникова”, когда кривая $L\mu$ меняет свой тип с узлового на фокусный – тогда неустойчивое многообразие точки начинает накручиваться на $L\mu$, рис. 2(в), и в образовавшуюся воронку будут втягиваться все траектории из поглощающей области (кроме одной из устойчивых сепаратрис седло-фокуса). Заметим, что подобный сценарий возникновения спирального аттрактора у трехмерных потоков был рассмотрен еще в работе Л. П. Шильникова [6]. Поэтому возникающий в случае отображений аналогичный аттрактор спирального типа был назван в [1] “дискретным аттрактором Шильникова”.

2. Сценарии в неориентируемом случае

Отображение (диффеоморфизм) R^n называется неориентируемым, или меняющим ориентацию, если его якобиан во всех точках R^n отрицательный. Также, как и в ориентируемом случае, у трехмерных неориентируемых отображений могут быть дискретные гомоклинические аттракторы различных типов. Здесь мы даем феноменологическое описание сценариев возникновения некоторых таких аттракторов. Все они также могут реализовываться в однопараметрических семействах $T\mu$ трехмерных неориентируемых отображений, и также все начинаются с тех значений μ, при которых $T\mu$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку $O\mu$ которая при некотором значении параметра μ теряет устойчивость.

Сценарий 1 возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Лоренца (путь (а) – (б) – (в) рисунка 3). При некотором значении μ точка теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: она сама становится седловой типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в её окрестности рождается устойчивый цикл периода 2 (он в этот момент становится аттрактором). Затем при изменении параметра, инвариантные многообразия седловой точки, пересекаются и, когда $W^u(O)$ целиком лежит в поглощающей области, образуется гомоклинический аттрактор. Поскольку точка O имеет в этот момент мультипликатор $\lambda_1 < -1$, то произведение двух других ее устойчивых мультипликаторов λ_2 и λ_3 будет положительным. Рассмотрим случай, когда $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1$. Тогда конфигурация получающегося гомоклинического аттрактора, также как и в ориентируемом случае, будет очень похожа на лоренцевскую, см. рис. 3в. Однако здесь есть небольшая разница, состоящая в том, что точки гомоклинических траекторий на $W^u(O)$ будут лежать на одной и той же инвариантной кривой, входящей в O, тогда как в ориентируемом случае они будут накапливаться к O, прыгая поочередно по двум разным кривым, образующим границу некоторого клина (ср. рис. 1в и 3в). Таким образом, неориентируемый дискретный ат-

трактор Лоренца, в принципе, не имеет потокового аналога (для соответствующего потока две неустойчивые сепаратрисы должны лечь на одну и туже траекторию, входящую в состояние равновесия, что невозможно).

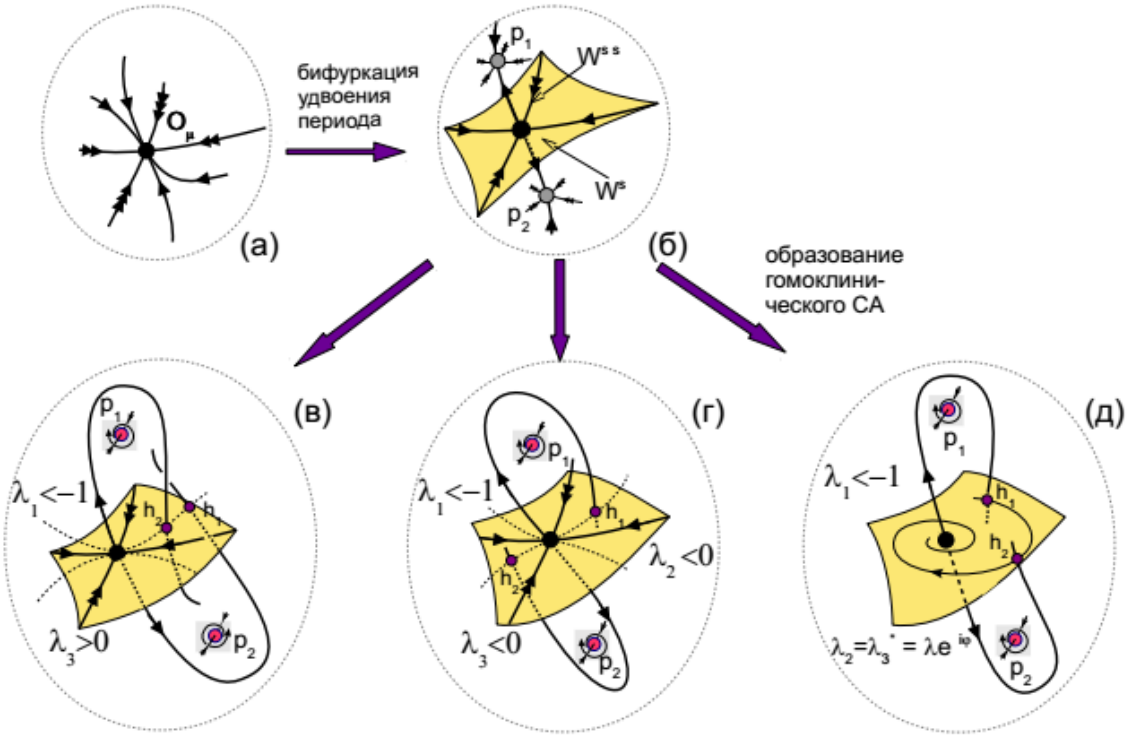


Рис.3. Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению неориентируемого аттрактора Лоренца (путь (а) – (б) – (в)), неориентируемого восьмерочного аттрактора (путь (а) – (б) – (г)), неориентируемого спирального восьмерочного аттрактора (путь (а) – (б) – (д))

Сценарий 2 возникновения дискретного неориентируемого восьмерочного аттрактора (путь (а) – (б) – (г) рисунка 3). Начало этого сценария такое же, как и в первом случае. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки такие, что $\lambda_1 < -1$ и $-1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 3(г), будет очень похож на дискретный ориентируемый восьмерочный аттрактор (ср. рис. 1г и 3г).

Сценарий 3 возникновения дискретного неориентируемого спирального восьмерочного аттрактора (путь (а) – (б) – (д) рисунка 3). Начало этого сценария такое же, как и в первых двух случаях. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки такие, что опять $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0<|\lambda|<1$ и $\varphi \neq 0,\pi$. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 3(д), будет очень похож на спиральный гомоклинический аттрактор, встречающийся у трехмерных потоков с центральной симметрией, имеющих состояние равновесия типа седло-фокус с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями.

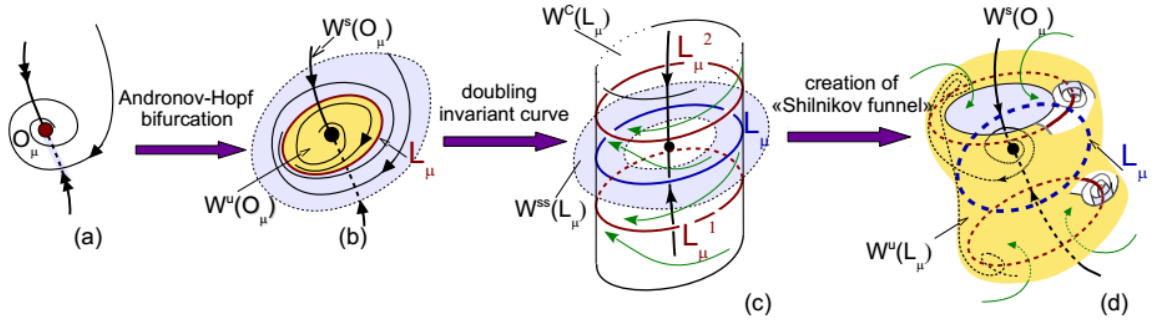


Рис. 4. Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова

Сценарий 4 возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова (рис. 4). Этот сценарий существенно отличается от всех рассмотрнных выше, во-первых, тем, что первой бифуркацией потери устойчивости точки *O* здесь является бифуркация Андронова-Хопфа, также, как и в случае ориентируемого аттрактора Шильникова, а во-вторых, образующийся гомоклинический аттрактор будет лежать в «двусторонней» воронке (ср. рис. 2в и 4д). В результате бифуркации Андронова-Хопфа неподвижная точка становится седло-фокусом типа (1,2), с мультипликаторами $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\psi}$, где $\lambda > 1$ и $\psi \neq 0,\pi$, т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а из нее рождается замкнутая инвариантная кривая $L\mu$, рис. 4b. Соответственно предполагается, что при дальнейшем изменении μ сначала аттрактором является эта кривая $L\mu$, а затем она теряет устойчивость, и формируется странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус и его неустойчивое двумерное многообразие. При этом, также как и в ориентируемом случае, важным этапом в становлении аттрактора является образование неориентируемой “воронки Шильникова”. Однако здесь воронка образуется по-другому – после бифуркации удвоения инвариантной кривой $L\mu$ (рис. 4c), и последующей смены типа периода 2 инвариантной кривой с узлового на фокусный. В результате неустойчивое многообразие точки о когда кривая $L\mu$ меняет свой тип с узлового на фокусный – тогда неустойчивое многообразие точки *O* начинает накручиваться одновременно на обе кривые $L\mu^1$ и $L\mu^2$, рис. 4d, и в образовавшуюся двустороннюю воронку будут втягиваться все траектории из поглощающей области.

Подчеркнем еще раз особенность бифуркации удвоения инвариантной кривой в неориентируемом случае, в результате которой сама устойчивая кривая становится седлового типа а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые той же длины. В ориентируемом случае при бифуркации удвоения инвариантной кривой в окрестности исходной кривой рождается инвариантная кривая двойной длины, обвивающая исходную.

3. Заключение

Сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов, рассмотренные в этой работе, имеют вполне простое и обозримое феноменологическое описание. Все они могут наблюдаться в общих однопараметрических семействах трехмерных ориентируемых и неориентируемых отображений, а также, как аттракторы Пуанкаре (по терминологии Шильникова [6]), соответственно,в четырехмерных и пятимерных потоках. Результаты, представленные в этой работе, будут обсуждены более подробно в докладе, и кроме того, для каждого из приведенных сценариев будут построены примеры их реализации в случае трехмерных обобщенных отображений Эно.

Литература

1. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений //Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – №. 1. – С. 3-28.

2. Gonchenko A., Gonchenko S., Kazakov A., Turaev D Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – Т. 24. – №. 08. – С. 1440005.
3. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2016. – Т. 337. – С. 43-57.
4. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of the atmospheric sciences. – 1963. – Т. 20. – №. 2. – С. 130-141.
5. Gonchenko S. V., Simó C., Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight //Nonlinearity. – 2013. – Т. 26. – №. 3. – С. 621.
6. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность //ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ. – Изд-во ННГУ, 2017. – С. 128-135.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИАГОНАЛЬНОГО DIRECT-ПОДОБНОГО МЕТОДА ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НАСТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА ПО НЕЛИНЕЙНЫМ КРИТЕРИЯМ КАЧЕСТВА[1*]

С.Ю. Городецкий

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе демонстрируется применение нового, разработанного автором, DIRECT-подобного метода многоэкстремальной оптимизации для задач со сложными ограничениями к задаче оптимальной настройки параметров системы управления некоторым модельным нелинейным динамическим объектом по заданным нелинейным критериям качества. Использован модальный регулятор. Нелинейные критерии качества вычисляются по численно полученным траекториям замкнутой системы и могут иметь разрывы. Предложена специальная постановка задачи оптимальной настройки по 4-м искусственно вводимым параметрам, обеспечивающая одновременное рассмотрение случаев действительных и комплексно-сопряженных пар корней характеристического полинома замкнутой линеаризованной системы.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, модальный регулятор, нелинейные критерии качества, глобальная оптимизация с ограничениями, DIRECT-подобный метод, эффективная диагональная схема.

1. Введение

Современные методы построения законов управления стационарными и нестационарными динамическими системами в большинстве используют их линеаризованные модели и изначально включают требования обеспечения оптимальности некоторых квадратичных показателей или характеристик заданных линейных целевых выходов (см., например, [1–4] и другие). Вместе с тем, алгоритмы синтеза управления, с одной стороны, всегда располагают набором свободных параметров, а с другой, построенные регуляторы применяются для управления исходными нелинейными системами. Их динамика может существенно отличаться от линеаризованной модели, если траектория нелинейного объекта может на значительной своей части существенно отклоняться от номинального значения. В этом случае становится актуальной задача дополнительной оптимальной настройки оставшихся свободных параметров построенного регулятора по дополнительным нелинейным критериям качества поведения нелинейной системы. Поскольку их значения определяются непосредственно по численно рассчитываемым траекториям замкнутой нелинейной системы, время вычисления может оказаться значительным, а зависимость от параметров – сложной. Является ожидаемым многоэкстремальный характер таких задач, что делает неэффективным применение методов локальной оптимизации.

Подходящим инструментом могли бы являться хорошо развитые методы липшицевой условной глобальной оптимизации (укажем, например, на [5–9]). Однако методы этого типа используют оценки констант Липшица функций задачи или их производных, что делает их неэффективными при появлении разрывов критериев в окрестностях решений. Вместе с тем, в указанной области применения разрывность критериев возможна и даже характерна.

Поэтому требуются методы, обладающие экономичным размещением точек измерений критериев, и одновременно – слабо чувствительные к наличию разрывов. Метод условной глобальной оптимизации с подходящими свойствами предложен автором в работе [10], новая более совершенная диагональная версия – в [11]. Его применение рассмотрено в разделе 3.

[1*] Работа выполнена при поддержке научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

2. Постановка задачи оптимальной настройки регулятора по нелинейным критериям качества для одной динамической системы

Для демонстрации применения построенного в [11] DIRECT-подобного метода условной глобальной оптимизации в качестве объекта управления используем математическую модель лабораторной установки фирмы Quanser «Портальный кран», ранее описанную в [12].

В принятой идеализации установка включает массивную каретку (тележку) с электромотором постоянного тока и невесомыми зубчатыми колесами радиуса r, движущуюся по горизонтально расположенным зубчатым рельсам. Электромотор вращает колеса через невесомый редуктор с передаточным числом N_p. Сопротивление активной катушки ротора – R, питающее напряжение – $v(t)$, индуктивностью обмотки пренебрегаем. В уравнения динамики входят: совокупная эквивалентная масса M каретки и электромотора с учетом эквивалентной инерционной массы его ротора, а также совокупный коэффициент вязкого трения h_x при движении вдоль рельс; x – горизонтальная координата центра масс каретки с электромотором.

К центру масс на шарнире свободно подвешен невесомый абсолютно жесткий стержень длины ℓ, с прикрепленной к его концу точечной массой m, имитирующей перемещаемый «краном» груз, φ – угол отклонения стержня от вертикали, h_φ – коэффициент вязкого трения.

Перед началом движения каретка и груз покоятся в положении $x = 0$. За счет регулировки напряжения $v(t)$ требуется обеспечить перемещение и стабилизацию груза в заданном положении $x = x^*$. Неформальной целью является минимизация времени переноса и стабилизации груза в окрестность положения x^* при жестких амплитудных ограничениях на характеристики раскачивания груза и ограничении величины модуля входного напряжения $v(t)$.

2.1. Замкнутая система нелинейных уравнений объекта с модальным управлением

Принятая модель объекта в исходных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} m\ell\ddot{x}\cos\varphi + m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = -h_\varphi\dot{\varphi}, \\ (M+m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - m\ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi = f(t) - h_x\dot{x}, \\ f(t) = c\cdot((v(t) - (\varepsilon/b)\dot{x})/R) \quad , \end{cases} \tag{1}$$

где $f(t)$ – эквивалентная сила линейной тяги, развиваемая электромотором с учетом редуктора и колес, c – коэффициент пропорциональности f току в катушке ротора, $b = r\cdot N_p^{-1}$ – коэффициент пропорциональности скорости вращения ротора с линейной скоростью каретки, ε – коэффициент самоиндукции в активной катушке ротора. Для расчетов использованы размерные значения параметров (в системе СИ) лабораторной установки из работы [12], была изменена только масса переносимого груза на значение $m = 0.025$ (примерно 2.33% от M).

Установка снабжена датчиками измерения x, φ и их производных по времени, поэтому управление построено в виде линейного (в каждом из диапазонов $\pm\pi + 2\pi\cdot k$ отклонений по циклической переменной φ) регулятора по состоянию, формирующего величину напряжения

$$v(t) = k_1\cdot((\varphi+\pi)\ \ mod\ \ 2\pi - \pi) + k_2\dot{\varphi} + k_3\cdot(x - x^*) + k_4\dot{x}. \tag{2}$$

В данной работе использован модальный регулятор, построенный по системе (1), линеаризованной в окрестности финального состояния $x = x^*, \dot{x} = 0, \varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$. Линейная система является управляемой, коэффициенты модального регулятора вычисляются согласно [1] через известное соотношение по желаемым значениям корней λ_i^* $(i = 1,..,4)$ характеристического полинома замкнутой системы.

2.2. Нелинейные критерии качества и исходная постановка задач оптимизации

Нелинейные критерии качества регулирования для этой задачи описаны в работе [12], они вычисляются по результатам численного интегрирования замкнутой нелинейной системы (1)-(2) при нулевых начальных условиях на заданном временном промежутке $[0, T^*]$. В результате определяются величины напряжения $v(t)$ на электромоторе, а также значения $\Delta(t)$ отклонения по координате x положения переносимого груза от целевого значения x^*. Очевидно, что $\Delta(t) = x^* - x(t) - \ell\cdot\sin(\varphi(t))$.

Используем пять критериев: T, H, h_1, h_2 и V_{max}. Критерий T оценивает время сходимости, H, h_1, h_2 введены для оценки немонотонности и колебательности зависимости $\Delta(t)$. Содержательный смысл первых четырех показан на рис. 1 (формульное описание правил вычисления критериев приведено в [12]). Значение последнего критерия соответствует максимальному по модулю значению напряжения на электромоторе:

$$V_{max} = max\{ \mid v(t) \mid : t \in [0, T^*] \}.$$

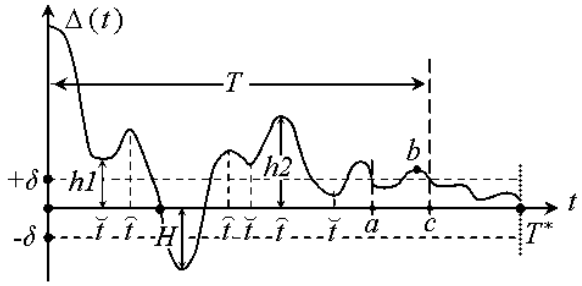


Рис. 1. Геометрическая интерпретация значений нелинейных критериев T, H, h_1, h_2, вычисляемых по зависимости $\Delta(t)$; δ и T^* – заданные параметры

Обозначим вектор действительных параметров регулятора через p, а множество допустимых значений p – через D. Для модального регулятора эти параметры должны быть взаимно однозначно связаны с набором желаемых значений собственных чисел λ_i^* $(i = 1, \dots, 4)$ замкнутой линеаризованной системы. Набор собственных чисел целесообразно размещать в заданном подмножестве комплексной плоскости, в виде пересечения вертикальной полосы и конуса:

$$-\eta_2 \le Re\,\lambda_i \le -\eta_1 < 0; \quad |Im\,\lambda_i| \le -\gamma \cdot Re\,\lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 4). \tag{3}$$

Как известно, это обеспечивает в линеаризованной системе экспоненциальное затухание переходных процессов с показателями, лежащими между $-\eta_1 \cdot t$ и $-\eta_2 \cdot t$, а также затухание колебательных составляющих не хуже, чем в $e^{-2\pi/\gamma}$ раз за период на каждой из собственных частот переходного процесса.

Оптимальные значения параметров p вычисляются из решения задач следующей структуры:

$$\min_{p \in D}\{ T(p):\ H(p) \le H^+;\ h1(p) \le h1^+;\ h2(p) \le h2^+;\ V(p) \le V^+\}, \tag{4}$$

где верхние ограничители $H^+, h1^+, h2^+$ составляют заданный процент (в расчетах – 1.25%) от уровня начального отклонения $|\Delta(0)|$ положения груза по x от целевой позиции. Значение V^+ определяется максимальным напряжением источника питания лабораторной установки.

Поскольку каждая из двух пар чисел $\lambda_{1,2}^*$ и $\lambda_{3,4}^*$ может включать как комплексно-сопряженные значения, так и два действительных, возникает четыре варианта постановок задач вида (4), если за компоненты векторов p выбрать реальные и мнимые частями этих чисел или же самими эти числа (при их действительности). Такой подход ранее использовался в [12]. В разделе 2.3 предложена новая унифицированная постановка задачи оптимальной настройки параметров, одновременно охватывающая все указанные выше случаи.

Заметим, что в [12] исследован характер зависимости критериев в задаче (4) от выбранных параметров в двумерных сечениях. Обнаружено наличие локальных экстремумов и участков разрывности. В [12] показано, что применение методов условной локальной оптимизации пакета Optimization Tool Box системы MATLAB недостаточно из-за попадания во множественные локальные экстремумы.

2.3. Унификация постановки задачи введением искусственных переменных

Конкретизируем постановку (4), введя пары искусственных переменных $p_{1,2}$ и $p_{3,4}$, связанные с двумя парами собственных чисел $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,4}$. Покажем на примере пары $\lambda_{1,2}$ (для $\lambda_{3,4}$ – аналогично). Вначале введем действительные переменные $u_{1,2}$, чтобы их значения порождали либо два действительных значения λ_1 и λ_2, либо комплексно-сопряженную пару $\lambda_{1,2}$:

$$\{\lambda_{1,2}\} = \begin{cases} \{u_1 \pm i \cdot u_2\}, & 0 \le u_2; \\ \{u_1;\ u_1 + u_2/\beta\}, & u_2 \le 0 \end{cases}. \quad (5)$$

При этом множество $\widetilde{D}_{1,2}$ возможных значений переменных $u_{1,2}$ является прообразом множества (3) для отображения (5): $\widetilde{D}_{1,2} = \{(u_1; u_2): -\eta_2 \le u_1 \le -\eta_1;\ -\beta\eta_2 - \beta u_1 \le u_2 \le -\gamma \cdot u_1\}$, а параметр $\beta > 0$ влияет на относительную меру подмножества, соответствующего действительным значениям $\lambda_{1,2}$.

Для применения метода глобальной оптимизации из [11] границы изменения переменных должны быть постоянными. Сделаем замену, перейдя к искусственным переменным $p_{1,2}$:

$$p_2 = \frac{\beta\cdot(\eta_2+u_1)+u_2}{\beta\cdot(\eta_2+u_1)-\gamma u_1}(\beta(\eta_2 - \eta_1) + \gamma\eta_1);\ p_1 = u_1. \quad (6)$$

Значения $p_{1,2}$ из (6) варьируются в пределах множества $D_{1,2}$, являющегося образом $\widetilde{D}_{1,2}$:

$$D_{1,2} = \{(p_1; p_2): \quad -\eta_2 \le p_1 \le -\eta_1;\ 0 \le p_2 \le \beta(\eta_2 - \eta_1) + \gamma\eta_1\}. \quad (7)$$

Аналогично (5)-(7) введем $p_{3,4}$ и множество $D_{3,4}$. Далее в (4) положим $D = D_{1,2} \times D_{3,4}$.

3. Применение нового DIRECT-подобного метода глобальной оптимизации с учетом ограничений

К унифицированной задаче (4) применим новый метод условной глобальной оптимизации [11], устойчивый к наличию разрывов критериев. Ограничимся кратким пояснением его основных концепций. Задача поиска минимума $f(x)$ на D с ограничениями $g_i(x) \le 0, i = 1,..,m$ сводится к задаче с одним обобщенным ограничением $g(x) = \max\{g_1(x); ...; g_m(x)\} \le 0$. Метод основан на адаптивном разбиении исходного множества поиска (в виде гиперинтервала D) на гиперинтервалы меньшего диаметра по схеме деления на три. Применен диагональный вариант этой схемы на основе эффективной диагональной кривой (описание есть в [6]), когда в каждом из гиперинтервалов D_i текущего разбиения функции задачи f и g вычисляются не в одной центральной, а в двух точках a^i и b^i на концах специально ориентируемой главной диагонали.

3.1. Принципы построения DIRECT-подобного метода для задач с ограничениями

Метод [11] использует следующие предположения. Если принять $L_i^f = |f_i^a - f_i^b|/d_i$, $d_i = \|b^i - a^i\|$, $L_i^g = |g_i^a - g_i^b|/d_i$, то на каждом из гиперинтервалов D_i функция f считается липшицевой с константой $L^f = L_i^f + \Delta L$, где значение ΔL одинаково для всех D_i и может быть любым от 0 до $+\infty$ (такой класс функций был предложен в [13]); функция g считается липшицевой на D_i с константой $L^g = L_i^g + \Delta L^g$, где значение ΔL^g одинаково для всех D_i и может быть любым из промежутка $[0, \alpha \cdot \Delta L]$ (α – параметр). Значение ΔL неизвестно и методом не оценивается. Неограниченность ΔL эквивалентна возможности конечных разрывов у функций.

Первый метод глобальной оптимизации при неограниченности константы Липшица и не использующий ее оценок построен в работе [14] и назван DIRECT (от DIviding RECTangles), а родственный метод при наличии ограничений – в [15]. Иной способ учета ограничений, основанный на непосредственном обобщения принципов исходного DIRECT, предложен в [10] (метод ExtDIR). Эти методы используют по одному измерению в центрах гиперинтервалов D_i. Новый метод [11], названный ExtDIR-diag, учитывает одновременно два измерения в D_i.

Для задач без ограничений диагональное обобщение DIRECT описано в [6], а его эффективность в сравнении с генетическими алгоритмами показана в [16].

С учетом принятых предположений о функциях в [11] получены следующие выражения для нижних оценок функций вдоль выбранной главной диагонали:

$$f^-(\Delta L, D_i) = \min\{f_i^a; f_i^b\} - \Delta L d_i/2;\ g^-(\Delta L^g, D_i) = \min\{g_i^a; g_i^b\} - \Delta L^g d_i/2.$$

В несколько упрощенном виде предложенные в [11] принципы отбора гиперинтервалов D_t, делимых на очередной итерации метода, можно кратко представить следующим образом:

$$\exists \Delta L \in [0, \infty): f^-(\Delta L, D_t) = \min\{f^-(\Delta L, D_i): D_i \in \mathfrak{D}^k, \exists \Delta L^g \in [0, \alpha \cdot \Delta L]: g^-(\Delta L^g, D_i) \le 0\},$$
$$\exists \Delta L^g \in [0, \alpha \cdot \Delta L]: g^-(\Delta L^g, D_t) \le 0.\ f^-(\Delta L, D_t) \le f_*^k - \eta_k,\ \eta_k > 0.$$

где f_k^* – рекордное значение целевой функции с учетом ограничений, а $\mathfrak{D}^k$ – текущее разбиение. В [11] указаны вычислительные процедуры выделения делимых гиперинтервалов D_t согласно описанным принципам. В [11] также исследован характер сходимости метода на некотором подмножестве задач с возможными разрывами функций.

3.2. Результаты численных экспериментов, выводы

Задача оптимальной настройки модального регулятора решалась в постановке (4). Начальное положение каретки соответствовало начальному отклонению груза от целевого положения $\Delta(0) = 1$. Принятые значения ограничителей: $H^+ = h1^+ = h2^+ = 0.0125$. Исходя из характеристик источника питания лабораторной установки выбрано $V^+ = 12$ в.

Собственные числа замкнутой системы варьировались на множестве (3) при $\eta_2 = 6$, $\eta_1 = 0.1$, $\gamma = 1.0$. По искусственным переменным (p_1, p_2) этим значениям соответствует множество $D_{1,2} = \{(p_1, p_2): -\eta_2 \le p_1 \le -\eta_1; 0 \le p_2 \le \beta \cdot (\eta_2 - \eta_1) + \gamma\eta_1\}$, а по (p_3, p_4) – множество $D_{3,4} = D_{1,2}$. В расчетах выбрано $\beta = 0.5$. Нелинейная система (1)–(2) интегрировалась до $T^* = 10$. При решении задачи по $N = 4$ переменным в (4) использовалось множество $D = D_{1,2} \times D_{3,4}$.

В целях исследования структуры зависимости критериев от искусственных переменных были получены виды линий равного уровня целевой функции $T(p)$ и допустимого множества в двумерных сечениях при фиксированных значениях p_3, p_4. При этом задача (4) решалась уже только по двум ($N = 2$) переменным p_1, p_2 на множестве поиска $D = D_{1,2}$. На рис. 2 слева показан вид сечения при $p_3 = -0.5$, $p_4 = 0.92296$. Допустимое множество выделено серым. Фрагмент границы «1» порожден ограничителями $H^+ = h1^+ = h2^+$, а фрагменты «2» и «3» – ограничителем V^+. Пунктирная линия «А» разделяет области комплексных собственных чисел (выше линии) от области действительных. На рисунке видно большое количество локальных минимумов, не позволяющих использовать методы локального поиска.

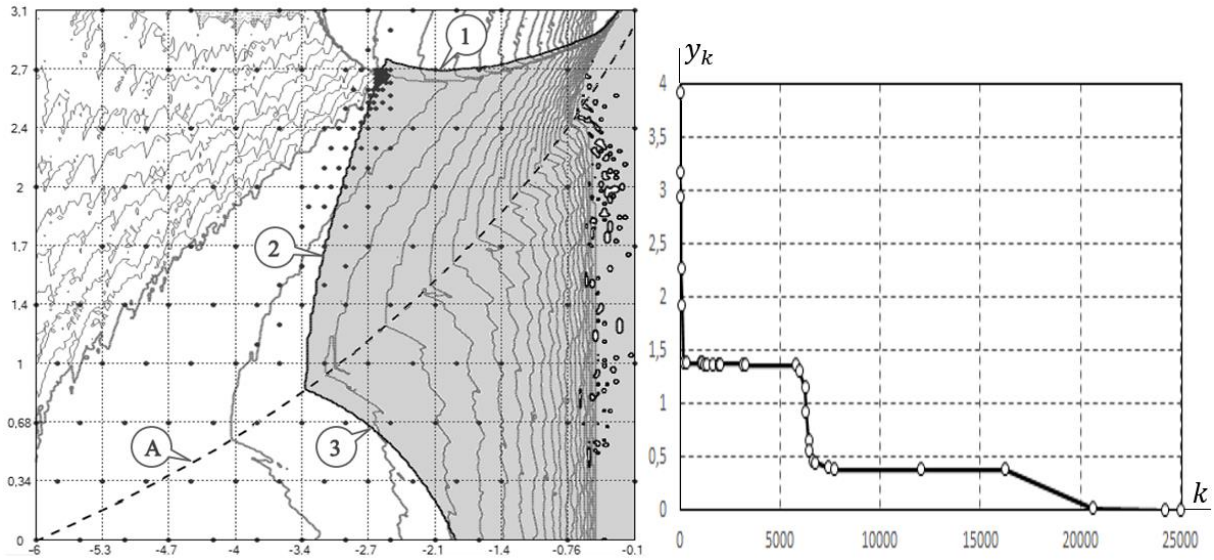


Рис. 2. Слева – структура поведения критериев задачи (4) в двумерном сечении и размещение 205 первых точек испытаний методом ExtDIR-diag (лучшее значение $T(p) = 1.64975$). Справа – график убывания рекордного значения целевой функции в специальном логарифмическом масштабе при решении задачи по $N = 4$ переменным (лучшее значение $T(p) = 1.49152$)

Применение при $N = 2$ метода ExtDIR-diag позволило получить приближение глобально оптимального значения критерия $T(p)$ с точностью лучше 0.00035 после вычисления критериев в 205 точках (рис. 2 слева). Решение задачи (4) по $N = 4$ переменным отражено на рис.2 (справа) в логарифмической шкале вида: $y_k = log_{10}(T(p_k^*) - T(p_{25000}^*) + 0.001) - log_{10}(0.001)$, где p_k^* – лучшие значения после измерения критериев в k точках. Например, после 1032 измерений погрешность по критерию $T(p)$ составила 0.02305, после 6257 измерений – 0.01314.

В проведенном исследовании показан сложный многоэкстремальный характер зависимости нелинейных показателей качества процесса регулирования от свободных параметров на примере модального регулятора. Предложена техника использования искусственных переменных для упрощения постановки задачи через введение единообразного описания случаев действительных и комплексных корней. Показана эффективность решения задачи оптимальной настройки новым диагональным DIRECT-подобным методом глобальной оптимизации с ограничениями [11].

Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т.2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н.Е. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
2. Gershon E., Shaked U., Yaesh I. H_∞–Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems. London: Springer, 2005.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H_2–оптимальное управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.
5. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints: Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2000.
6. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: Физматлит, 2008.
7. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 2. С. 255–269.
8. Городецкий С.Ю. Триангуляционные методы параболоидов в задачах многоэкстремальной оптимизации с ограничениями для класса функций с липшицевыми производными по направлениям // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 1(1). С. 144–155.
9. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации / Предисл.: В. А. Садовничий. М.: Изд-во МГУ. 2013.
10. Городецкий С.Ю. Несколько подходов к обобщению метода DIRECT на задачи с функциональными ограничениями // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 6 (1). С. 189–215.
11. Городецкий С.Ю. Диагональное обобщение метода DIRECT на задачи с ограничениями // АиТ. 2020. № 8. С. 84–105.
12. Городецкий С.Ю., Сорокин А.С. Построение оптимальных регуляторов по нелинейным критериям качества на примере одной динамической системы // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 2 (1). С. 165-176.
13. Городецкий С.Ю. О новой модели поведения целевой функции для диагональной реализации DIRECT-подобных методов // Научное периодическое издание CETERIS PARIBUS. – Москва: РИЦ ЭФИР, 2016. № 1. С. 4–16.
14. Jones D.R., Perttunen C.D., Stuckman B.E. Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant // J. Optim. Theory and Appl. 1993. V. 79. № 1. P. 157–181.
15. Jones D.R. The DIRECT global optimization algorithm // Chapter from book Encyclopedia of optimization. 7 Vols. 2nd revised and expanded ed., ed. by C.A. Floudas, P.M. Pardalos. Springer, 2009. P. 725–735.
16. Sergeyev Ya.D., Mukhametzhanov M.S., Kvasov D.E. On the efficiency of nature-inspired metaheuristics in expensive global optimization with limited budget. ScientificReports. 2018. No. 8:453.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ОДНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

А.В. Грезина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе описывается нелинейная математическая модель крутильных автоколебаний одной распределенной системы (борштанги, предназначенной для растачивания глубоких отверстий на токарном станке). Приводятся вывод аналитических выражений амплитуд автоколебаний и условия, при которых возможен жесткий режим возбуждения автоколебаний. Представлены результаты вычислительных экспериментов, полученные в системе аналитических вычислений Maple, при различных значениях параметров модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, расточная борштанга, крутильные автоколебания, жесткий режим возбуждения.

1. Введение

Известно, что при обработке глубоких отверстий на токарных станках на наиболее производительных режимах резания возникают вибрации, приводящие к снижению качества и точности обрабатываемой поверхности. Снижение уровня вибраций в машинах и механизмах является одной из основных проблем современного машиностроения. В силу специфики режущего инструмента и процесса обработки при растачивании глубоких отверстий проявляются поперечные и крутильные колебания, которые могут быть как вынужденными, так и самовозбуждающимися [1,2]. Известно [1,2], что возникновение крутильных автоколебаний может происходить под влиянием таких же факторов, которые приводят и к возникновению поперечных автоколебаний. Это падающая зависимость силы резания от скорости, работа по следу – изменение силы резания от толщины среза с запаздыванием, а также влияние трения между направляющими и поверхностью отверстия. Особо опасным является возникновение крутильных автоколебаний при обработке отверстий малых диаметров и большой относительной длины. Экспериментально было установлено [2], что при растачивании таких отверстий на токарном станке борштангами при определенных режимах резания наблюдается жесткий режим возбуждения автоколебаний борштанги. При жестком режиме возбуждения автоколебаний требуется рассмотрение задачи в нелинейной постановке, что невозможно без применения методов математического моделирования и современных информационных технологий.

2. Построение математической модели

Для построения математической модели, описывающей крутильные колебания борштанги, воспользуемся эквивалентной механической моделью борштанги, представленной на рис. 1.

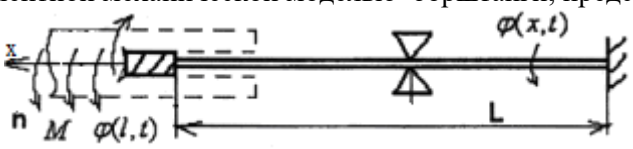


Рис. 1. Эквивалентная механическая модель расточной борштанги в распределенной идеализации

При построении математической модели предполагается, что растачивается глубокое отверстие длинной полой расточной борштангой, для которой отношение глубины (L) к диаметру отверстия (d) отвечает условию L/d » 5.

Математическая модель, описывающая крутильные колебания с учетом внутреннего трения, представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида [4]:

$$\rho J_P \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} - GJ_P \delta_1 \frac{\partial^3 \varphi(x,t)}{\partial t \partial x^2} - GJ_P \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} = M(L,t), \quad (1)$$

где $\phi(x,t)$ –угловые перемещения сечения стебля борштанги относительно оси x; $M(L,t)$ – периодический возмущающий момент; ρ, GJ_p – плотность и крутильная жесткость поперечного сечения стебля борштанги; δ_1.– коэффициент внутреннего трения материала.

Для задания краевых условий учитывается, что борштанга с одного конца жестко закреплена в суппорте в точке $x = 0$, а на втором конце при $x = L$ закреплена жестко расточная головка, на которую в процессе растачивания отверстия действуют два момента: момент сил резания M_F, зависящий от угловой скорости вращения детали и технологических режимов резания, и момент сил трения M_C между направляющими расточной головки и обработанной поверхностью. Линеаризованные выражения моментов M_F и M_C, записанные в окрестности стационарного значения угловой скорости вращения детали, имеют вид:

$$\Delta M_C = h_C \dot{\varphi}(L,t), \quad \Delta M_F = h_F \dot{\dot{\varphi}}(L,t), \quad \text{где } h_C = \frac{\partial M_C}{\partial \omega}, \quad h_F = \frac{\partial M_F}{\partial \omega}.$$

При этом краевые условия запишутся следующим образом:

$$\varphi(0,t) = 0, \; J_\Gamma \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right|_{x=L} = -GJ_P \delta_1 \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \, \partial x}\right|_{x=L} - GJ_P \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{x=L} - h_C \dot{\varphi}(L,t) - h_F \dot{\dot{\varphi}}(L,t), \quad (2)$$

где J_Γ – момент инерции расточной головки относительно оси x.

Для упрощения исследования с помощью проекционного метода Бубнова-Галеркина произведен переход от системы с распределенными параметрами к системе с сосредоточенными параметрами. В результате получено обыкновенное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\alpha \ddot{q}(t) + \beta \dot{q}(t) + \gamma q(t) = M(L,t)\Phi(L), \quad (3)$$

где $\alpha = \rho J_p \int_0^L \Phi^2(x)dx + J_\Gamma \Phi^2(L)$, $\beta = (h_C + h_F)\Phi^2(L) + \delta_1 GJ_p \int_0^L (\Phi'(x))^2 dx$,

$\gamma = GJ_p \int_0^L (\Phi'(x))^2 dx$, $\Phi(L)$ – первая собственная форма крутильных колебаний. Коэффициенты уравнения α, β, γ содержат всю информацию об исследуемом распределенном объекте.

Согласно критерию Рауса-Гурвица состояние равновесия системы q=0 будет устойчиво, если все коэффициенты характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3), положительны. Если в системе результирующее трение отрицательно ($h_C + h_F < 0$), то в процессе растачивания возникают крутильные автоколебания.

Таким образом, при растачивании глубоких отверстий могут возникнуть вынужденные крутильные колебания стебля борштанги с режущей головкой (если состояние равновесия устойчиво в малом по Ляпунову), или крутильные автоколебания в противном случае. Исследование динамического гашения вынужденных колебаний описано в работе [4].

3. Исследование жесткого режима возбуждения автоколебаний

Для нахождения амплитуд крутильных автоколебаний при жестком режиме возбуждения рассмотрим нелинейную математическую модель с запаздыванием:

$$\alpha \ddot{q}(t) + \beta \dot{q}(t) + \gamma q(t) = M(L,t)\Phi(L), \quad (4)$$

где τ – запаздывание (время одного оборота детали); μ – коэффициент перекрытия;

$$M(L,t) = r \cdot \Delta F_y,$$

$$\Delta F_y = \alpha_1 \Phi(L)(q(t) - \mu q(t-\tau)) + \alpha_3 \Phi^3(L)(q(t) - \mu q(t-\tau))^3 + \alpha_5 \Phi^5(L))(q(t) - \mu q(t-\tau))^5 +$$

$$+ \beta_1 \Phi(L)\dot{q}(t) + \beta_3 \Phi^3(L)\dot{q}^3(t) + \beta_5 V^5(x_0)\dot{q}^5(t). \tag{5}$$

Поиск амплитуд автоколебаний проведем с помощью метода энергетического баланса, в основе которого положено условие равенства рассеиваемой и поступающей в систему энергии. Для применения этого метода выполним ряд преобразований:

$$q(t) = a \sin \omega t, \quad \dot{q}(t) = a\omega \cos \omega t, \quad q(t-\tau) = q(t)\cos\omega\tau - \dot{q}(t)\frac{\sin \omega\tau}{\omega}.$$

Такое преобразование возможно при достаточно большом времени t, когда изображающая точка на фазовой плоскости находится вблизи предельного цикла. После этого выражение момента нелинейной силы резания примет вид:

$$\Delta F_y = \alpha_1 \Phi(L)(1 - \mu\cos\omega\tau)q(t) + \left(\alpha_1 \mu \frac{\sin \omega\tau}{\omega} + \beta_1\right)\Phi(L)\dot{q}(t) + \alpha_3 \Phi(L)(1 - \mu\cos\omega\tau)^3 q^3(t) +$$

$$+ 3\alpha_3 \Phi^3(L)(1 - \mu\cos\omega\tau)^2 \mu \frac{\sin \omega\tau}{\omega} q^2(t)\dot{q}(t) + 3\alpha_3 \Phi^3(L)(1 - \mu\cos\omega\tau)\mu^2 \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^2 q(t)\dot{q}^2(t) +$$

$$+ \alpha_3 \mu^3 \Phi^3(L)\left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^3 \dot{q}^3(t) + \beta_3 \dot{q}^3(t)\Phi^3(L) + \alpha_5 V^5(x_0)(q^5(t)(1 - \mu\cos\omega\tau)^5 + \tag{6}$$

$$+ 5q^4(t)(1 - \mu\cos\omega\tau)^4 \mu \frac{\sin \omega\tau}{\omega}\dot{q}(t) + 10q^3(t)(1 - \mu\cos\omega\tau)^3 \mu^2 \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^2 \dot{q}^2(t) +$$

$$+ 10q^2(t)(1 - \mu\cos\omega\tau)^2 \mu^3 \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^3 \dot{q}^3(t) + 5q(t)(1 - \mu\cos\omega\tau)\mu^4 \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^4 \dot{q}^4(t) +$$

$$+ \mu^5 \left(\frac{\sin \omega\tau}{\omega}\right)^5 \dot{q}^5(t)) + \beta_5 \Phi^5(L))\dot{q}^5(t).$$

Для применения метода энергетического баланса умножим левую и правую части уравнения на $\dot{q}(t)$, после чего получим выражение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha \dot{q}^2}{2} + \frac{\gamma q^2(t)}{2}\right) = -\beta \dot{q}^2(t) - r\Delta F_y \Phi(L)\dot{q}(t). \tag{7}$$

Средняя мощность за период колебаний должна быть равна нулю:

$$\frac{1}{T}\int_0^T d(K + \Pi) = -\frac{(\beta + \Phi^2(L)\beta_1)}{T}\int_0^T \dot{q}^2(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T r\Delta F_1 \Phi(L)\dot{q}(t)dt = 0. \tag{8}$$

где $\Delta F_1 = \Delta F_y - \beta_1 \Phi(L)\dot{q}(t)$.

После некоторых преобразований получим уравнение для нахождения амплитуд автоколебаний:

$$a^2\left[\left(\beta+\Phi^2(L)\beta_1\right)\pi\omega+\alpha_1\Phi^2(L)\mu\pi\sin\omega\tau\right]+$$

$$+a^4\left[\frac{3}{4}\alpha_3\Phi^4(L)\left(1-\mu\cos\omega\tau\right)^2\mu\pi\sin\omega\tau+\frac{3}{4}\alpha_3\Phi^4(L)\mu^3\left(\sin\omega\tau\right)^3\pi+\frac{3}{4}\beta_3\Phi^4(L)\omega^3\pi\right]+ \quad (9)$$

$$+a^6[\frac{5}{8}\alpha_5\Phi^6(L)(1-\mu\cos\omega\tau)^4\mu\pi\sin\omega\tau+\frac{5}{4}\alpha_5\Phi^6(L)(1-\mu\cos\omega\tau)^2\mu^3\pi\sin^3\omega\tau+$$

$$+\frac{5}{8}\beta_5\Phi^6(L)\pi\omega^5+\frac{5}{8}\alpha_5\Phi^6(L)\mu^5\pi\sin^5\omega\tau]=0.$$

Таким образом, можно составить следующее соотношение для определения амплитуд автоколебаний:

$$a^2c_1+a^4c_2+a^6c_3=0. \quad (10)$$

Найдем корни уравнения (9):

$$a_{1,2}=0, \qquad a_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2-\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1})}}{c_3}, \qquad a_{5,6}=\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2+\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1})}}{c_3},$$

(11)

где $c_1=\pi\left(\beta\omega+\beta_1\omega\Phi^2(L)+\alpha_1\Phi^2(L)\mu\sin\omega\tau\right)$,

$$c_2=\frac{3}{4}\pi\Phi^4(L)\left(\alpha_3\left(1-\mu\cos\omega\tau\right)^2\mu\sin\omega\tau+\alpha_3\mu^3\left(\sin\omega\tau\right)^3+\beta_3\omega^3\right),$$

$$c_3=\frac{5}{8}\alpha_5\Phi^6(L)(1-\mu\cos\omega\tau)^4\mu\pi\sin\omega\tau+\frac{5}{8}\alpha_5\Phi^6(L)\mu^5\pi\sin^5\omega\tau+$$

$$+\frac{5}{4}\alpha_5\Phi^6(L)(1-\mu\cos\omega\tau)^2\mu^3\pi\sin^3\omega\tau+\frac{5}{8}\beta_5\Phi^6(L)\pi\omega^5.$$

Таким образом, аналитические выражения амплитуд автоколебаний при жестком режиме возбуждений можно записать в более удобном виде:

$$a_1=0,\ a_2=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2-\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1})}}{c_3},\ a_3=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2+\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1})}}{c_3}. \quad (12)$$

Из соотношений (16) следует, что жесткий режим возбуждения автоколебаний возможен при следующих условиях:

а) $|c_2|>2\sqrt{c_3c_1},\ c_2-\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1}<0,\ c_3>0,$ (13)

б) $|c_2|>2\sqrt{c_3c_1},\ c_2+\sqrt{c_2{}^2-4c_3c_1}<0,\ c_3>0.$ (14)

Ниже в таблицах 1 и 2 представлены результаты вычислительных экспериментов для следующих значений параметров: длина борштанги L=3м, внешний и внутренний радиусы борштанги $r_1=0{,}04$ м, $r_2=0{,}035$ м ; модуль сдвига $G=793\cdot10^8$ Н/м^2; плотность материала $\rho=7800$ кг/м^3; подачи S=0,1, 0,2 и 0,3 мм/об; скорость резания 100 м/мин. Неизвестные коэффициенты α_1, α_3, α_5, β_1, β_3, β_5 получены методом наименьших квадратов по экспериментальным данным, представленным в работе [3]. Все вычислительные эксперименты проведены с использованием системы аналитических вычислений Maple. Расчетные значения коэффициентов $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5,\beta_1,\beta_3,\beta_5$ представлены в таблице 1 в безразмерном виде.

Таблица 1. Расчетные значения коэффициентов приращения нелинейной силы резания

	S=0.1 мм/об	S=0.2 мм/об	S=0.3 мм/об
α_1	0.698	0.711	0.554
α_3	-0.389	-0.198	-0.0345
α_5	0.573	0.196	0.191
β_1	-0.406	-1.005	-0.911
β_3	0.378	1.257	0.998
β_5	-0.203	-0.745	-0.689

Значения амплитуд автоколебаний при жестком режиме возбуждения представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты вычислительного эксперимента

Амплитуда автоколебаний, мкм	S=0.1 мм/об.	S=0.2 мм/об.	S=0.3 мм/об.
a_0	0,0	0,0	0,0
a_2	22.78	19.62	20.96
a_3	25.43	23.01	22.88

Условия (13,14), определяющие амплитуды автоколебаний, зависят от конструктивных параметров борштанги, внутреннего и внешнего вязкого трений, а также от технологических параметров резания.

Заключение

В работе построена нелинейная математическая модель, описывающая жесткий режим возбуждения крутильных автоколебаний расточной борштанги, которая может быть использована при исследовании нелинейных явлений, возникающих при обработке глубоких отверстий. Получены аналитические выражения амплитуд крутильных автоколебаний и условия, при которых возможен жесткий режим возбуждения автоколебаний. Представлены результаты вычислительных экспериментов при различных значениях параметров системы.

Методика и научные результаты исследований автоколебательных явлений, представленные в работе, внедряются в учебный процесс, используются при выполнении выпускных квалификационных работ бакалавров и магистров, а также при прохождении производственных практик и НИР в Институте информационных технологий, математики и механики Государственного Нижегородского университета имени Лобачевского.

Следует отметить, что научные исследования с применением информационных технологий успешно внедряются в учебный процесс, что соответствует современным принципам высшего образования [5,6]. Такая технология обеспечивает тесную связь науки и образования, которая традиционно развивается в ННГУ. Это соответствует трендам модернизации, существующей в ННГУ подготовки выпускников в области информации и коммуникационных технологий и лучшим образовательным практикам ННГУ [7-9].

Литература

1. Уткин Н.Ф. Обработка глубоких отверстий. Л.: Машиностроение, 1988. 265 с.
2. Городецкий Ю.И. Создание математических моделей сложных автоколебательных систем в станкостроении /Автоматизация проектирования. Вып.1. М.: Машиностроение, 1986. с.203-220.

3. Городецкий Ю.И., Буданков А.С., Комаров В.Н. Об одной системе экспериментального исследования динамики процесса резания металлов / Проблемы машиностроения и надежности машин, РАН, 2008, № 1, с. 80-86.
4. Грезина А.В., Комаров В.Н. О гашении крутильных колебаний в одной механической системе / Вестник Нижегородского университете им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 6-1. С. 185-188.
5. Захарова И.В., Кузенков О.А. Опыт актуализации образовательных стандартов высшего образования в области ИКТ / Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13. № 4. С. 46-57.
6. Кузенков О.А., Захарова И.В. Модернизация математических программ на основе Российских и Международных стандартов / Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 14. № 1. С. 233-244.
7. Басалин П.Д., Безрук К.В.: Архитектура гибридной интеллектуальной системы поддержки принятия решений. Нейрокомпьютеры (8), 26–35 (2012).
8. Басалин П.Д., Тимофеев А.Е.: Продуктовая гибридная интеллектуальная образовательная среда. Educ. Technol. Soc. 21 (1), 396–405 (2018).
9. Никифорова И.В. Использование средств информационных технологий для изучения моделей нелинейной динамики / Образовательные технологии и общество. 2019. Т.22. № 4. С. 212-224.

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОГО ТОРА С БИФУРКАЦИОННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРА, ОТВЕЧАЮЩИМИ РОЖДЕНИЮ НЕТРИВИАЛЬНЫХ БАЗИСНЫХ МНОЖЕСТВ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1*]

В.З. Гринес, А.О. Казаков, Д.И. Минц

Национальный исследовательский университет «'Высшая школа экономики»

В настоящем докладе изучаются введенные в работе [1] однопараметрические семейства диффеоморфизмов двумерного тора, являющиеся суперпозицией алгебраического автоморфизма Аносова и прямого произведения двух отображений Мёбиуса. В зависимости от свойств автоморфизма Аносова возможны различные сценарии прохождения параметра через бифуркационные значения, связанные с рождением нетривиальных инвариантных множеств различной размерности.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, нетривиальное базисное множество, гиперболический аттрактор, бифуркации.

Отображение Мёбиуса $\boldsymbol{M_\varepsilon}$ представляет собой отображение окружности, которое зависит от единственного параметра $\boldsymbol{\varepsilon} \in (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{1})$. При $\boldsymbol{\varepsilon = 0}$ оно является тождественным, при $\boldsymbol{\varepsilon \neq 0}$ оно является диффеоморфизмом Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из 2-х неподвижных точек (одной стоковой и одной источниковой), координаты которых не зависят от параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$. Естественным образом определяется прямое произведение двух отображений Мёбиуса $\boldsymbol{M^*_\varepsilon}$, которое действует на двумерном торе. При $\boldsymbol{\varepsilon \neq 0}$ данное прямое произведение является диффеоморфизмом Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из 4-х неподвижных точек (одной стоковой $\boldsymbol{O_1}$, одной источниковой $\boldsymbol{O_2}$ и двух седловых).

Пусть A_1 и A_2 – алгебраические автоморфизмы Аносова, индуцированные матрицами $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ соответственно. Положим $f_{\varepsilon,i} = M^*_\varepsilon \circ A_i$, где $i \in \{1,2\}$. При изменении параметра ε от 0 до ε_1^{**} (от 0 до ε_2^{**}), где ε_1^{**} и ε_2^{**} меньше нуля, суперпозиция $f_{\varepsilon,1}$ ($f_{\varepsilon,2}$) претерпевает в точности одну (в точности две) бифуркации «вилка». В случае $i = 1$ в результате бифуркации рождается одномерный гиперболический аттрактор, а в случае $i = 2$ - инвариантное гиперболическое нетривиальное нульмерное множество. Более точно возможны следующие два сценария, описанные в теоремах 1 и 2 ниже.

Теорема 1

1) При $\varepsilon \in (\varepsilon_1^*; 0]$ отображение $f_{\varepsilon,1}$ является диффеоморфизмом Аносова.

2) При $\varepsilon = \varepsilon_1^*$ отображение $f_{\varepsilon,1}$ не является структурно устойчивым диффеоморфизмом, который топологически сопряжён диффеоморфизму Аносова.

3) При $\varepsilon \in [\varepsilon_1^{**}; \varepsilon_1^*)$ отображение $f_{\varepsilon,1}$ является структурно устойчивым А-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из нульмерного источника и одномерного просторно расположенного аттрактора Λ_ε (определение см. в [2], а также в [4]).

4) При переходе параметра ε через бифуркационное значение ε_1^* в отображении $f_{\varepsilon,1}$ происходит бифуркация «вилка». В результате данной бифуркации седловая неподвижная точка O_2 отображения $f_{\varepsilon,1}$ становится источником, в её окрестности появляется пара седловых неподвижных точек, которые являются s-граничными для аттрактора Λ_ε (определение граничной точки базисного множества см. в [3], а также в [4]).

Теорема 2

1) При $\varepsilon \in (\varepsilon_2^*; 0]$ отображение $f_{\varepsilon,2}$ является диффеоморфизмом Аносова.

[1*] Доклад выполнен при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041).

2) При $\varepsilon = \varepsilon_2^*$ отображение $f_{\varepsilon,2}$ не является структурно устойчивым диффеоморфизмом, который топологически сопряжён диффеоморфизму Аносова.

3) При $\varepsilon \in [\varepsilon_2^{**}; \varepsilon_2^*)$ отображение $f_{\varepsilon,2}$ является структурно устойчивым А-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из нетривиального нульмерного базисного множества Ω_ε и нульмерных источника и стока. При этом множество Ω_ε является просторно расположенным на двумерном торе и не имеет (s,u)-граничных точек.

4) При переходе параметра ε через бифуркационное значение ε_2^* в отображении $f_{\varepsilon,2}$ происходят две бифуркации «вилка». В результате данных бифуркаций седловая неподвижная точка O_1 отображения $f_{\varepsilon,2}$ становится стоком, в её окрестности появляется пара седловых неподвижных точек, которые являются u-граничными для множества Ω_ε; седловая неподвижная точка O_2 отображения $f_{\varepsilon,2}$ становится источником, в её окрестности появляется пара седловых неподвижных точек, которые являются s-граничными для множества Ω_ε.

Литература

1. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A., Kantorovich–Rubinstein–Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020. – Т. 30. – №. 7. – С. 073114.
2. Р. В. Плыкин, “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, Матем. сб., 94(136):2(6) (1974), 243–264; R. V. Plykin, “Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces”, Math. USSR-Sb., 23:2 (1974), 233–253.
3. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I”, Тр. ММО, 32, Издательство Московского университета, М., 1975, 35–60.
4. В.З. Гринес, О.В. Починка, Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2011, 424 с.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ 3-МОНОТОННОЙ РЕГРЕССИИ НА ОСНОВЕ АКТИВНОГО МНОЖЕСТВА[1*]

А.А. Гудков, С.П. Сидоров

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Представленная работа содержит описание двойственного алгоритма на основе активного множества, разработанного для решения задачи построения 3-монотонной регрессии. Задача построения k-монотонной регрессии является расширением задачи построения монотонной регрессии (также называемой изотонной регрессией) на случай k-монотонности. Задача построения k-монотонной регрессии, как и задача построения изотонной регрессии, относятся к классу задач с ограничением на форму данных, получившего большое внимание в последние десятилетия. Представленный в данной работе алгоритм позволяет построить оптимальное решение задачи, то есть найти 3-монотонный вектор, наилучшим образом приближающий исходный вектор.

Ключевые слова: изотонная регрессия, монотонная регрессия, двойственный алгоритм, активное множество, k-монотонная регрессия.

1. Введение

В последнее время повышенный интерес вызывают задачи статистики с ограничениями на форму данных [1-5]. Наиболее изученной из них является задача построения монотонной регрессии, наилучшим образом приближающей заданный вектор. Многие результаты в этой области можно найти в работах [6,7]. Кроме того, в недавней работе [5] был изучен двойственный алгоритм на основе активного множества.

Продолжением задачи построения монотонной регрессии является задача построения k-монотонной регрессии, где k – некоторое натуральное число. Применяется k-монотонная регрессия во многих сферах, например, в непараметрической статистике [4], при сглаживании эмпирических данных [7], в задачах динамического программирования [9] и формосохраняющей аппроксимации [10].

Существует так же ряд статей, содержащие описание других алгоритмов построения k-монотонных регрессий [11,12].

2. Задача построения k-монотонной регрессии

2.1. Основная задача

Вектор $z \in R^n$ будем называть k-монотонным, если выполняется условие $\Delta^k z_i \geq 0, \forall 1 \leq i \leq n-k$, где $\Delta^k z_i = \Delta^{k-1} z_{i+1} - \Delta^{k-1} z_i, \forall 1 \leq i \leq n-k$ и $\Delta^0 z_i = z_i, \forall 1 \leq i \leq n.$ То есть вектора $z \in R^n$ называется k-монотонным, если все конечные разности k-го порядка для этого вектора неотрицательны. Обозначать будем следующим образом: $z \in \Delta_n^k$.

Основную задачу построения k-монотонной регрессии можем записать в виде: $(z-y)^T(z-y) = \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2 \to \min\limits_{z \in \Delta_n^k},$ где $y \in R^n$ - заданный вектор, для которого строится k-монотонная регрессия, а $z \in R^n$ - вектор значений k-монотонной регрессии.

[1*]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0006).

2.2. Случай построения 3-монотонной регрессии

Основную задачу можно записать в виде задачи динамического программирования. Кроме того, такая задача будет сильно выпуклой, из-за чего будет иметь единственное решение. Для случая построения 3-монотонной регрессии основная задача будет записываться в виде задачи динамического программирования следующим образом: $F(z) := \frac{1}{2} z^T z - y^T z \to \min$, где минимум берется по всем векторам $z \in R^n$, таким, что для них выполняется $g_i(z) := -(z_{i+3} - 3z_{i+2} + 3z_{i+1} - z_i) \le 0, \forall 1 \le i \le n-3.$

Для данной задачи можем записать условия Каруша-Куна-Таккера:

1. $\nabla F(z) + \sum_{i=1}^{n-3} \mu_i \nabla g_i(z) = 0,$
2. $g_i(z) \le 0, \forall 1 \le i \le n-3,$
3. $\mu_i \ge 0, \forall 1 \le i \le n-3,$
4. $\mu_i g_i(z) = 0, \forall 1 \le i \le n-3,$

где $\nabla g_i(z)$ – градиент вектора $g_i(z)$, а $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{n-3})^T \in R^{n-3}$ – множитель Лагранжа. Решение задачи будет оптимальным только в том случае, если оно удовлетворяет данным условиям.

3. Двойственный алгоритм на основе активного множества для решения задачи построения 3-монотонной регрессии

Активным множеством S будем называть множество, состоящее из блоков, вида $[l, r-3] \subset [1, n-3]$, при этом должны выполняться условия $[l, r-3] \subset S, l-1 \notin S, r-2 \notin S,$ и $S = [l_1, r_1] \cup [l_2, r_2] \cup ... \cup [l_m, r_m]$, где $l_1 \ge 1, r_m \le n-3, r_i + 4 \le l_{i+1}, i \in [1, m-1],$ и m - количество блоков.

Алгоритм построения 3-монотонной регрессии с помощью псевдокода записывается следующим образом (рис. 1).

$S \leftarrow \varnothing;$
$z(S) \leftarrow y;$
`while` $z(S) \notin \Delta_n^k$ `do`
$S = S \cup \{i : z_{i+3}(S) - 3z_{i+2}(S) + 3z_{i+1}(S) - z_i(S) < 0\};$
`solve` $z := \arg\min_{z \in U} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2,$
$U := \{p \in R^n : p_{i+3} - 3p_{i+2} + 3p_{i+1} - p_i, \forall i \in S\};$
$z(S) \leftarrow z;$
`end while`
`return z(S)`

Рис. 1. Алгоритм построения k-монотонной регрессии

Вычислительная сложность алгоритма составляет $O(n^3)$.

Теорема. Для любого, наперед заданного активного множества $S \subset S^*$, алгоритм сходится к точному решению задачи построения 3-монотонной регрессии не более, чем за $n - |S|$ ите-

раций, где n – размерность задачи, а S^* – активное множество, получившееся на последней итерации алгоритма.

В процессе доказательства данной теоремы рассматриваются различные ситуации, которые возможны в процессе применения алгоритма, и доказывается выполнения условий Каруша-Куна-Таккера в каждом из случаев. При доказательстве используются леммы, аналогичные леммам из статьи .

В качестве примера рассмотрим задачу построения 3-монотонной регрессии для вектора $y \in R^{151} : y = \frac{x_i^3}{1000} + \frac{x_i^2}{100} + \frac{x_i}{100} + \phi_i$, где $x = (-50,-49,...,99,100)$, а $\phi_i \sim N(0,5)$ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами 0 и 5.

Точки на рисунке (рис. 2) являются значениями вектора *y* а значения *k*-монотонной регрессии лежат на построенной кривой.

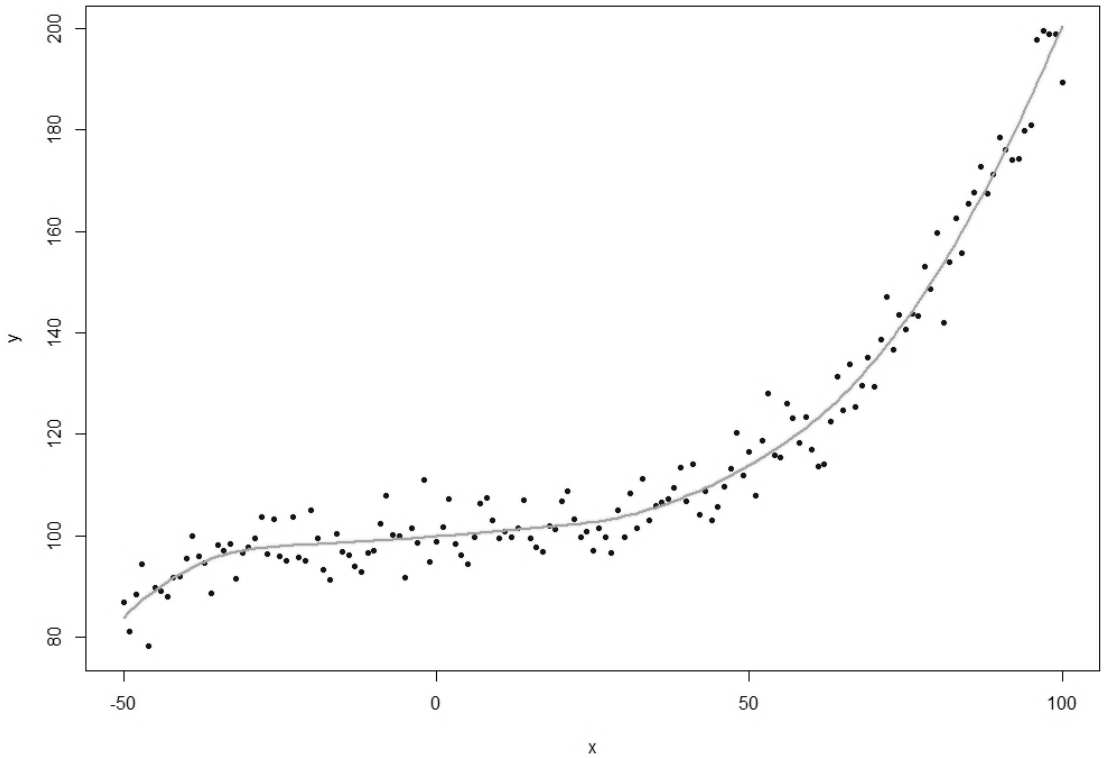


Рис 2. Пример работы алгоритма

4. Заключение

В данной статье рассмотрен новый алгоритм построения 3-монотонной регрессии, использующий активное множество. На каждой итерации алгоритма сначала определяется активное множество, после чего решается стандартная задача поиска минимума, которая является более простой, чем исходная задача.

В разделе 3 приводится доказательство оптимальности решения, полученного с помощью данного алгоритма, а также приведен пример решения прикладной задачи.

Литература

1. Burdakov O., Sysoev O. A Dual Active-Set Algorithm for Regularized Monotonic Regression, J. Optim. Theory Appl., 2017, vol. 172, no. 3, pp. 929–949. doi: 10.1007/ s10957-017-1060-0.
2. Brezger A., Steiner W. J. Monotonic Regression Based on Bayesian P-Splines: An application to estimating price response functions from store-level scanner data, J. Bus. Econ. Stat., 2008, vol. 26, no. 1, pp. 90–104. doi: 10.1198/073500107000000223.

3. Chen Y. Aspects of Shape-constrained Estimation in Statistics, PhD Thesis. Cambridge, UK, University of Cambridge, 2013, https://ethos.bl.uk/OrderDetails.do?uin=uk.bl. ethos.648300.
4. Chen, Yining. Aspects of Shape-constrained Estimation in Statistics: Ph.D. thesis / University of Cambridge. - 2013.
5. Burdakov, Oleg. A dual active-set algorithm for regularized monotonic regression / Oleg Burdakov, Oleg Sysoev // Journal of Optimization Theory and Applications. - 2017. - Vol. 172, no. 3. - Pp. 929-949.
6. Robertson, T. Order Restricted Statistical Inference / T Robertson, F.T. Wright, R.L. Dykstra. - John Wiley & Sons, New York, 1988.
7. Barlow, R.E. The isotonic regression problem and its dual / R.E. Barlow, H.D. Brunk // Journal of the American Statistical Association. - 1972. - Vol. 67, no. 337. - Pp. 140-147.
8. Hastie, T. Statistical Learning with Sparsity / T. Hastie, R. Tibshirani, M. Wainwright. - New York: Chapman and Hall/CRC, 2015.
9. Cai, Yongyang. Advances in numerical dynamic programming and new applications / Yongyang Cai, Kenneth L. Judd // Handbook of Computational Economics. - Elsevier, 2014. - Vol. 3. - Pp. 479-516.
10. Boytsov, D. I. Linear approximation method preserving k-monotonicity / D. I. Boytsov, S. P. Sidorov // Siberian electronic mathematical reports. - 2015. - Vol. 12. - Pp. 21-27.
11. Sidorov, S.P. Algorithms for sparse k-monotone regression // Lecture Notes in Computer Science. - Vol. 10848. - Delft, The Netherlands: Springer International Publishin, 2018. - Pp. 546-556.
12. Gudkov, A. A. A dual active set algorithm for optimal sparse convex regression / A. A. Gudkov, S. V. Mironov, S. P. Sidorov, S. V. Tyshkevich // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ-мат. науки. – 2019. Т. 23, №1. – С. 227-246.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ

Г.А. Гуйо

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Протестированы основные методы кластеризации и классификации данных на примере сигналов отдельных нейронов, распознаваемых по внеклеточным записям электрического потенциала. Проведено сравнение алгоритмов PCA и t-SNE для распознавания сигналов, а также выявлена возможность использования этих методов в работе с другими схемами для улучшения классификации посредством уменьшения размерности исходных данных. Показано, что при правильном извлечении признаков, методы обеспечивают сопоставимое качество распознавания, но при этом имеют различное быстродействие.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, распознавание сигналов, метод ближайших соседей, метод главных компонент.

За последние десятилетия развитие науки, техники и технологий совершило стремительный скачок, вследствие чего компьютеризация и автоматизация процессов затронула почти все сферы жизни современного человека. В основном автоматизация пришла в те области, где деятельность обуславливается некоторым алгоритмом, то есть заранее известна и понятна логика решения задач. Но развитие технологий вышло на новый уровень, и появилась возможность с помощью машинного обучения и искусственных нейронных сетей решать задачи, не имеющие точного решения [1, 2]. С их помощью можно проводить анализ и распознавание образов, строить системы кластеризации и классификации. Применение нейросетевых методов сейчас становится обыденным явлением. Многие современные веб-сайты и устройства используют алгоритмы машинного обучения, начиная с автоматических рекомендаций по просмотру фильмов, заказа еды, и заканчивая распознаванием образов и различных сигналов. Главной особенностью нейросетевых методов является обучение самого алгоритма на основе тренировочных данных, с помощью которых при классификации мы можем получить корректный результат.

В данной работе изучаются возможности применения нейросетевых методов и алгоритмов машинного обучения для решения задач распознавания и классификации сигналов с помехами на примере сигналов внеклеточного электрического потенциала [3]. Выбраны экспериментальные данные, содержащие сигналы 3-х близко расположенных нейронов и проведено сопоставление различных вариантов их распознавания. Так как амплитуда сигналов отдельных нейронов зависит от расстояния от них до регистрирующего микроэлектрода, то такие сигналы будут немного отличаться. Помимо амплитуды различия связаны также с формой, однако в присутствии шума проблема распознавания принадлежности каждого спайка напряжения конкретному нейрону является сложной и не всегда корректно решаемой. Используемые в работе экспериментальные данные включали более 10000 записей нейронных спайков по 64 отсчета в каждой.

Учитывая большой объем данных для непосредственного применения методов кластеризации, вначале необходимо выделить некоторые признаки, которые будут однозначно характеризовать каждый импульс. Такими признаками были выбраны коэффициенты дискретного преобразования Фурье и амплитуда сигнала. Первым шагом разделения сигналов на группы был выбран метод k-средних. Метод обладает высоким быстродействием и качественно разделяет данные, но если мы не знаем приблизительно количество кластеров, то этот метод может быть не очень удобным на практике.

В рамках метода сдвига среднего (Mean Shift) всё пространство интерпретируется как распределение вероятностей. При применении алгоритма мы получаем координаты центров кластеров, их количество, а также метки принадлежности к определенному кластеру для каждой точки, т.е. класс каждого сигнала.

Метод ближайших соседей (*k Nearest Neighbors*) – это метод обучения с учителем, где классификатор основан на определении сходства образов. Идея метода заключается в следующем: классифицируемый сигнал относится к тому классу, к которому принадлежит ближайший сигнал из обучающего набора данных. Для определения категории входной точки данных метод использует поиск ближайших точек из обучающего набора. Был сгенерирован обучающий набор данных на основе усреднённых форм сигналов с добавлением нормального шума. Этот алгоритм позволяет работать с перекрытыми группами данных, и точность определения класса для сгенерированных данных составила около 98%.

Также были рассмотрены методы понижения размерности данных (PCA и t-SNE), которые могут служить для распознавания сигналов. Избавляясь от шума в исходных данных, методы PCA и t-SNE оставляют полезную информацию, которая как раз и отличает данные друг от друга. Метод t-SNE лучше разделяет данные, чем PCA, но требует более длительных вычислений: в проводимых расчетах применение PCA осуществлялось за 0.157 секунды, а метода t-SNE за 57.6 сек. Несмотря на это, оба метода можно применять для улучшения работы алгоритмов классификации, т.к. они уменьшают размерность с 64 отсчетов до 2-х величин.

При реализации многослойного персептрона использовался набор данных из выделенных признаков для сигналов с нормальным шумом, который до этого использовали для проверки метода ближайших соседей, чтобы сравнить их между собой. Была построена сеть с 2-мя скрытыми слоями по 128 нейронов каждый и с 2-мя нейронами в выходном слое, т.к. нужно различить два класса сигналов. Функцией активации являлась ReLu, так как у неё отсутствует возрастание и затухание градиента обратного распространения ошибки, и при этом обучение происходит достаточно быстро. На обучение было выбрано 70% случайно взятых сигналов из 10000 возможных исходных данных. Остальные 30% были использованы как тест для нейросети. Расчеты показали, что многослойный персептрон может различать зашумлённые сигналы с точностью 96-98%, при этом он работает намного быстрее, чем метод ближайших соседей – в среднем 29.5 секунды для нейронной сети и 6 минут 37 секунд для метода ближайших соседей.

Таким образом, в работе протестированы основные методы кластеризации и классификации данных. Проведено сравнение алгоритмов PCA и t-SNE для распознавания сигналов, а также выявлена возможность использования этих методов в работе с другими схемами для улучшения классификации посредством уменьшения размерности исходных данных. Изучена возможность применения алгоритмов для анализа и распознавания на примере сигналов внеклеточного электрического потенциала. Показано, что при правильном извлечении признаков из исходных данных, методы хорошо работают, но имеют разное время реализации. Исходя из этого, самым удобным оказался многослойный персептрон, так как на обучение и тестирование у него уходило в среднем 29.5 секунды, что в разы быстрее, чем у других алгоритмов. В будущем продолжится работа над изучением нейронных сетей с более сложной архитектурой и их комбинирование с различными алгоритмами машинного обучения для анализа зашумлённых сигналов.

Литература

1. Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview // Neural Networks. 2015. Vol. 61. P. 85–117. DOI: 10.1016/j.neunet.2014.09.003.
2. Federer C., Xu H., Fyshe A., et al. Improved object recognition using neural networks trained to mimic the brain’s statistical properties // Neural Networks. 2020. Vol. 131. P. 103–114. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.07.013.
3. Lewicki M.S. A review of methods for spike sorting: the detection and classification of neural action potentials // Network: Comput. Neural Syst. 1998. Vol. 9. P. R53–R78. DOI: 10.1088/0954-898X_9_4_001.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЙСЯ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ[1*]

Е.В. Евстифеев[1,2], О.И. Москаленко[1,2]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
[2]Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

При помощи метода расчета локальных ляпуновских показателей получены характеристики перемежаемости на границе обобщенной синхронизации. В качестве анализируемых систем выбраны однонаправленно и взаимно связанные системы Лоренца и Ресслера. В случае однонаправленной связи для проверки эффективности метода использовался также метод вспомогательной системы. Получены характеристики, хорошо соответствующие теоретическим. Результаты работы показали, что метод расчета локальных показателей Ляпунова может быть успешно применён для анализа систем как при однонаправленной, так и взаимной связи.

Ключевые слова: перемежающаяся обобщенная синхронизация, локальные показатели Ляпунова, характеристики перемежаемости

1. Введение

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных явлений радиофизики [1]. Среди нескольких типов хаотической синхронизации выделяется обобщенная синхронизация [2]. Данный тип синхронизации привлекает широкое внимание исследователей в связи с его широкой распространенностью, а также возможностью возникновения между связанными системами с различной размерностью фазового пространства. Обобщенную синхронизацию успешно применяют для анализа взаимодействия между системами биологической, химической и физической природы [3], для скрытой передачи информации [4] и т.д.

Под обобщенной синхронизацией в контексте теории динамических систем подразумевается существование связи между состояниями систем в виде функционального соотношения (в общем виде функционала). При увеличении величины параметра связи, начиная с некоторого критического значения, устанавливается непрерывная обобщенная синхронизация. При значении параметра связи немного меньше критического значения долгие синхронизированные колебания систем (ламинарные фазы) чередуются с короткими асинхронными колебаниями (турбулентными всплесками). Такой тип поведения носит название перемежающейся обобщенной синхронизации [5]. Этот режим и является предметом исследования в данной работе.

2. Методы и материалы

2.1. Методы

При анализе характеристик перемежаемости обычно используется метод вспомогательной системы [6] в связи с простотой его реализации. Однако, данный подход оказывается неприменим в случае взаимной связи. Вследствие, возникает потребность в разработке других, более универсальных методов, одинаково хорошо работающих при любом типе связи.

В данной работе предложен метод выделения характерных фаз поведения при помощи расчета локальных ляпуновских показателей [7]. Он основан на алгоритме Бенеттина. В локальном

[1*]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 19-12-00037). Исследование систем со сложной топологией аттрактора осуществлялось в рамках гранта Президента РФ (проект № МД-21.2020.2).

подходе используется конечный интервал накопления, а не бесконечный, вследствие чего появляется возможность наблюдения временной динамики систем. Обычно исследуется величина старшего условного локального ляпуновского показателя, положительный знак которого указывает на наличие турбулентных фаз при величине параметра связи немного меньше критической.

2.2. Исследуемая модель

Для исследования были выбраны однонаправленно и взаимосвязанные системы с достаточно простой (системы Ресслера [2,5]) и достаточно сложной (системы Лоренца [8]) топологией аттрактора. В ходе проведенных исследований установлено, что в первом случае наблюдается перемежаемость on-off типа, характеристики которой описываются степенными законами, а во втором - перемежаемость перескоков, описываемая экспоненциальными закономерностями, что находится в хорошем соответствии с результатами работ [5,8].

3. Результаты и выводы

При помощи метода расчета локальных показателей Ляпунова были оценены основные характеристики перемежаемости в случае однонаправленно и взаимно связанных систем Ресслера и Лоренца. Для достижения высокой точности результатов в случае однонаправленной связи необходимые параметры нового метода были подобраны таким образом, чтобы получаемые характеристики перемежаемости совпадали с результатами метода вспомогательной системы. Затем, при тех же параметрах были оценены аналогичные характеристики в случае взаимной связи.

Все полученные характеристики хорошо соответствуют теоретическим закономерностям. Это указывает на возможность исследования перемежающегося поведения однонаправленно и взаимно связанных систем с различной топологией аттрактора при помощи расчета локальных показателей Ляпунова.

Литература

1. Boccaletti S, Kurths J., Osipov G. et al. The synchronization of chaotic systems // Physics Report. 2002. Vol. 366, Issue 1-2. P. 1-101.
2. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E. Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // Phys Rev E. 2011. Vol. 84, No. 3. P.037201.
3. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurts J.et al. Synchronization approach to analysis of biological systems // Fluct. Noise Lett. 2004. Vol. 4, No 1. P. L53.
4. Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E. Generalized synchronization of chaos for secure communication: Remarkable stability to noise // Physics Letters A. 2010. Vol. 374, No. 29. P. 2925-2931.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A. Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // Europhysics Lett. 2005. V. 70. № 2. P. 169-175.
6. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // Phys Rev E. 1996. Vol. 53, Iss. 5. P.4528.
7. Abarbanel H. D. I., Brown R., Kennel M.B. Variation of Lyapunov Exponents on a Strange Attractor // Journal of Nonlinear Science. 1991. Vol. 1. P. 175–199.
8. Москаленко О.И., Короновский А.А., Ханадеев В.А. Перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах со сложной топологией аттрактора // ЖТФ. 2019. Т. 89, № 3. С. 338-341.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ ТЕРАГЕРЦОВЫХ ГИРОТРОНОВ[1*]

В.Е. Запевалов[1], А.С. Зуев[1], Е.С. Семенов[1,2]

[1]Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН
[2]Научно-образовательный математический центр ННГУ

Отыскание КПД мощных гиротронов и изучение режимов их работы требует решения самосогласованных задач о взаимодействии электронного пучка с СВЧ полем в резонаторе. В работе рассматриваются две математические модели: стационарная, сводящаяся к задаче Штурма–Лиувилля для уравнения неоднородной струны, и нестационарная, совмещающая уравнение Шредингера и систему уравнений движения электронов. Данные модели могут быть использованы для анализа влияния омических потерь в резонаторе на эффективность и устойчивость рабочего режима в гиротроне.

Ключевые слова: уравнение неоднородной струны, уравнение Шредингера, метод Кранка–Николсона, электронно-волновое взаимодействие, гиротрон.

1. Введение

Для повышения эффективности работы гиротрона (генератора СВЧ-излучения) требуются адекватные модели электронно-волнового взаимодействия. В частности, важен учёт влияния электронного пучка на структуру электромагнитного поля (ЭМП) в резонаторе, что приводит к необходимости решения самосогласованных задач с нефиксированной структурой поля. В данной работе рассматриваются две модели: стационарная и нестационарная. Стационарная задача [1, 2] позволяет быстро находить КПД генерации в предположении, что гиротрон работает в одномодовом режиме. Но в гиротронах важную роль играет конкуренция мод и возможно возникновение различных многочастотных режимов. Кроме того, актуальным является исследование сценариев включения гиротрона (с учётом зависимости напряжения, тока и других параметров прибора от времени). Во всех этих случаях необходимо решать существенно более сложную нестационарную задачу [1, 3]. В обеих рассматриваемых задачах подразумевается, что резонатор образован отрезками круглых (азимутально-симметричных) слабонерегулярных волноводов, радиус которых близок к критическому радиусу рабочих колебаний моды TE_{mp}. Уравнения учитывают неоднородность статического магнитного поля, разброс осцилляторных скоростей и разброс ведущих центров электронных траекторий.

Электроны в пучке представлены фракциями: N_θ начальных фаз влёта (относительно поля), N_g групп с различными осцилляторными скоростями (но с постоянной начальной энергией пучка), N_R фракций с радиусам ведущих центров электронных орбит (для моделирования несоосности пучка и оси магнитного поля, широких пучков, многолучевых систем и т.п.)

2. Стационарные уравнения

На интервале $[z_{in}, z_{out}]$ совместно решаются $N_a = N_\theta \times N_g \times N_R$ пар уравнений движения (для поперечной и продольной компоненты импульса электронов):

$$\frac{dp_c}{dz} = f_{p_c}(z, p_c, p_\parallel, F), \qquad \frac{dp_\parallel}{dz} = f_{p_\parallel}(z, p_c, p_\parallel) \tag{1}$$

и уравнение для электромагнитного поля, согласованного с пучком

$$\frac{d^2F}{dz^2} + {k_\parallel}^2(z)F = J(z, \{p_c, p_\parallel\}) \tag{2}$$

с начальными условиями $F(z_{in}) = F_{in}$,

[1*] Авторы выражают благодарность А. С. Сергееву за ценные советы и внимание к работе.

$$p_{\parallel}(z_{in}) = p_{\parallel,in}\{g\}, \qquad p_c(z_{in}) = e^{i\theta_0} \cdot p_{\perp,in}\{g\}, \qquad \theta_0 = 2\pi\frac{j_\theta}{N_\theta}, \qquad j_\theta = \overline{1, N_\theta}. \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dz} - ik_{\parallel}F = 0, & z = z_{in}, \\ \dfrac{dF}{dz} + ik_{\parallel}F = 0, & z = z_{out}. \end{cases} \tag{4}$$

Величины F и p_c – комплексные, p_z – действительные. Функция $k_{\parallel}(z)$ определяется геометрией резонатора *R(z)*. Интегрирование уравнений движения вместе с уравнением неоднородной струны проводится методом Рунге-Кутта 4-го порядка. В результате решения задачи Штурма-Лиувилля (1)–(4) получается продольная структура поля *F(z)* при найденных значениях частоты ω и начальной амплитуды F_{in}. Поиск собственных значений (ω, F_{in}) проводится аналогично описанному в [4] методу с использованием принципа аргумента и дальнейшим уточнением решения [двумерным] методом Ньютона.

3. Многомодовые нестационарные уравнения

В прямоугольной области $[z_{in},\ z_{out}]\times[0,\ T_{fin}]$ совместно решаются $N_a = N_\psi \times N_\theta \times N_g \times N_R$ пар уравнений движения и N_s уравнений для поля

$$\frac{\partial p_c}{\partial z} = f_{p_c}(z, p_c, p_{\parallel}, \{F_s\}), \qquad \frac{dp_z}{dz} = f_{p_{\parallel}}(z, p_c, p_{\parallel}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial z^2} - i\frac{\partial F_s}{\partial T_s} + {k_{\parallel s}}^2(z)F_s = J_s(z, \{p_c, p_{\parallel}\}) \tag{6}$$

с начальными импульсами (3), ненулевым начальным полем $F_s(z, 0) = F_{in,s}(z)$ и безотражательными граничными условиями на концах для каждой s-той мод

$$F(z_{in}, \tau) - C_1\int_0^{\tau}\frac{\partial F(z_{in}, \tilde{\tau})}{\partial z}\frac{e^{C_L(\tau-\tilde{\tau})}}{\sqrt{\tau-\tilde{\tau}}}\cdot d\tilde{\tau} = 0, \tag{7}$$

$$F(z_{out}, \tau) + C_1\int_0^{\tau}\frac{\partial F(z_{out}, \tilde{\tau})}{\partial z}\frac{e^{C_R(\tau-\tilde{\tau})}}{\sqrt{\tau-\tilde{\tau}}}\cdot d\tilde{\tau} = 0. \tag{8}$$

Использование уравнений в общем виде (5)–(8) удобно для описания численных методов. Конкретные выражения для правых частей f_{p_c}, $f_{p_{\parallel}}$, J_s и констант C_1, C_L, C_R выбираются в зависимости от требуемой степени упрощения модели.

Для решения задачи (5)–(8) методом конечных разностей используется неявная схема Кранка–Николсона [5, стр.192–193], предложенная в 1947 г. Она обеспечивает второй порядок точности и по временной, и по пространственной координатам. Введём равномерную сетку

$$\{z_l, \tau^j\} \equiv \{z_{in} + \delta_z \cdot l, \delta_\tau \cdot j\}, \qquad l = \overline{0, N_z}, \qquad j = \overline{0, N_\tau},$$

$$\delta_z = \frac{(z_{out} - z_{in})}{N_z}, \qquad \delta_\tau = \frac{T_{fin}}{N_\tau}.$$

Комплексные амплитуды поля в узлах сетки обозначаются $F_l^j \equiv F_s(z_l, \tau^j)$. Правые части уравнения обозначим $f_l^j \equiv J_s(z_l, \tau^j) - {k_{\parallel s}}^2(z_l)F_l^j$. Аппроксимация производных разностями:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(z_l, \tau^j) \approx \frac{1}{\delta_\tau}\cdot\left(F_l^j - F_l^{j-1}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z_l, \tau^j) \approx \frac{1}{\delta_z^2}\cdot\left(F_{l-1}^j - 2F_l^j + F_{l+1}^j\right). \tag{10}$$

Для внутренних узлов ($z_{in} < z < z_{out}$) аппроксимация уравнения (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &\frac{C_0}{\delta_\tau}\cdot\left(F_l^j - F_l^{j-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(f_l^j + f_l^{j-1}\right) - \\ &\quad -\frac{1}{2\delta_z^2}\cdot\left(F_{l-1}^j - 2F_l^j + F_{l+1}^j + F_{l-1}^{j-1} - 2F_l^{j-1} + F_{l+1}^{j-1}\right), \qquad l = \overline{1, N_z - 1}, \end{aligned} \tag{11}$$

Если аппроксимировать производную в граничных условиях (7)-(8) по формулам

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z_l,\tau^j) \approx \frac{1}{\delta_z}\left(F_l^j - F_{l-1}^j\right) \approx \frac{1}{\delta_z}\left(F_{l+1}^j - F_l^j\right),$$

точность решения упадёт до $O(\delta_z)$, но используя информацию о структуре уравнения (6), можно повысить порядок аппроксимации производной. Введём обозначения:

$$\sigma_l^j = \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z_l,\tau^j), \qquad C_0 = -in_s$$

и запишем для уравнения (6) конечную разность по схеме Кранка-Николсона только по времени (9) аналогично шаблону (11), но сохраняя вторую производную в неизменном виде:

$$\frac{C_0}{\delta_\tau}\cdot\left(F_l^j - F_l^{j-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(f_l^j + f_l^{j-1}\right) - 3\left(\sigma_l^j + \sigma_l^{j-1}\right) \tag{12}$$

Возьмём представление первой производной из [6, стр. 87-88]; например, для правого конца она имеет вид (для левого конца все построения аналогичны):

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z_{out},\tau) = \frac{1}{\delta_z}\left(F_{N_z}^j - F_{N_z-1}^j\right) + \delta_z\cdot\left(2\sigma_{N_z}^j + \sigma_{N_z-1}^j\right). \tag{13}$$

Используя (12) при $l = N_z$ и $l = N_z - 1$, найдём выражение для $(2\sigma_{N_z}^j + \sigma_{N_z-1}^j)$ в (13), выделяя множители при $F_{N_z-1}^j$ и $F_{N_z}^j$ для формирования последней строки матрицы СЛАУ:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial z}(z_{out},\tau) = W_{N_z-1}\cdot F_{N_z-1}^j + W_{N_z}\cdot F_{N_z}^j + W_{j-1},\\
W_{N_z-1} = -\left(\frac{1}{\delta_z} + \frac{C_0}{2}\frac{\delta_z}{\delta_\tau}\right), \qquad W_{N_z} = \left(\frac{1}{\delta_z} - \frac{2}{3}C_0\frac{\delta_z}{\delta_\tau}\right),\\
W_{j-1} = \delta_z\cdot\left\{\frac{C_0}{3\delta_\tau}\left(2F_{N_z}^{j-1} - F_{N_z-1}^{j-1}\right) - \left(2\sigma_{N_z}^{j-1} + \sigma_{N_z-1}^{j-1}\right)\right.\\
\left. + \frac{1}{6}\left(2f_{N_z}^{j-1} + f_{N_z-1}^{j-1} + 2f_{N_z}^j + f_{N_z-1}^j\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{14}$$

Дополнительную трудность добавляет интегрируемая особенность, содержащаяся в граничном условии (8). Разобьём интеграл на сумму интегралов, соответствующих шагам по времени

$$\int_0^\tau \frac{\partial F(z_{out},\tilde\tau)}{\partial z}\frac{e^{C_R(\tau-\tilde\tau)}}{\sqrt{\tau-\tilde\tau}}\cdot d\tilde\tau = \sum_{\tilde j=1}^{j} I_{\tilde j}, \qquad I_{\tilde j} = \int_{(\tilde j-1)\cdot\delta_\tau}^{\tilde j\cdot\delta_\tau} \frac{\partial F(z_{out},\tilde\tau)}{\partial z}\frac{e^{C_R(\tilde j\cdot\delta_\tau-\tilde\tau)}}{\sqrt{\tilde j\cdot\delta_\tau-\tilde\tau}}\cdot d\tilde\tau$$

В подынтегральном выражении каждого $I_{\tilde j}$ линеаризуем по $\tilde\tau$ только производную и экспоненту; интегралы же от $(\tau-\tilde\tau)^{-1/2}$ и $\tilde\tau/\sqrt{\tau-\tilde\tau}$ берутся аналитически.

В результате получается трёхдиагональная матрица СЛАУ, в правой части которой содержатся комбинации значений поля с предыдущего временного слоя F^{j-1}. Решая эту СЛАУ методом прогонки можно за $O(N_z)$ операций найти значения узлов F_l^j, $l = \overline{0, N_z}$.

На каждом шаге по времени разрешение неявных зависимостей между полем и импульсами частиц производится в несколько этапов. Сначала уравнения движения решаются в поле на предыдущем слое и находится $J[F^{j-1}]$, после чего используя (11)-(14) составляется и решается СЛАУ, и, тем самым находится несамосогласованное поле на текущем слое $\tilde F_l^j$. Затем в этом поле опять решаются уравнения движения и получается $J[\tilde F^j]$, и уже с такой правой частью аналогичным образом находится самосогласованное поле на текущем слое F_l^j.

4. Влияние омических потерь на устойчивость работы терагерцовых гиротронов.

Описанные в работе алгоритмы реализованы в пакете программ ANGEL (Analyzer of a Gyrating Electrons) [7], который используется в ИПФ РАН и НПП «Гиком» для анализа электронно-волнового взаимодействия в резонаторах гиротронов. Стационарные уравнения позволяют определить КПД и мощность выходного сигнала гиротрона в одномодовом режиме. Многомодовая нестационарная самосогласованная модель позволяет проводить анализ различных не-

стационарных процессов, исследовать различные динамические и автомодуляционные режимы генерации в гиротроне.

В качестве примера рассмотрим моды $TE_{28,3}$ и $TE_{-10,3}$, работающие на втором и основном циклотронном резонансе соответственно. Исследованы режимы работы серии гиротронов, работающих в диапазоне 30 ГГц - 1 ТГц при ускоряющем напряжении 15 кВ и силе тока 0.5 А. Для каждого варианта гиротрона длина пространства взаимодействия и магнитное поле оптимизировались для достижения максимального КПД моды $TE_{28,3}$. На рисунке 1а показаны расчётные распределения высокочастотного поля вдоль пространства взаимодействия указанных мод. Мода $TE_{28,3}$ имеет характерную одногорбую структуру с высокой дифракционной добротностью, соответствующую оптимальному электронно-волновому взаимодействию; при этом мода $TE_{-10,3}$ является бегущей и имеет развитую продольную структуру с меньшей дифракционной добротностью. На рисунке 1б показана характерная зависимость КПД от частоты генерации мод $TE_{28,3}$ и $TE_{-10,3}$. При увеличении частоты генерации основной рабочей моды $TE_{28,3}$ с 30 ГГц до 1000 ГГц расчётный волновой КПД уменьшается с 11,35% до 1,77%; при этом омические потери практически не влияют на эффективность работы моды $TE_{-10,3}$.

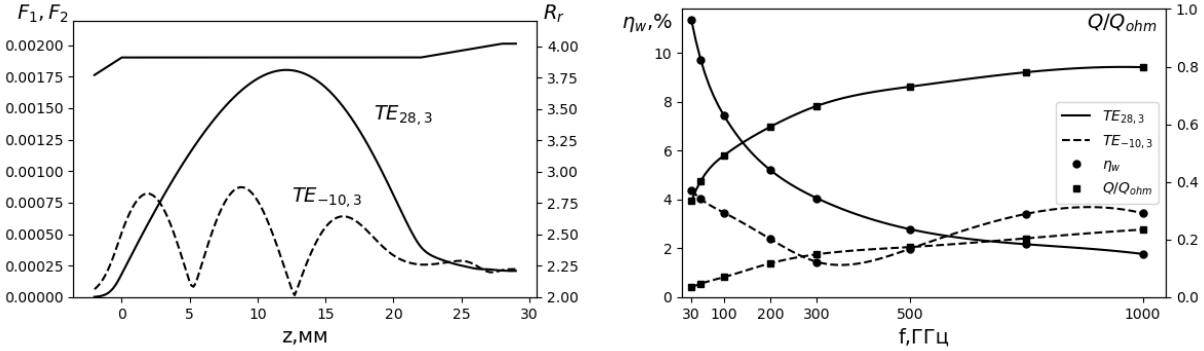


Рис. 1. (а) Пример профиля резонатора и продольных структур мод $TE_{28,3}$ и $TE_{-10,3}$.
(б) Расчётная доля омических потерь, КПД гиротрона в зависимости от частоты генерации моды $TE_{28,3}$

Многомодовая нестационарная самосогласованная модель позволяет провести анализ устойчивости мод $TE_{28,3}$ и $TE_{-10,3}$ в указанном диапазоне частот. На рисунке 2 показана временная зависимость амплитуд мод при оптимальной начальной амплитуде моды $TE_{28,3}$ и малой амплитуде моды $TE_{-10,3}$. В случае варианта гиротрона с частотой генерации 30 ГГц мода $TE_{28,3}$ в стационарном режиме является устойчивой; вместе с тем, в случае гиротрона с частотой 500 ГГц неустойчивость генерации моды $TE_{28,3}$ приводит к её подавлению и возбуждению паразитной моды $TE_{-10,3}$. При этом генерация излучения на моде $TE_{-10,3}$ остаётся устойчивой во всём рассматриваемом диапазоне частот.

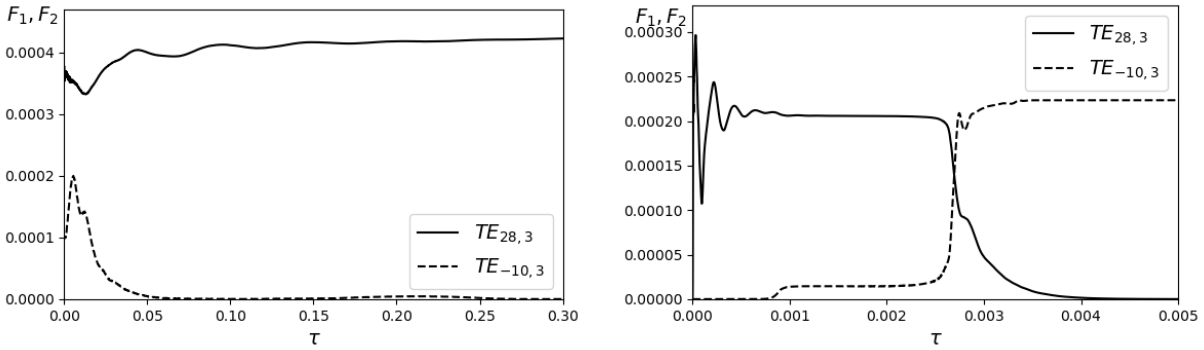


Рис. 2. Зависимость амплитуд мод $TE_{28,3}$ и $TE_{-10,3}$ от времени, полученная в рамках многомодовой нестационарной самосогласованной модели. (а) 30 ГГц, (б) 500 ГГц

Нарушение устойчивости моды на второй циклотронной гармонике в гиротроне терагерцового диапазона объясняется повышенным влиянием омических потерь в резонаторе и особенностями электронно-волнового взаимодействия мод, синхронных с разными циклотронными

гармониками. Для ряда приложений [8] предпочтительным является режим работы на второй циклотронной гармонике, поскольку переход к работе на высоких циклотронных гармониках позволяет снизить внешнее магнитное поле в гиротроне в n раз, где n – номер циклотронной гармоники. Таким образом, важной для гиротронов терагерцового диапазона является задача реализации устойчивой одномодовой генерации на высоких циклотронных гармониках, что, как правило, решается выбором рабочей моды, выбором параметров электронного пучка и электродинамической системы гиротрона, а также при помощи различных методов дополнительной селекции рабочей моды.

Литература

1. Moiseev M.A., Nemirovskaya L.L., Zapevalov V.E., Zavolsky N.A. Numerical simulation of mode interaction in 170 GHz/1 MW gyrotrons for ITER. // International Journal of Infrared and Millimeter Waves, 1997. Vol. 18, No. 11. P. 2117–2128.
2. Завольский Н.А., Запевалов В.Е., Моисеев М.А. О достижении высокого КПД релятивистского гиротрона. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 2001. Том XLIV, № 4. С. 345–352.
3. Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С. Установление автоколебаний в электронных СВЧ генераторах с дифракционным выводом излучения. // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1986. Том XXIX, № 1. С. 106–114.
4. Семенов Е.С. Расчёт собственных мод, возбуждаемых в резонаторе гиротрона. // Сборник материалов международной конференции «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ–2018). Секции 4–9. – Симферополь, 2018. С. 118–121.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972, 418 с.
6. Форсайт Дж, Малькольм М, Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980, – 280 с.
7. Планкин О.П., Семенов Е.С. Комплекс программ ANGEL-2DS для моделирования пушки гиротрона. Инструкция для пользователя / О.П. Планкин, Е.С. Семенов. – ИПФ РАН: Н. Новгород, 2011. – 32 с.
8. Glyavin M.Yu., Idehara T., Sabchevski S.P. Development of THz gyrotrons at IAP RAS and FIR UF and their applications in physical research and high-power THz technologies // IEEE Trans. on Terahertz Science and Technology, 2015. Vol. 5, No. 5, P. 788-797.

АЛГОРИТМЫ ОНЛАЙН СППРДЛЯ ВЫБОРА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ[1*]

А.И. Ивлева[1,2], С.В. Смирнов[1,2]

[1]Самарский федеральный исследовательский центр РАН,
[2]Институт проблем управления сложными системами РАН

Рассматривается задача создания интерактивной системы поддержки принятия решений при выборе двухпараметрического закона распределения положительно определенной случайной величины. Приводятся алгоритмы и сценарии работы системы. При этом основным приоритетом является ориентированный на практическое применение подход, позволяющий при минимальной информации выбирать наиболее соответствующий конкретным потребностям вид закона распределения из конечного множества заданных моделей. Предлагается набор инструментов для быстрого и наглядного сравнения законов распределения, а также простые, интуитивно понятные для пользователя ориентированные на решение практических задач критерии ранжирования законов распределения. Применение разрабатываемой СППР можно совмещать с современными средствами обработки статистических данных.

*Ключевые слова:*система поддержки принятия решений, многокритериальный выбор закона распределения, статистическая обработка данных.

1. Введение

Необходимость выбора теоретического закона распределения случайной величины (СВ) по экспериментальным данным подтверждается большим количеством публикаций по данной тематике [1–6]. Они охватывают постановки практических задач из самых различных отраслей науки и техники. Наличие аналитической модели случайного фактора важно для описания различного рода систем, процессов, поскольку позволяет определять, прогнозировать и оптимизировать важные характеристики. Кроме того, законы распределения являются входными данными при построении имитационных моделей в современных системах расчетов (MatLab, AnyLogic, SciInTech и др.).

В настоящее время существует множество подходов к решению задачи подбора теоретического распределения СВ. Обзоры большинства из них можно найти в [7, 8]. Основными недостатками упомянутых подходов являются:

1. Неоднозначность и субъективность результата по нескольким причинам:
   - Несколько распределений могут не противоречить нулевой гипотезе.
   - Выбор распределения зависит от критерия согласия.
   - Чувствительность результата к выбираемой длине интервала группировки данных.
2. Необходимость достаточно большой выборки данных или наличия априорной информации о форме распределения при малых выборках.
3. Сложность адекватного выбора и оценки эффективности методики обработки статистических данных для инженеров, экономистов, биологов и др.

В настоящей работе рассматривается задача создания интерактивной системы поддержки принятия решения (СППР) при выборе двухпараметрического закона распределения непрерывной, определенной на положительной полуоси СВ. Такие СВ являются крайне важными для описания таких параметров реальных систем как расстояния, временные интервалы, отклонения от заданного значения, характеристики надежности, прочности, экономические показатели и др. При этом основным приоритетом является ориентированный на практическое применение

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, регистрационный номер АААА-А19-119030190053-2.

и критерии пользователя подход, позволяющий при минимальной информации выбирать наиболее соответствующий потребностям конкретного исследования вид закона распределения из конечного множества заданных моделей. В основу СППР положены существующие простые, интуитивно понятные для пользователя количественные и качественные критерии, степень важности которых пользователь сможет настраивать самостоятельно, учитывая необходимость нахождения компромисса между точностью модели и ее конструктивностью (вычислимостью).

2. Сценарий и алгоритм работы СППР при выборе закона распределения

Сценарий работы СППР при выборе закона распределенияСВ можно описать следующим образом.

Действующее лицо: пользователь.

*Цель:*сравнение и ранжирование законов распределения на основе имеющихся у пользователя статистических данных.

Предусловия: пользователь открыл web-страницу СППР.

Главная последовательность:

1. Пользователь загружает файл со статистическими данными.
2. Система вычисляет математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение с интервалами доверия; список распределений, их параметры, значения диференциальных энтропий; графики функций распределений, плотностей распределений, интенсивностей распределений, функций восстановления; окна диаграмм рассеяния с возможностью выбора из выпадающего списка распределения на каждой оси; таблицу метрик распределений; окно выбора групп важности критериев и ввода дополнительных параметров.
3. Пользователь выбирает пару законов распределения на осях диаграммы рассеяния.
4. Система автоматически выводит диаграмму рассеяния для выбранных распределений.
5. Пользователь выбирает в выпадающих списках для каждого из 6 критериев выбора закона распределения группу важности и дополнительные параметры по некоторым критериям.
6. Система выдает пользователю рекомендацию по выбору закона распределения СВ; при необходимости пользователь может открыть справку о генезисе данной рекомендации.

Альтернативная последовательность:

1. В случае, если введенные пользователем данные соответствуют экспоненциальному распределению, система выведет математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение с интервалами доверия; список распределений, их параметры, значения диференциальных энтропий; графики функций распределений, плотностей распределений, интенсивностей распределений, функций восстановления; рекомендацию по применению экспоненциального распределения без окна многокритериального выбора.

Алгоритм сравнения и ранжирования законов распределения, который лежит в основе разрабатываемой СППР, представлен на рисунке 1. Вывод 1 содержит экспоненциальное распределение; параметр распределения; значение дифференциальной энтропии; графики функции распределения, плотности распределения, интенсивности распределения, функции восстановления; рекомендация по применению экспоненциального распределения. Вывод 2 содержит список распределений для гипер- или гипоэкспоненциального случая; параметры распределений; значения дифференциальной энтропии; графики функций распределения, плотности распределения, интенсивности распределения, функции восстановления; таблицу метрик.

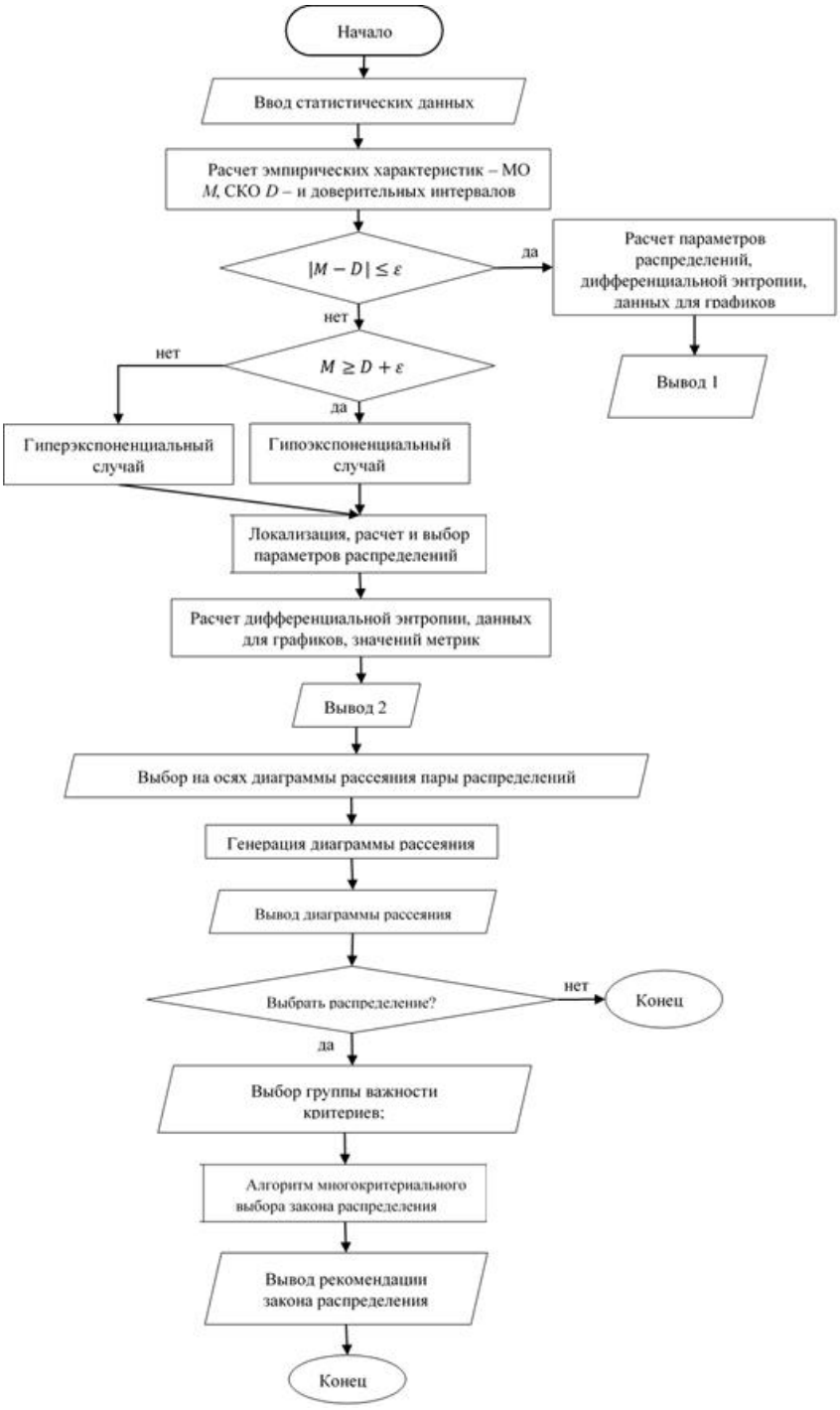


Рис. 1. Алгоритм сравнения и ранжирования законов распределения

2.1. Определение множества распределений и параметров законов распределения

Для определения множества законов распределений, которые на следующих этапах алгоритма будут сравниваться и ранжироваться, используется естественная факторизация пространства эмпирических характеристик – математического ожидания (МО) $M > 0$ и среднеквадратического отклонения (СКО) $D > 0$.Соответственно такой факторизации предлагается три основных набора законов распределений.

1) *Экспоненциальный случай.* Ситуация, когда математическое ожидание и СКО близки, $|M - D| < \varepsilon$ (ε – малое число, заданное по умолчанию) моделируется экспоненциальным распределением.

2) *Гиперэкспоненциальный случай.* Когда СКО больше математического ожидания, т.е. $D \geq M + \varepsilon$, в качестве моделей СВ предлагаются следующие распределения [9]:

1. гиперэкспоненциальное распределение специального вида;
2. распределение Вейбулла-Гнеденко;
3. гамма-распределение;
4. логарифмически нормальное распределение;
5. обратное распределение Гаусса.

Двухфазное гиперэкспоненциальное распределение специального вида впервые предложено одним из соавторов данной статьи в [10] как способ аппроксимации двухпараметрических распределений положительно определенных СВ. Его свойства исследовались в [11, 12]. Преимуществами данного распределения являются:

двухпараметричность (в отличие от хорошо изученного в [13,14] гиперэкспоненциального распределения общего вида, для применения которого необходимо минимум три параметра);

существование и единственность решения системы уравнений моментов для гиперэкспоненциального режима [10];

смысл распределенной по данному закону СВ – время пребывания системы в двух параллельно связанных состояниях, время пребывания в каждом из которых распределено по *экспоненциальному* закону;

явный аналитический вид функции восстановления.

3а) *Гипоэкспоненциальный случай,* M не кратно D. Когда математическое ожидание больше СКО, т.е., $M \geq D + \varepsilon$, в качестве моделей СВ предлагаются следующие распределения [9]:

1. гипоэкспоненциальное распределение;
2. распределение Вейбулла-Гнеденко;
3. гамма-распределение;
4. логарифмически нормальное распределение;
5. усеченное слева нормальное распределение;
6. обратное распределение Гаусса.

Гипоэкспоненциальное распределение с фазами двух типов удобно для аппроксимации двухпараметрических распределений положительно определенных СВ. Смысл распределенной по данному закону СВ – время пребывания системы в n последовательно связанных состояниях, время пребывания в каждом из которых распределено по экспоненциальному закону: $n-1$ фаз с интенсивностью χ и 1 фаза с интенсивностью η. Распределение имеет три параметра, для определения которых достаточно двух эмпирических характеристик.

3б) *Гипоэкспоненциальный случай,* M кратно D. Гипоэкспоненциальное распределение применимо, если M не кратно D. В противном случае используется распределение Эрланга порядка n с однотипными фазами. Остальные распределения в таком случае сохраняются, кроме гамма-распределения, которое вырождается в частный случай и совпадает с распределением Эрланга.

Для определения значений параметров каждого распределения необходимо численно решить систему двух уравнений моментов. Для быстрого и эффективного поиска решения систем уравненийбудут применяться:

алгоритм локализации корней уравнений методом равномерного поиска;

расчет корней систем уравнений моментов функцией fsolve() из библиотеки scipy (Python);

в случае неединственности решения – выбор по критерию максимизации близости плотности данного распределения к среднему арифметическому плотностей распределений, для которых система уравнений моментов имеет единственное решение.

2.3. Сравнение и многокритериальное ранжирование законов распределения

Для количественного и визуального сравнения законов распределения из выбранного набора в СППР используются:

графики плотностей, функций распределения, интенсивностей и функций восстановления;

аналитические метрики [15];

диаграммы рассеяния [16].

Многокритериальная задача выбора наиболее подходящего распределения решается с помощью подхода, развитого Пиявским С.А. [17]. Важность приведенных шести критериев определяется пользователем путем отнесения к одной из четырех групп важности: очень важен, важен, не очень важен, не учитывать. Перевод данных нечетких оценок важности критериев пользователем в весовые коэффициенты важности критериев позволяет осуществить методика из [18]. Далее многокритериальная задача решается сведением к линейной свертке отдельных критериев. При этом каждому распределению ставится в соответствие количество баллов (от 1 до N, где N – количество возможных распределений для данного случая согласно естесвенной факторизации пространства эмпирических характеристик) по правилам из таблицы 1 (столбец «Способ ранжирования распределения»). Дополнительные данные, которые указывает пользователь, отражены в последнем столбце таблицы 1.

Таблица 1. Способ многокритериального выбора закона распределения случайной величины

№ п. п.	Критерий выбора распределения	Уровень важности критерия (определяется пользователем)	Способ ранжирования распределения	Дополнительная информация (предоставляет пользователь)
1.	Минимизация дифференциальной энтропии	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по возрастанию значения дифференциальной энтропии	
2.	Максимизация соответствия эмпирическим моментам более высокого порядка	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по убыванию значения эвклидовой нормы разностей моментов, расчитанных по данным и по законам распределений	Выбор количества учитываемых моментов
3.	Максимизация соответствия эмпирическим квантилям	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	от 1 до N баллов по убыванию значения эвклидовой нормы разностей уровней квантилей, расчитанных по данным и по законам распределений	Выбор количества и значения учитываемых квантилей
4.	Наличие аналитически заданной функции восстановления	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	1 балл – при отсутствии аналитически заданной функции восстановления; N/2 балла – при наличии трудновычислимой аналитически заданной функции восстановления; N баллов – при наличии аналитически заданной функции восстановления.	
5.	Характер функции интенсивности	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	В случае выбора монотонного характера функции интенсивности: 1 балл – распределения с немонотонной функцией интенсивности; N баллов – распределения с монотонной функцией интенсивности. В случае выбора немонотонного характера функции интенсивности (с учетом приработки): наоборот. В случае выбора другого характера функции интенсивности: N/2 балла – все распределения.	Выбор желаемого характера функции интенсивности: монотонный; немонотонный (с учетом приработки); другой
6.	Возможность разложения на экспоненциальные фазы	○ очень важен ○ важен ○ не очень важен ○ не учитывать	N баллов – при возможности разложения на экспоненциальные фазы; 1 балл – при невозможности разложения на экспоненциальные фазы.	

Выводы

Приведенные алгоритмы и сценарии составляют основу интерактивной онлайн СППР при выборе закона распределения положительно определенной случайной величины. По нашему мнению, такая СППР может стать удобным для пользователей (инженеров, экономистов, био-

логов и др.) инструментом моделирования случайных величин, их распределений и характеристик. Преимуществами системы – интуитивно понятный интерфейс; доступность без установки программного обеспечения; возможность сохранения графических элементов в виде файлов; минимальный набор статистически надежных, интуитивно понятных входных данных;возможность наглядного адаптивного сравнения законов распределения случайных величин по разным критериям. В основе СППР лежат существующие количественные и качественные критерии, степень важности которых пользователь сможет настраивать самостоятельно, учитывая необходимость нахождения компромисса между точностью модели и ее конструктивностью (вычислимостью).

Стоит отметить, что, если есть подозрение на распределение с тяжелым хвостом, следует воспользоваться другими специальными методиками для выбора распределения.

Литература

1. Баранова А.А., Селянинов А.А., Вихарева Е.В. Критерий достоверности выбора закона распределения при моделировании процесса биологической деструкции. Математическое моделирование в естественных науках. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2015. Т.1. С. 512–514.
2. Пономарев В.П., Белоглазов И.Ю. К выбору закона распределения времени на ремонт нефтяных скважин // Проблемы экономики и менеджмента. 2015. №5 (45). С. 140–143.
3. Дуплякин В.М., Княжева Ю.В. Выбор закона распределения входного потока заявок при моделировании системы массового обслуживания торгового предприятия // Вестник СГАУ. 2012. №6 (37). С.102–109.
4. Пушкарева Л.А., Пушкарева Т.А. Выбор и обоснование аналитического закона распределения скорости ветра в удмуртской республике для проектирования ветроустановки. Теоретические и практические аспекты развития научной мысли в современном мире: сборник статей Международной научно-практической конференции (Самара, 8 октября 2017г.). Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна", 2017. С. 67–71.
5. Панов К.В. Выбор законов распределения потока заявок и простоев локомотивов на обслуживании в депо. Инновационные проекты и технологии в образовании, промышленности и на транспорте: сборник трудов научной конференции (Омск, 8 февраля 2019 г.). Омск: Изд-во Омского государственного университета путей сообщения, 2019. С. 227–233.
6. Линец Г.И., Никулин В.И., Мельников С.В. Выбор критерия идентификации закона распределения случайных величин трансионосферных каналов связи. XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика с.п. королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов (Москва, 28–31 января 2020 г.). Москва: Издательство Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 2020. С. 254–256.
7. Акимов С.С. Проблема выбора метода восстановления закона распределения вероятности // МНИЖ. 2014. №1–3 (20). С. 5–8.
8. Тырсин А.Н. Метод подбора наилучшего закона распределения непрерывной случайной величины на основе обратного отображения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. 2017. №1. С. 31–38.
9. Смирнов С.В. Моделирование «сверхнерегулярных» случайных величин по экспериментальным данным. // Автоматизация научных исследований: Межвуз. сб. научн. трудов. Куйбышев: КуАИ, 1988. С. 52–57.
10. Коваленко А.И., Смирнов С.В. Сравнение гиперэкспоненциального распределения с другими моделями положительно определенных случайных величин. // Инфокоммуникационные технологии. Самара, 2019. Том 17, № 1. С. 9–16.
11. Ivleva A., Smirnov S. Comparison of Models of Positively Defined Random Variables // XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). Samara, 2019. P. 449–454.
12. Bladt M., Nielsen B.F. Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability (Probability Theory and Stochastic Modelling 81). Springer: Science+Business Media LLC, 2017.

13. Рыжиков Ю.И., Уланов А. В. Применение гипер-экспоненциальной аппроксимации в задачах расчета немарковских систем массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016. №3. С. 60–65.
14. Байхельт, Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.
15. Калашников В.В., Рачев С.Т. Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988. 312 с.
16. Хименко В.И. Случайные данные: структура и анализ. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2018. 424 с.
17. Пиявский С.А. Метод универсальных коэффициентов при принятии многокритериальных решений // Онтология проектирования. 2018. т. 8. №3(29). С. 449-468. DOI: 10.18287/2223-9537-2018-8-3-449-468.
18. Пиявский С.А. Как «нумеризовать» понятие «важнее» // Онтология проектирования. 2016. т.6, 34(22). С. 414-435. DOI: 10.18287/2223-9537-2016-6-4-414-435.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОМЕРНЫХ СИЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л.А. Игумнов[1], В.С. Метрикин[1], И.В. Никифорова[2]

[1]НИИ механики Нижегородского государственного университет им. Н.И. Лобачевского
[2]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе исследуется динамика многоимпульсных виброударных механизмов с учетом свойств обрабатываемой среды, математические модели которых представляют существенно нелинейные системы с переменной структурой. Динамический анализ моделей проводится методом точечных отображений двумерной неаналитической поверхности Пуанкаре в себя. Изучение динамики сложных периодических и стохастических режимов движения осуществлено с помощью численных экспериментов с использованием программного комплекса, разработанного на языке С++. Анализ бифуркационных диаграммам позволил описать возможные перестройки режимов движения механизмов в зависимости от параметров исследуемых механизмов и свойств обрабатываемой среды.

Ключевые слова: виброударные механизмы, устойчивость, бифуркационная диаграмма, метод точечных отображений, хаос.

1. Введение

В работах [1-3] изучена динамика вибрационных систем с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний, предназначенных для обработки различных сред (уплотнение грунта, формирование структуры бетонных смесей и т.д.). Однако математические модели в перечисленных выше работах и полученные в них результаты исследований можно использовать лишь для случая неизменяемых динамических характеристик обрабатываемой среды.

В этой связи в настоящей работе исследуется динамика таких систем с учетом свойств обрабатываемой среды. Работу рассматриваемых ниже вибрационных механизмов (рис.1) можно описать следующим образом: вращательное движение вала с постоянной частотой ω с помощью кривошипно-шатунного механизма преобразуется в возвратно-поступательное движение корпуса массы M относительно шабота. При этом ползуны-ударники попеременно наносят удары по соответствующим наковальням и, создаваемое таким образом ударно-вибрационное воздействие передается через шабот обрабатываемой среде. Благодаря выбору величин сдвига по фазе между кривошипами, эксцентриситетов r_i, высот наковален обеспечивается требуемое (может быть оптимальное) ударное взаимодействие ползунов-ударников с шаботом при таких фазовых положениях кривошипов, при которых ползуны-ударники имеют максимальную скорость и кроме всего обеспечивается устойчивый режим работы. Следует отметить, что наличие нескольких ползунов-ударников способствует более продолжительному воздействию на обрабатываемую среду, а, следовательно, более эффективному процессу пластического деформирования.

2. Динамика виброударного механизма с учетом свойств обрабатываемой среды

2.1. Модель виброударного механизма с двумя поршнями-ударниками, в которой среда представлена в виде упруго-закрепленной массы

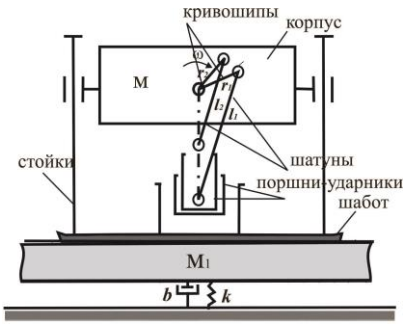


Рис.1. Схема двухпоршневого виброударного механизма со средой, представленной в виде упруго-закрепленной массы

Обрабатываемая среда (грунт, свая и т.п.) представлена в виде упруго закрепленной с коэффициентом упругости k массы M_1. Потери энергии в среде учитываются в виде вязкого трения с коэффициентом демпфирования b.

$$\begin{cases} x - x_1 > f(\tau) \\ \ddot{x} = -p \\ \ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + \lambda^2 x_1 = -p \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x - x_1 = f(\tau) \\ \dot{x}^+ = \left[(\mu_0 - R)\dot{x}^- + (1+R)\dot{x}_1^- + (1+R)\dfrac{df(\tau)}{d\tau}\right]/(1+\mu_0) \\ \dot{x}_1^+ = \left[\mu_0(1+R)\dot{x}^- + (1-R\mu_0)\dot{x}_1^- - \mu_0(1+R)\dfrac{df(\tau)}{d\tau}\right]/(1+\mu_0) \end{cases} \tag{2}$$

где $f(\tau) = \max\limits_{\tau}(f_1(\tau), f_2(\tau))$, $f_1(\tau) = \varepsilon - \mu\cos\tau$, $f_2(\tau) = -\mu\cos(\tau - \varphi)$, $\dot{x}^-, \dot{x}_1^-$ – доударные, $\dot{x}^+, \dot{x}_1^+$ – послеударные скорости корпуса и среды соответственно, R – коэффициент восстановления скорости при ударе, x – координата центра вращения корпуса, отсчитываемая от положения массы M_1 при недеформированной пружине, x_1 - величина отклонения массы M_1 от того же начала отсчета.

Фазовое пространство системы (1) – (2) пятимерное в координатах $x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \tau$ усечено по фазовым координатам. Все фазовые траектории располагаются либо на поверхности $S(x - x_1 = f(\tau))$, либо выше её.

Исследование динамики механизма сведено к изучению свойств точечного преобразования поверхности Пуанкаре $S(x - x_1 = f(\tau))$ в себя. Найдены аналитические соотношения для отыскания в пространстве параметров границы областей существования и устойчивости периодических режимов движения. При этом также даны соотношения на параметры системы, которые позволяют проводить предварительную настройку механизма на основной рабочий режим (с поочередными ударами поршней о шабот).

Численные расчеты проведены с использованием программного комплекса, разработанного на языке C++.

На рис.2 приведена бифуркационная диаграмма, где по оси абсцисс отложены значения частотного параметра p, а по оси ординат – значения послеударных скоростей корпуса $\dot{x}^+$ на поверхности Пуанкаре. Расчеты проведены при следующем наборе параметров Ɛ=0.018, R=0.3, μ_0=5, μ=0.1, γ=4, φ=0.6, λ=0.6, h=0.

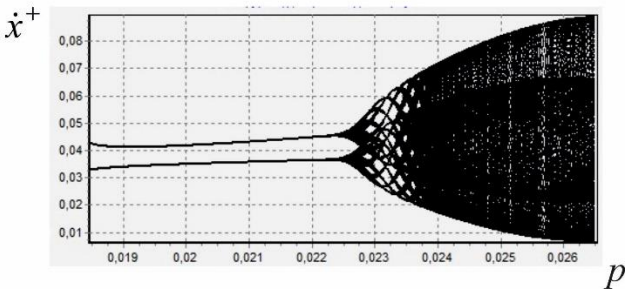


Рис.2. Бифуркационная диаграмма по параметру p

Из рис.2 видно что

1. при $0.0185 \le p \le 0.0225$ существует периодическое движение с поочередными ударами каждым поршнем-ударником;

2. при $0.0185 \le p \le 0.0265$ наблюдается хаотический режим движения;

3. при $p = 0.025$ наблюдается процесс удвоения числа ударов обоими поршнями.

С помощью пакета Autodesk Inventor была построена цифровая модель виброударного механизма, позволившая наглядно демонстрировать различные типы движений механизма для различного набора параметров последнего и свойств среды.

2.2. Модель виброударного механизма с учетом обрабатываемой среды в виде пробки

Другая схема механизма при обработке среды приведена на рис. 3. Поршень виброударного механизма ударяет об ограничитель и деформирует пружину длины h с коэффициентом упругости k. Сила $\mu_0 F_0$ моделирует силу трения пробки о стенки среды (например, внутреннее сухое трение в грунте), Q – сила, действующая на пробку.

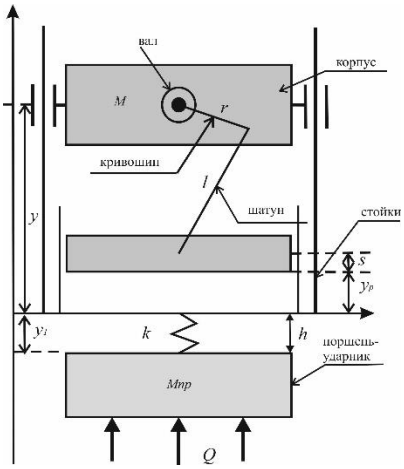


Рис.3. Схема виброударного механизма с грунтом в виде пробки

Динамику представленного механизма и среды можно описать следующей системой дифференциальных уравнений в безразмерных переменных и параметрах

$$x > x_1 + f(\tau) + \eta,$$
$$\ddot{x} = -p.$$

$$\begin{cases} x = x_1 + f(\tau) + \eta, \\ \lambda_0^2(x_1 + \eta + f(\tau) - x) < q - p + \mu_0 \tilde{f} \\ x_1 = x_{10} \\ \ddot{x} + p + \lambda_0^2(x - x_{10} - \eta - f(\tau)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0^2(x_1+\eta+f(\tau)-x) \geq q-p+\mu_0\tilde{f} \\ \ddot{x}+p+\lambda_0^2\big(x-x_1-\eta-f(\tau)\big)=0 \\ \ddot{x}_1+p+\lambda^2(x+\eta+f(\tau)-x)+\mu_0\tilde{f}sign(\dot{x}_1)-q=0. \end{cases}$$

$f(\tau)=\max\limits_{\tau}(f_1(\tau),f_2(\tau))$, $f_1(\tau)=\varepsilon-\mu\cos\tau$, $f_2(\tau)=-\mu\cos(\tau-\varphi)$,

x – безразмерная координата корпуса, x_1 – безразмерная координата среды.

2.3. Модель виброударного механизма, в которой сила сопротивления зависит от величины предыдущей осадки среды

Представленная на рис. 4. схема отличается от предыдущей, тем, что в ней принято, что при уплотнении среды сила сопротивления зависит от величины предыдущей осадки грунта

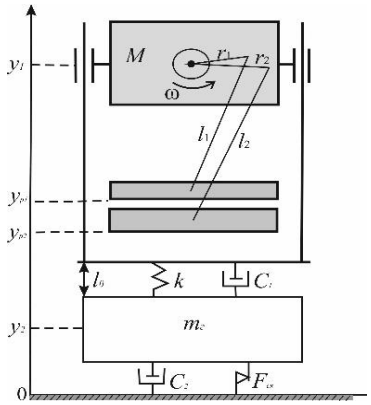


Рис.4. Схема виброударного механизма с грунтом в виде пробки

Уравнения движения в безразмерном виде предлагаемой динамической модели уплотнения среды можно записать следующим образом

$$x_1-x_2>f(\tau)+\eta,$$
$$\ddot{x}_1=-p,$$
$$\begin{cases} \dot{x}_2=0, \text{если } |p+\lambda_2\dot{x}_2|\leq\tilde{f}, \\ \ddot{x}_2=-p-\lambda_2\dot{x}_2+\tilde{f}, \text{иначе.} \end{cases}$$
$$x_1-x_2\leq f(\tau)+\eta,$$
$$\ddot{x}_1=-p-h_1(x_1-f(\tau)-x_2-\eta)-\lambda_1\left(\dot{x}_1-\frac{df}{d\tau}-\dot{x}_2\right),$$
$$\begin{cases} \dot{x}_2=0, \text{если } \left|p+\lambda_2\dot{x}_2+\lambda_3\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1+\frac{df}{d\tau}\right)+h_2\big(x_2+\eta-x_1+f(\tau)\big)\right|\leq\tilde{f}, \\ \ddot{x}_2=-p-\lambda_2\dot{x}_2-\lambda_3\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1+\frac{df}{d\tau}\right)-h_2\big(x_2+\eta-x_1+f(\tau)\big)+\tilde{f}, \text{иначе.} \end{cases}$$

$f(\tau)=\max\limits_{\tau}(f_1(\tau),f_2(\tau))$, $f_1(\tau)=\varepsilon-\mu\cos\tau$, $f_2(\tau)=-\mu\cos(\tau-\varphi)$,

Здесь x_1 – безразмерная координата корпуса, x_2 – безразмерная координата среды.

Литература

1. Metrikin V.S., Nikiforova I.V. On the Dynamics of Systems with Impact Interactions with a Non-Analytic Phase Structure // Automation and Remote Control. V. 74. № 8. 2013. P. 1307-1317.
2. Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V. Dynamics rammers with two pairs of shock generators//Vibroengineering PROCEDIA, October 2016,V.8, ISSN 2345-0533, P. 120-124.
3. Igumnov L. A., Metrikin V. S., Nikiforova I. V. The dynamics of eccentric vibration mechanism (Part 1). JVE Journal of Vibroengineering,Vol. 19, 2017, P. 4816-5656.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ CUDA-РЕАЛИЗАЦИЯ РАЗРЕЖЕННОГО МАТРИЧНО-ВЕКТОРНОГО УМНОЖЕНИЯ МНОГОКРАТНОЙ ТОЧНОСТИ[1*]

К.С. Исупов[1], В.С. Князьков[2], И.П. Бабешко[1], А.К. Крутиков[1]

[1]Вятский государственный университет,
[2]Пензенский государственный университет

В статье рассматривается параллельная реализация операции SpMV – умножения разреженной матрицы на плотный вектор – для графических процессоров с использованием арифметики многократной точности на основе системы остаточных классов. Для хранения разреженной матрицы используется ELLPACK формат, а покомпонентные операции с многоразрядными массивами разбиваются на части, каждая из которых выполняется отдельным CUDA ядром, что исключает ветвление логики исполнения и позволяет добиться более полного использования ресурсов GPU. Экспериментальная оценка с матрицами из реальных приложений показывает, что во многих случаях представленная реализация SpMV выполняется быстрее, чем реализации на основе существующих библиотек многократной точности для GPU.

Ключевые слова: SpMV, высокоточные вычисления, арифметика многократной точности, система остаточных классов, программирование для графических процессоров, CUDA.

1. Введение

Итерационные методы подпространства Крылова, такие как метод сопряженных градиентов (CG), обобщенный метод минимальных невязок (GMRES), BiCG, BiCGSTAB, CGS и MINRES [1], в настоящее время являются одними из наиболее успешных методов для решения больших и разреженных линейных систем. Наиболее затратной операцией в этих методах является умножение разреженной матрицы на плотный вектор (SpMV), и от быстродействия этой операции зависит быстродействие всего итерационного процесса. Последовательная версия SpMV тривиальна, но ее эффективная параллельная реализация осложняется нерегулярным доступом к памяти и зависит от структуры матрицы и используемого способа хранения ненулевых элементов. В связи с этим проявляется большой интерес к разработке форматов хранения разреженных матриц и реализаций SpMV, оптимизированных для параллельных вычислительных платформ [2]. При этом главным рассматриваемым вопросом обычно является скорость вычислений. С другой стороны, точность SpMV также играет важную роль, поскольку итерационные методы известны своей чувствительностью к ошибкам округления [3, 4].

Распространенным способом повышения точности вычислений является использование формата double-double (DD), в котором каждое число представляется парой двух стандартных (binary64) чисел с плавающей точкой x_h и x_l, где x_h является числом, ближайшим к истинному значению, а x_l – разница между истинным значением и x_h. В работе [5] представлены алгоритмы DD-арифметики, а в [3, 6–8] на основе DD-формата разрабатываются высокоточные версии SpMV, ряда других вычислительных ядер и итерационных решателей линейных систем. В свою очередь, в [9, 10] используются арифметические библиотеки многократной точности (разрядности), такие как GMP/MPFR и CUMP.

В данной статье мы реализуем операцию SpMV многократной точности для графических процессоров (GPU). Особенностью нашей реализации является использование системы остаточных классов (СОК) для представления чисел с плавающей точкой. В СОК задается набор модулей и арифметические операции выполняются с остатками по каждому модулю индивидуально, т.е. без распространения переносов между остатками, что обеспечивает параллелизм арифметики многократной точности и делает СОК многообещающей системой счисления для

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-71-00046).

современных параллельных архитектур, таких как GPU. Наша реализация SpMV является частью библиотеки высокоточных подпрограмм линейной алгебры MPRES-BLAS и доступна на GitHub (https://github.com/kisupov/mpres-blas).

2. Представление чисел с плавающей точкой

Число с плавающей точкой многократной точности представляется в виде объекта, состоящего массива цифр (мантиссы) с одним общим знаком, целочисленным порядком (экспонентой) и некоторой дополнительной информацией о величине мантиссы. Такой объект обозначается следующим образом:

$$x = \langle s, X, e, I(X/M) \rangle, \tag{1}$$

где s – знак, X – многоразрядная мантисса, e – экспонента и $I(X/M)$ – интервальная оценка мантиссы (дополнительная информация). Мантисса представлена в СОК [11] остатками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно заданного набора оснований (модулей) $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ и интерпретируется как целое число в интервале от 0 до M–1, где M – произведение всех модулей. Цифры (остатки) $x_i = X \bmod m_i$ являются обычными целыми числами в дополнительном коде. Модули СОК не зависят друг от друга, что позволяет эффективно (покомпонентно над остатками) выполнять такие арифметические операции, такие как сложение, вычитание и умножение, без необходимости обработки переносов между остатками. Преобразование числа многократной точности вида (1) в десятичное представление выполняется по формуле:

$$X = (-1)^s \times \left| M_1 \,|\, x_1 w_1 |_{m_1} + M_2 \,|\, x_2 w_2 |_{m_2} + \cdots + M_n \,|\, x_n w_n |_{m_n} \right|_M \times 2^e,$$

где $M_i = M / m_i$, а w_i – мультипликативная инверсия M_i по модулю m_i.

С другой стороны, имеются сложности, связанные с оценкой величины числа по остаткам, которая требуется для определения знака, обнаружения переполнения, сравнения, масштабирования, деления и некоторых других операций, называемых немодульными. Один из методов выполнения таких операций, ориентированный на большие динамические диапазоны, основывается на вычислении интервальной оценки дробного представления числа в СОК [12]. Данный метод спроектирован специально для эффективной реализации на современных вычислительных платформах общего назначения, которые поддерживают быстрые операции с плавающей точкой конечной точности, например, арифметику IEEE 754. Для числа $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интервальная оценка $I(X/M)$ – это интервал, определяемый нижней и верхней границами $\underline{X/M}$ и $\overline{X/M}$, которые являются числами с плавающей точкой ограниченной разрядности, удовлетворяющими $\underline{X/M} \le X/M \le \overline{X/M}$. Таким образом, $I(X/M)$ предоставляет информацию о диапазоне изменений дробного представления (также называемого относительной величиной) числа в СОК. Важным достоинством метода интервальных оценок является то, что при вычислении $\underline{X/M}$ и $\overline{X/M}$ используются только стандартные арифметические операции и не требуется преобразование X из СОК в двоичную систему. С использованием интервальных оценок предложены эффективные алгоритмы для реализации ряда немодульных операций, таких как сравнение чисел и общее деление [12].

В [13] предложены базовые алгоритмы выполнения арифметических операций с числами вида (1), а также дана следующая граница погрешности округления: если $\mathrm{fl}(x \circ y)$ – округленный результат операции $\circ\{+, -, \times\}$ с числами вида (1), то $\mathrm{fl}(x \circ y) = (x \circ y)(1 + \delta)$, где $|\delta| < 4/\sqrt{M}$ и M – произведение всех модулей СОК. Таким образом, выбирая необходимый набор модулей СОК, возможно задавать произвольную точность используемой арифметики.

3. Многоразрядный ELLPACK формат

Для хранения в памяти GPU плотных многоразрядных векторов используется структура данных `mp_array_t`, описание которой дано в [13]. В этой структуре вектор из N элементов представляется в виде набора массивов, хранящих отдельные части многоразрядных чисел: все цифры многоразрядных мантисс хранятся в виде единого массива `digits` длины $n \times N$, где n –

количество модулей СОК; знаки чисел, экспоненты и интервальные оценки мантисс хранятся в виде отдельных массивов. Дополнительно в структуру включены поля `len` (актуальная длина вектора) и `buf` (буфер с элементами векторного типа int4 из стандартных заголовков CUDA C/C++, который используется для передачи вспомогательных переменных между вычислительными ядрами). Использование структуры `mp_array_t` совместно с последовательной схемой адресации, при которой все *n* цифр одного многоразрядного числа располагаются последовательно в памяти GPU, обеспечивает при разрядно-параллельных вычислениях (когда все цифры мантисс вычисляются параллельно) объединение доступов параллельных потоков к памяти GPU в транзакции [13].

Для компактного хранения разреженной матрицы с многоразрядными элементами используется структура данных `mp_collection_t` (рис. 1), аналогичная структуре `mp_array_t` за исключением отсутствия полей `len` и `buf`, которые не используются в ядрах разреженной линейной алгебры.

```
typedef struct {
    int         *digits; //Цифры мантисс
    int         *sign;   //Знаки
    int         *exp;    //Порядки (экспоненты)
    er_float_t  *eval;   //Интервальные оценки
} mp_array_t;
```

Рис. 1. Структура данных для представления многоразрядного массива

В общем случае производительность SpMV существенно зависит от формата, используемого для хранения разреженной матрицы. Широко используемыми схемами хранения являются разреженный строчный формат (CSR), координатный формат (COO), диагональный формат (DIA) и ELLPACK/ITPACK формат. В данной работе мы используем формат ELLPACK. Данный формат эффективен при реализации на GPU, при условии, что количество ненулевых элементов в каждой строке матрицы варьируется не значительно [14].

На рис. 2 приведен пример представления разреженной матрицы в многоразрядном ELLPACK-формате. В примере количество модулей $n = 4$, т.е. мантисса каждого элемента a_{ij} состоит из четырех остатков: $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Символ «.» используется для доступа к отдельным полям многоразрядного числа, а символы l и u обозначают соответственно нижнюю и верхнюю границы интервальной оценки мантиссы.

Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

Представление в ELLPACK формате

элементы: $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{21} & a_{32} & a_{43} & a_{14} & a_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

индексы столбцов: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Представление в многоразрядном ELLPACK формате с использованием `mp_collection_t`

элементы:

$$digits \begin{bmatrix} a_{12}.x_1 & a_{12}.x_2 & a_{12}.x_3 & a_{12}.x_4 & a_{21}.x_1 & a_{21}.x_2 & a_{21}.x_3 & a_{21}.x_4 \\ a_{32}.x_1 & a_{32}.x_2 & a_{32}.x_3 & a_{32}.x_4 & a_{43}.x_1 & a_{43}.x_2 & a_{43}.x_3 & a_{43}.x_4 \\ a_{14}.x_1 & a_{14}.x_2 & a_{14}.x_3 & a_{14}.x_4 & a_{23}.x_1 & a_{23}.x_2 & a_{23}.x_3 & a_{23}.x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sign \begin{bmatrix} a_{12}.s & a_{21}.s & a_{32}.s & a_{43}.s & a_{14}.s & a_{23}.s & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$exp \begin{bmatrix} a_{12}.e & a_{21}.e & a_{32}.e & a_{43}.e & a_{14}.e & a_{23}.e & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$eval \begin{bmatrix} a_{12}.l & a_{21}.l & a_{32}.l & a_{43}.l & a_{14}.l & a_{23}.l & 0 & 0 \\ a_{12}.u & a_{21}.u & a_{32}.u & a_{43}.u & a_{14}.u & a_{23}.u & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

индексы столбцов: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Рис. 2. Многоразрядный ELLPACK формат

4. Реализация SpMV многократной точности для GPU

Входными данными для нашей реализации SpMV ($y = Ax$) являются:

1. разреженная матрица A, состоящая из M строк и N столбцов, представленная двумя массивами длины $M \times K$: *data* (ненулевые элементы матрицы) и *indices* (индексы столбцов, соответствующих ненулевым элементам), где K – максимальное количество ненулевых элементов в строке матрицы A; многоразрядный массив *data* представлен экземпляром структуры `mp_collection_t`;
2. плотный вектор x размера N, хранящийся в виде экземпляра структуры `mp_array_t`.

В результате применения SpMV вычисляется плотный многоразрядный вектор y размера M, также представленный экземпляром структуры `mp_array_t`. Все входные и выходные данные хранятся в глобальной памяти GPU. Выполнение операции состоит из двух шагов:

1. вычисление массива покомпонентных произведений матрицы A и вектора x с сохранением результатов в массив BUF размера $M \times K$ (`mp_collection_t`);
2. формирование вектора y путем суммирования массива BUF по строкам.

Использование СОК позволяет реализовать полностью параллельную схему выполнения первого шага SpMV, в соответствии с которой одновременно вычисляются не только элементы массива BUF, но также все цифры многоразрядной мантиссы каждого элемента. При этом для выполнения каждой арифметической операции умножения многократной точности используется n потоков GPU, где n – размер набора модулей СОК. Для эффективной реализации данной схемы операция многоразрядного умножения разбивается на три этапа, каждый из которых выполняется отдельным вычислительным ядром [13]:

1. ядро для вычисления знаков, экспонент и интервальных оценок мантисс;
2. ядро для полностью параллельного вычисления цифр многоразрядных мантисс;
3. ядро для округления.

Таким образом, выполнение SpMV многократной точности состоит из запуска четырех вычислительных ядер (глобальных функций GPU), как показано на рис. 3. Каждое ядро имеет свои параметры запуска, определяемые аргументами шаблона. Параметр `BLOCK_SIZE_FOR_RESIDUES` задает размер блока потоков для вычисления цифр многоразрядных мантисс. Данный параметр вычисляется автоматически исходя из точности вычислений (количества модулей СОК) и минимального размера блока потоков, обеспечивающего полную загрузку потокового мультипроцессора GPU.

```
template<int gridDim1, int blockDim1, int gridDim2, int blockDim3>
void mpspmvell(const int M, const int N, const int K, const int *indices,
               mp_collection_t &data, mp_array_t &x, mp_array_t &y, mp_collection_t &BUF) {

  //BUF = A * x - Вычисление знаков, экспонент, интервальных оценок
  ell_scal_esi_kernel<<<gridDim1, blockDim1>>>(BUF, data, indices, x, M, N, K);

  //BUF = A * x - Умножение мантисс в СОК
  ell_scal_digits_kernel<<<gridDim2, BLOCK_SIZE_FOR_RESIDUES>>> (BUF, data, indices, x, M, K);

  //BUF = A * x - Округление
  mp_vector_round_kernel<<<64, 64>>> (BUF, M * K);

  //Построчное суммирование массива BUF с записью результатов в y
  int gridDim3 = M / blockDim3 + 1;
  size_t smemSize = sizeof(mp_float_t) * blockDim3;
  ell_matrix_row_sum_kernel<<<gridDim3, blockDim3, smemSize>>>(y, indices, BUF, M, K);
}
```

Рис. 3. Вызов вычислительных ядер в GPU реализации SpMV многократной точности

5. Оценка производительности

Производительность рассмотренной реализации SpMV оценивалась на квадратных матрицах rim, crystk02, fp и dawson5 из коллекции университета Флориды (https://sparse.tamu.edu/). Описание матриц представлено в таблице 1, где M, N, K и NNZ обозначают, соответственно, число строк, столбцов, максимальное число ненулевых элементов в строке и общее число ненулевых элементов матрицы.

Таблица 1. Матрицы для экспериментов

Название	$M = N$	K	NNZ	Приложение
rim	22 560	112	1 014 951	Вычислительная гидродинамика
dawson5	51 537	33	1 010 777	Структурный анализ
crystk02	13 965	81	968 583	Материаловедение
fp	7 548	957	834 222	Электромагнетизм

Эксперименты выполнялись на системе, оснащенной NVIDIA RTX 2080 GPU (46 потоковых мультипроцессоров, 8 Гб памяти GDDR6, версия аппаратной совместимости 7.5), Intel Core i5 7500 (3.40 GHz), 16 Гб памяти DDR4. Программное обеспечение: Ubuntu 18.04.5 LTS, CUDA Toolkit 10.2 / NVIDIA Driver 455.23.05. Исходный код компилировался с помощью nvcc V10.2.89.

В качестве аналогов рассматривались реализации SpMV, основанные на GPU библиотеках многократной точности CUMP [15] и CAMPARY [16]. Оценивалась производительность каждой из реализаций при точности от 120 до 480 бит. Для достижения данной точности в предложенной SpMV использовалось от 8 до 32 модулей СОК. Мерой производительности P является Mop/s – *миллион операций с плавающей точкой многократной точности в секунду*: $P = 2\times NNZ / (1000\times T)$, где NNZ – количество ненулевых элементов матрицы, T – время выполнения операции в мс. Измерялось только время вычислений, т.е. не учитывалось время преобразования данных в многоразрядные форматы и время копирования в память GPU. Экспериментальные оценки представлены в таблице 2, где полужирным начертанием отмечены лучшие результаты.

Таблица 2. Производительность SpMV многократной точности на NVIDIA RTX 2080 (Mop/s)

	Точность, бит			
	120	**240**	**360**	**480**
Матрица rim				
Предложенная SpMV	427.51	**591.00**	**445.07**	**379.03**
CAMPARY	**4585.40**	328.05	127.21	61.28
CUMP	381.57	248.16	223.31	175.15
Матрица dawson5				
Предложенная SpMV	1146.46	**862.93**	**632.23**	**515.20**
CAMPARY	**7899.66**	601.68	225.46	105.63
CUMP	407.04	380.99	305.15	245.36
Матрица crystk02				
Предложенная SpMV	458.95	**953.54**	**643.38**	**519.62**
CAMPARY	**9539.31**	709.79	275.45	133.29
CUMP	625.23	556.81	469.54	394.01
Матрица fp				
Предложенная SpMV	218.58	**272.66**	**195.86**	167.67
CAMPARY	**1919.41**	260.52	127.76	54.41
CUMP	179.84	198.82	178.27	**170.79**

При 120-битной точности самой быстрой оказалась библиотека CAMPARY, реализующая оптимизированные алгоритмы для double-double арифметики (для 120-битной точности в экспериментах использовался формат 2-double CAMPARY). Для матриц rim, crystk02 и fp разработанная реализация работает медленнее при 120-битной точности, чем при 240-битной точности, что связано с выполнением большего количества операций округления, трудоемких для СОК. Во многих остальных случаях при точности от 240 до 480 бит разработанная реализация SpMV демонстрирует лучшую производительность по сравнению с аналогами. В дальнейшем мы планируем оптимизировать округление, а также реализовать многоразрядные версии SpMV для GPU с использованием других форматов хранения разреженной матрицы.

Литература

1. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Second edition. SIAM, 2003. 520 p. DOI: 10.1137/1.9780898718003.
2. Filippone S., Cardellini V., Barbieri D., Fanfarillo A. Sparse Matrix-Vector Multiplication on GPGPUs // ACM Transactions on Mathematical Software. 2017. Vol. 43, No. 4. Article No. 30. DOI: 10.1145/3017994.
3. Saito T., Ishiwata E., Hasegawa H. Analysis of the GCR method with mixed precision arithmetic using QuPAT // Journal of Computational Science. 2012. Vol. 3, No. 3. P. 87-91. DOI: 10.1016/j.jocs.2011.05.001.
4. Cools S., Yetkin E.F., Agullo E., Giraud L., Vanroose W. Analyzing the Effect of Local Rounding Error Propagation on the Maximal Attainable Accuracy of the Pipelined Conjugate Gradient Method // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2018. Vol. 39, No. 1. P. 426-450. DOI: 10.1137/17M1117872.
5. Shewchuk J.R. Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates // Discrete and Computational Geometry. 1997. Vol. 18, No. 3. P. 305-363. DOI: 10.1007/PL00009321.
6. Mukunoki D., Takahashi D. Using Quadruple Precision Arithmetic to Accelerate Krylov Subspace Methods on GPUs // Lecture Notes in Computer Science. 2014. Vol. 8384. P. 632-642. DOI: 10.1007/978-3-642-55224-3_59.
7. Masui K. Ogino M. Research on the Convergence of Iterative Method Using Mixed Precision Calculation Solving Complex Symmetric Linear Equation // IEEE Transactions on Magnetics. 2020. Vol. 56, No. 1. Article no. 7503604. DOI: 10.1109/TMAG.2019.2951280.
8. Hishinuma T., Hasegawa H., Tanaka T. SIMD Parallel Sparse Matrix-Vector and Transposed-Matrix-Vector Multiplication in DD Precision // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10150. P. 21-34. DOI: 10.1007/978-3-319-61982-8_4.
9. Kouya T. A highly efficient implementation of multiple precision sparse matrix-vector multiplication and its application to product-type Krylov subspace methods // International Journal of Numerical Methods and Applications. 2012. Vol. 7, No. 2. P. 107-119.
10. Hirokawa Y., Itoh T., Tadano H., Ikuno S. Speedup and numerical evaluation of multiple-precision Krylov subspace method using GPU cluster for large-sparse linear system // Proceedings of the international conference for high performance computing, networking, storage and analysis, SC13, November 17-22, Denver, Colorado, USA. Colorado Convention Center, 2013. 1 p.
11. Omondi A., Premkumar B. Residue Number Systems: Theory and Implementation. Imperial College Press, 2007. 402 p.
12. Isupov K. Using Floating-Point Intervals for Non-Modular Computations in Residue Number System // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 58603-58619. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.2982365.
13. Isupov K., Knyazkov V., Kuvaev A. Design and Implementation of Multiple-Precision BLAS Level 1 Functions for Graphics Processing Units // Journal of Parallel and Distributed Computing. 2020. Vol. 140. P. 25-36. DOI: 10.1016/j.jpdc.2020.02.006.
14. Bell N., Garland M. Efficient Sparse Matrix-Vector Multiplication on CUDA. Technical Report NVR-2008-004. NVIDIA Corporation. 2008. URL: https://www.nvidia.com/docs/IO/66889/nvr-2008-004.pdf (дата обращения: 13.09.2020).
15. Nakayama T., Takahashi D. Implementation of Multiple-Precision Floating-Point Arithmetic Library for GPU Computing // Proceedings of the 23rd IASTED International Conference on Parallel and Distributed Computing and Systems, PDCS 2011, December 14-16, 2011, Dallas, USA. ACTA Press, 2011. P. 343-349.
16. Joldes M., Muller J.M., Popescu V. Implementation and Performance Evaluation of an Extended Precision Floating-Point Arithmetic Library for High-Accuracy Semidefinite Programming // Proceedings of the 24th IEEE Symposium on Computer Arithmetic, ARITH, July 24-26, 2017, London, UK. IEEE, 2017. P. 27-34. DOI: 10.1109/ARITH.2017.18.

РАССТОЯНИЕ КАНТОРОВИЧА-РУБИНШТЕЙНА-ВАССЕРШТЕЙНА МЕЖДУ АТТРАКТОРОМ И РЕПЕЛЛЕРОМ[1*]

А.О. Казаков[1], А.С. Пиковский[2], В.Г. Чигарев[1]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
[2]Институт физики и астрономии Потсдамского университета, Потсдам-Гольм, Германия

Мы рассматриваем несколько примеров динамических систем, демонстрирующих пересечение аттрактора и репеллера. Эти системы строятся с помощью добавления контролируемой диссипации в базовые модели с хаотической динамикой: отображение Аносова, стандартное отображение Чирикова, несжимаемый трехмерный поток типа ABC на трехмерном торе и косое эргодическое отображение, демонстрирующее странные нехаотические аттракторы (косое отображение). Мы используем расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна для характеристики различия между аттрактором и репеллером в зависимости от уровня диссипации.

Ключевые слова: Расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна, аттрактор, репеллер, смешанная динамика

Мы начинаем с сохраняющих площадь двумерных отображений, которые обладают равномерной инвариантной мерой, итерируя их вперед и назад во времени. При добавлении диссипации (в результате которой фазовый объем уменьшается в одних областях и увеличивается в других) симметрия относительно обращения времени нарушается, и инвариантные меры аттрактора и репеллера становятся различными. Затем мы применяем отображение Мёбиуса [1, 2] зависящее от параметра к одной из координат этих двумерных отображений, чтобы контролировать уровень диссипации. Мы предлагаем характеризовать расстояние между этими двумя мерами с помощью хорошо зарекомендовавшего себя подхода вычисления расстояния Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна. Эта концепция впервые появилась в задаче оптимальной транспортировки, где она также известна как Earth Mover's Distance, EMD. Идея состоит в том, чтобы найти оптимальную «транспортировку» одной меры в другую с соответствующим определением затрат (которые в большинстве случаев просто пропорциональны расстоянию, умноженному на транспортируемую массу). Хотя эта концепция ранее применялась для характеристики разницы между аттракторами динамической системы при разных значениях параметров [3, 4, 5], насколько нам известно, она не была предложена в качестве меры различия между аттрактором и репеллерером. О других связях транспортной задачи с теорией динамических систем см. [6].

В работе приведено несколько простых примеров пересекающихся аттракторов и репеллеров на двумерном торе. В каждом из примеров разница между двумя этими множествами определялась как расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между ними. Во всех случаях мы обнаружили, что расстояние увеличивается линейно с параметром диссипации, который вводится для нарушения симметрии относительно обращения времени. Для двумерных отображений, мы рассмотрели только случаи, когда отображение Мёбиуса применялось только к одной координате на торе, когда его влияние на динамику не такое сильное (в частности, мерой аттрактора и репеллера остается полный тор). Подробности этого исследования можно найти в [7].

[1*] Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931.

Литература

1. Marvel S.A., Mirollo R.E., Strogatz S.H. Phase oscillators with global sinusoidal coupling evolve by Mobius group action. Chaos 19, 2009, 043104.
2. Gong C.C., Toenjes R., Pikovsky A. Coupled Moebius maps as a tool to model Kuramoto phase synchronization. arXiv: 2001.07593, 2020.
3. Muskulus M., Verduyn-Lunel S. Wasserstein distances in the analysis of time series and dynamical systems. Physica D 240, 2011. 45–58.
4. Fraser J.M. First and second moments for self-similar couplings and Wasserstein distances. Math. Nachrichten 288, 2015. 2028–2041.
5. Cipriano I., Pollicott M. Stationary measures associated to analytic iterated function schemes. Math. Nachrichten 291, 2018. 1049–1054.
6. Villani C. Optimal Transport. Old and New. Springer, 2009.
7. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller. Chaos 30, 2020.

ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ[1*]

А.В. Калинин[1,2], А.А. Тюхтина[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Математический центр,
[2]Институт прикладной физики РАН

В работе изучается иерархия квазистационарных моделей для системы уравнений Максвелла в однородных и неоднородных средах. Рассматриваются нерелятивистское магнитное приближение, нерелятивистское электрическое приближение и квазистационарное приближение, в котором ток смещения содержит только составляющую, соответствующую потенциальной части электрического поля (приближение Дарвина). Устанавливается связь между решениями начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных приближениях и приводятся оценки близости этих решений.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарные приближения, неоднородные среды.

Система уравнений Максвелла записывается в виде [1]

$$\mathrm{rot}\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(x,t) \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(x,t) \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\vec{B}(x,t) = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\vec{D}(x,t) = 4\pi\rho(x,t), \tag{4}$$

где $(x,t) \in Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset R^3$, $T > 0$.

Предполагается, что справедливы материальные соотношения

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}, \vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^{ext}, \tag{5}$$

где $\vec{J}^{ext}$ – объёмная плотность сторонних токов.

Система (1)-(5) рассматривается при граничных условиях

$$\vec{E}(x,t) \times \vec{\nu}(x) = 0,\ (x,t) \in Q = \partial\Omega \times (0,T), \tag{6}$$

где $\vec{\nu}(x)$ – единичный вектор внешней нормали в точке $x \in \partial\Omega$, и начальных условиях

$$\vec{H}(x,0) = \vec{h}(x),\ \vec{E}(x,0) = \vec{e}(x),\ x \in \Omega. \tag{7}$$

Различные квазистационарные приближения для системы (1)-(5) используются в прикладных задачах для моделирования достаточно медленных электромагнитных процессов [1-3]. Нерелятивистское магнитное приближение, которое часто называется просто квазистационарным приближением [1-4], приближение заключается в пренебрежении током смещения ($\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \approx 0$) и характерно для медленно протекающих процессов в средах с достаточно высокой проводимостью [2,5-7]. В этом случае вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$\mathrm{rot}\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t), \tag{8}$$

система (8), (2)-(5) может изучаться при граничных и начальных условиях

$$\vec{E}(x,t) \times \vec{\nu}(x) = 0,\ (x,t) \in Q = \partial\Omega \times (0,T),\ \vec{H}(x,0) = \vec{h}(x),\ x \in \Omega.$$

Исследованию различных постановок задач для этого приближения и вопросам численной реализации алгоритмов их решения посвящена достаточно обширная литература, в частности - работы [4-16]. Работы [5-7] содержат обсуждение вопросов обоснования квазистационарного магнитного приближения.

Для описания достаточно медленных процессов в средах с малой проводимостью, в частности – при моделировании электромагнитных процессов в нижних слоях атмосферы [17-21], используется нерелятивистское электрическое приближение [2]. Формально это приближение

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект N 18-77-10061).

заключается в пренебрежении слагаемым $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ в уравнении (2), что приводит к потенциальности электрического поля в пространственно-односвязных областях:

$\mathrm{rot}\vec{E}(x,t) = 0.$

Система (1), (3)–(5), (9) может рассматриваться в этом случае при граничных и начальных условиях

$$\vec{E}(x,t) \times \vec{\nu}(x) = 0,\ (x,t) \in Q = \partial\Omega \times (0,T),\ \ \vec{E}(x,0) = \vec{e}(x),\ x \in \Omega.$$

При моделировании относительно медленных электромагнитных процессов в плазме получило достаточно широкое распространение приближение Дарвина [1,22]. В этом приближении выделяются потенциальная и соленоидальная компоненты электрического поля,

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} - \mathrm{grad}\varphi,\ \mathrm{div}\varepsilon\vec{E} = 0, \tag{10}$$

и ток смещения $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}$ в (1) заменяется на $-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mathrm{grad}\varphi$.

Для областей, заполненных неоднородной проводящей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x)$, первое уравнение системы Максвелла в этом приближении принимает вид

$$\mathrm{rot}\vec{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(x)\mathrm{grad}\varphi(x,t). \tag{11}$$

Система (11), (2)-(5) в этом случае рассматривается при граничных и начальных условиях

$$\vec{E}(x,t) \times \vec{\nu}(x) = 0,\ (x,t) \in Q = \partial\Omega \times (0,T),\ \vec{H}(x,0) = \vec{h}(x),\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ x \in \Omega.$$

Вопросы иерархии различных квазистационарных приближений обсуждаются в работах [2, 24,25]. В частности, в [25] отмечается, что приближение Дарвина охватывает традиционные нерелятивистское магнитное приближение и нерелятивистское электрическое приближение.

В работах [23-27], посвященных исследованию задач для приближения Дарвина, предполагается, что в системе (1)-(4) объемная плотность тока $\vec{J}$ и объемная плотность заряда ρ – заданные функции, что формально соответствует предположению о непроводящей среде (в (5) $\sigma \equiv 0$). Задача определения электрического и магнитного полей разбивается на независимые друг от друга эллиптические задачи поиска потенциальной составляющей электрического поля $\vec{E}_L = -\mathrm{grad}\varphi$, магнитной индукции $\vec{B}$ и вихревой (соленоидальной) составляющей электрического поля $\vec{E}_T = \vec{\mathcal{E}}$. При указанных предположениях получены строгие результаты о корректности задач для линейной системы уравнений Максвелла в рамках приближения Дарвина и установлена асимптотическая связь между решениями задач, полученных в рамках дарвиновского приближения, и решениями соответствующих задач для исходной нестационарной системы Максвелла при малом значении параметра $\beta = \Delta x/(c\Delta t)$, где Δx – характерный пространственный масштаб, Δt – характерный временной масштаб, c – скорость света.

В настоящей работе изучается приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в однородных и неоднородных проводящих средах. Условие неоднородности сред приводит, в отличие от работ [23-27], к связанной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\vec{H}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\mathrm{grad}\varphi$, не сводящейся к классическим задачам математической физики.

Пусть $\Omega \subset R^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшицевой границей, $\vec{J}^{ext}: Q \to R^3$, $\vec{h}: \Omega \to R^3$, $\vec{e}: \Omega \to R^3$ – интегрируемые с квадратом функции, ε, μ и σ – функции из $L_\infty(\Omega)$,

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon(x) \le \varepsilon_2,\ \mu_1 \le \mu(x) \le \mu_2,\ \sigma_1 \le \sigma(x) \le \sigma_2,$$

где ε_i, μ_i, σ_i (i=1, 2) – заданные положительные постоянные.

При этих условиях существование и единственность решения начально-краевой задачи (1)-(7) доказана в [30]. Результаты, касающиеся корректности рассматриваемых начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарных магнитном, электрическом и дарвиновском приближениях содержатся, в частности в работах [11,13], [17,19,20], [28,29] соответственно.

Для сравнения близости решения задачи для дарвиновского приближения к решениям соответствующих задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении перейдём к безразмерным величинам, заменяя x на $\Delta x \cdot x'$, t на $\Delta t \cdot t'$ и полагая $\sigma = \sigma^*\sigma_0$, $\vec{J}^{ext} = \sigma^*\sigma_0\vec{E}^{ext}$, где σ^* – характерное значение удельной проводимости. Вводятся обозначения

$$\gamma = 4\pi\sigma^*\Delta t,\ \kappa = 4\pi\Delta x\rho^*,$$

ρ^* – характерное значение плотности зарядов. Тогда система (1)-(3) с учетом соотношений (5) примет вид

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \beta\gamma\sigma_0\vec{E} + \beta\gamma\sigma_0\vec{E}^{ext} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\vec{E}, \tag{12}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mu\vec{H}. \tag{13}$$

Система рассматривается при начальных и граничных условиях (6), (7), штрихи при безразмерных переменных и областях их определения опущены.

Уравнение (4) служит для определения функции ρ. Используя ортогональное разложение (10), где $\mathrm{grad}\varphi \times \nu(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, получаем, что

$$\kappa\rho = -\mathrm{div}\varepsilon\mathrm{grad}\varphi.$$

В работе предполагается, что выполнено дополнительное условие согласования начальных данных

$$\mathrm{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{e} + \frac{4\pi}{c}\vec{J}^{ext}(x,0),\ \mathrm{rot}\vec{e} = 0,$$

позволяющее избежать эффекта пограничного слоя по времени. В безразмерных переменных это условие имеет вид

$$\mathrm{rot}\vec{h} = \gamma\sigma_0\vec{e} + \gamma\sigma_0\vec{E}^{ext}(x,0),\ \mathrm{rot}\vec{e} = 0. \tag{14}$$

Для того, чтобы проиллюстрировать связь между различными приближениями для системы уравнений Максвелла рассмотрим предварительно случай однородных сред. Методом ортогонального проектирования начально-краевые задачи для нестационарной системы задачи разбиваются на задачу определения $\mathrm{grad}\varphi$ – потенциальной составляющей электрического поля, и задачу определения $\vec{H}$ и $\vec{\mathcal{E}}$. При этом, при совпадении начальных данных, первая задача для системы (12), (13) совпадает с соответствующей задачей для дарвиновского приближения, задачи определения магнитного поля и соленоидальной составляющей электрического поля одинаковы для приближения Дарвина и для квазистационарного магнитного приближения.

Таким образом, используя индексы n, d и m для решения начально-краевых задач для нестационарной системы уравнений Максвелла, системы уравнений Максвелла в квазистационарном дарвиновском приближении и системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении соответственно, получаем в случае однородных сред

$$\mathrm{grad}\varphi^d = \mathrm{grad}\varphi^n,\ \vec{H}^d = \vec{H}^m,\ \vec{\mathcal{E}}^d = \vec{\mathcal{E}}^m,\ \rho^d = \rho^n.$$

Квазистационарное дарвиновское приближение не изменяет потенциальной составляющей электрического поля, кроме того, остаётся справедливым закон сохранения зарядов

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{J} = 0.$$

Для случая неоднородной проводящей среды в работе [28] были получены оценки близости решения начально-краевой задачи для дарвиновского приближения к решению соответствующей задачи для нестационарной системы уравнений Максвелла. В предположении справедливости условия (14) и дополнительных условий регулярности функций $\vec{\mathcal{E}}^{ext}$ и $\vec{h}$ справедливы неравенства

$$\left\|\mathrm{grad}\left(\varphi^n - \varphi^d\right)\right\|_{2,Q} \le C_1 f_\varphi(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}$$

$$\left\|\vec{\mathcal{E}}^n - \vec{\mathcal{E}}^d\right\|_{2,Q} \le C_2 f_{\mathcal{E}}(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}$$

$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_\infty\left(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3\right)} \le C_3 f_H(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}$$

$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^d\right\|_{L_2\left(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega)\right)} \le C_4\beta(1-e^{-a\gamma})\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}$$

$$\kappa\left\|\rho^n - \rho^d\right\|_{L_2\left(0,T,H^{-1}(\Omega)\right)} \le C_5 f_\varphi(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}.$$

Здесь $a = T\sigma_1/(\sigma_*\varepsilon_1)$, положительные постоянные C_i, i=1–5, не зависят от β и γ, функции от γ , фигурирующие в правой части неравенств, определены соотношениями

$$f_\varphi(\gamma) = \frac{(1-e^{-a\gamma})^2}{\gamma},\ f_{\mathcal{E}}(\gamma) = \frac{1-e^{-a\gamma}}{\gamma},\ f_H(\gamma) = \frac{1-e^{-a\gamma}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Аналогичные результаты получены при сравнении решений задач для нестационарной системы уравнений Максвелла и системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном

приближении, а также для задач для квазистационарного магнитного приближения и квазистационарного дарвиновского приближения:

$$\left\|\vec{E}^n - \vec{E}^m\right\|_{2,Q} \le C_6 f_{\mathcal{E}}(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^m\right\|_{L_\infty\left(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3\right)} \le C_7 f_H(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^n - \vec{H}^m\right\|_{L_2\left(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega)\right)} \le C_8\beta(1-e^{-a\gamma})\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{E}^d - \vec{E}^m\right\|_{2,Q} \le C_9 f_{\mathcal{E}}(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^d - \vec{H}^m\right\|_{L_\infty\left(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3\right)} \le C_{10} f_H(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^d - \vec{H}^m\right\|_{L_2\left(0,T,H(\mathrm{rot};\Omega)\right)} \le C_{11}\beta(1-e^{-a\gamma})\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$

положительные постоянные C_i, i=6–11, не зависят от β и γ

Предположим, $\mathrm{grad}(\sigma_0\varepsilon^{-1}) \in \{L_\infty(\Omega)\}^3$. Тогда можно оценить разность между полями $\mathrm{grad}\varphi^d$ и $\mathrm{grad}\varphi^n$, $\vec{\mathcal{E}}^d$ и $\vec{\mathcal{E}}^m$, $\vec{H}^d$ и $\vec{H}^m$ в зависимости от степени неоднородности среды, характеризуемой нормой $\mathrm{grad}(\sigma\varepsilon^{-1})$. Справедливы неравенства

$$\left\|\mathrm{grad}\varphi^n - \mathrm{grad}\varphi^d\right\|_{2,Q} \le C_{12}\|\mathrm{grad}(\sigma_0\varepsilon^{-1})\|_{\infty,\Omega} f_\varphi(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\kappa\left\|\rho^n - \rho^d\right\|_{L_2\left(0,T,H^{-1}(\Omega)\right)} \le C_{13}\|\mathrm{grad}(\sigma_0\varepsilon^{-1})\|_{\infty,\Omega} f_\varphi(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{\mathcal{E}}^d - \vec{\mathcal{E}}^m\right\|_{2,Q} \le C_{14}\|\mathrm{grad}(\sigma_0\varepsilon^{-1})\|_{\infty,\Omega} f_{\mathcal{E}}(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q},$$
$$\left\|\vec{H}^d - \vec{H}^m\right\|_{L_\infty\left(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3\right)} \le C_{15}\|\mathrm{grad}(\sigma_0\varepsilon^{-1})\|_{\infty,\Omega} f_H(\gamma)\left\|\partial/\,\partial t\vec{E}^{ext}\right\|_{2,Q}.$$

В случае однородных сред $\mathrm{grad}(\sigma\varepsilon^{-1}) = 0$ и соответствующие поля совпадают.

Полученные в работе неравенства позволяют оценивать в различных нормах разность между квазистационарными и нестационарными полями через норму производной по времени напряженности поля сторонних электродвижущих сил ($\partial/\partial t\vec{E}^{ext}$) с коэффициентами, зависящими от параметров $\beta = \Delta x/(c\Delta t)$ и $\gamma = 4\pi\sigma^*\Delta t$, характеризующих скорость протекающих процессов.

Укажем асимптотические свойства функций $f_\varphi(\gamma)$, $f_{\mathcal{E}}(\gamma)$, $f_H(\gamma)$ [28]:

$f_\varphi(\gamma) \le \min\{a\gamma, \gamma^{-1}\} \le \sqrt{a}$, $f_\varphi(\gamma) = O(\gamma)$ при $\gamma \to 0$, $f_\varphi(\gamma) = O(\gamma^{-1})$ при $\gamma \to \infty$;

$f_{\mathcal{E}}(\gamma)$ монотонно убывает, $f_{\mathcal{E}}(\gamma) \to a$ при $\gamma \to 0$, $f_{\mathcal{E}}(\gamma) = O(\gamma^{-1})$ при $\gamma \to \infty$;

$f_H(\gamma) = f_\varphi(\gamma)^{1/2}$, $f_H(\gamma) = O(\sqrt{\gamma})$ as $\gamma \to 0$, $f_H(\gamma) = O(1/\sqrt{\gamma})$ as $\gamma \to \infty$.

Отметим, что для медленных процессов при $\Delta t \to \infty$ будет выполнено $\beta \to 0$ и $\gamma \to \infty$, и для близости напряженностей магнитных полей в нестационарной системе Максвелла, в дарвиновском приближении и квазистационарном магнитном приближении достаточно малости коэффициента β, хотя есть и альтернативная оценка через γ в силу асимптотических свойств $f_H(\gamma)$. Соответственно, для близости составляющих напряженностей электрических полей $\vec{\mathcal{E}}^n$ и $\vec{\mathcal{E}}^d$, $\mathrm{grad}\varphi^n$ и $\mathrm{grad}\varphi^d$, а также плотностей зарядов ρ^n и ρ^d достаточно малости $1/\gamma$ в силу асимптотических свойств функций $f_{\mathcal{E}}(\gamma)$ и $f_\varphi(\gamma)$.

Также можно отметить, что в силу асимптотических свойств функций $f_\varphi(\gamma)$ и $f_H(\gamma)$ при $\gamma \to 0$ (быстро протекающие процессы) из полученных оценок может следовать близость магнитных полей $\vec{H}^n$ и $\vec{H}^d$, потенциальных составляющих электрического поля $\mathrm{grad}\varphi^n$ и $\mathrm{grad}\varphi^d$, плотности зарядов ρ^n и ρ^d для нестационарной системы уравнений Максвелла и приближения Дарвина.

Полученные результаты показывают, что квазистационарное дарвиновское приближение имеет одинаковую точность с нерелятивистским магнитным приближением при определении магнитного поля и вихревой составляющей электрического поля и позволяет более точно определять потенциальную составляющую электрического поля.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 8.Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.

2. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
4. Kawashima S., Shizuta Y. Magnetohydrodynamic approximation of the complete equations for an electromagnetic fluid. II // Proc. Japan Acad. 1986. Vol. 62, ser. A. No. 5. P. 181-184.
5. Ammari, H., Buffa, A., Nedelec, J.-C.: A justification of eddy currents model for the Maxwell equations SIAM J. Appl. Math. 2000. Vol. 60. No. 5. P. 1805-023.
6. Alonso Rodriguez A., Valli A. Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
7. Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах. М.: Физматлит, 1995.
8. Fernandes P. General approach to prove the existence and uniqueness of the solution in vector potential formulations of 3-D eddy current problems // IEE Proc.-Sci. Meas. Technol. 1995. Vol. 142. P. 299-306.
9. Kolmbauer M. Existence and uniqueness of eddy current problems in bounded and unbounded domains // Numa-Report 2011-03 Institute of Computational Mathematics, Linz, 2011 URL: www.numa.uni-linz.ac.at/Publications/List/2011/011-03.pdf.
10. Camano J., Rodriguez R. Analysis of a FEM-BEM model posed on the conducting domain for the time-dependent eddy current problem // J. Comp. Appl. Math. 2012. Vol. 236. P. 3084-3100.
11. Калинин А.В., Калинкина А.А. Квазистационарные начально-краевые задачи для системы уравнений Максвелла // Вест. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. № 1. С. 21-38.
12. Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 608-624.
13. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями // Журнал СВМО. 2016. Т. 18. № 4. С. 119-133.
14. Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 18-40.
15. Калинин А.В., Тюхтина А.А., Изосимова О.А. Модифицированные калибровочные соотношения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Журнал СВМО. 2017. Т. 19. № 4. С. 55-67.
16. Kalinin A.V., Tyukhtina A.A. Lp-estimates for scalar products of vector fields and their application to electromagnetic theory problems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2018. Vol. 41. No. 18. P. 9283-9292.
17. Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 123-129.
18. Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 527-534.
19. Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А. Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3. С. 314-322.
20. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 450. No. 1. P. 112-136.
21. Boström R., Fahleson U. Vertical propagation of time-dependent electric fields in the atmosphere and ionosphere // in H.Dolezalek, R.Reiter (Eds.), Electrical Processes in Atmospheres, Steinkopff, 1977. P. 529-535.
22. Darwin C.G. The dynamical motions of charged particles // Phil. Mag. 1920. Vol. 39:233. P. 537-551.

23. Raviart P.-A., Sonnendrücker E. Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. Vol. 63. P. 69-81.
24. Raviart P.-A., Sonnendrücker E. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 1996. Vol. 73. P. 329-372.
25. Larsson J. Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. Vol. 75. No 3. P. 230-239.
26. Weitzner H., Lawson W.S. Boundary conditions for the Darwin model // Phys. Fluids B. 1989. Vol. l. P. 1953-1957.
27. Degond P., Raviart P.-A. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. Vol. 4. P. 13-44.
28. Калинин А.В., Тюхтина А.А. Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах// ЖВМ и МФ. 2020. Т.60, № 8. С. 121-134.
29. Калинин А.В., Тюхтина А.А., Лаврова С.Р. Неклассические задачи в моделях глобальной электрической цепи// Марчукоские научные чтения – 2019: Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики"» (Новосибирск, 1–5 июля 2019 г.) – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2019. С. 203-209.
30. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

ГИПЕРХАОС И ДИСКРЕТНЫЕ АТТРАКТОРЫ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА В ОТОБРАЖЕНИИ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПАРАБОЛ[1*]

Е.Ю. Каратецкая[1], Е.В. Курыжов[1], Д.И. Минц[1], А.О. Казаков[1]

[1]*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Настоящая работа посвящена исследованию механизмов возникновения гиперхаоса в двумерном эндоморфизме, описывающем динамику двух связанных идентичных отображений параболы, а также изучению бифуркаций, ведущих к рождению дискретных аттракторов лоренцевского типа в этом эндоморфизме.

Ключевые слова: гиперхаос, аттракторы Лоренца, отображение параболы

Отображение параболы $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ является одним из простейших примеров, демонстрирующих переход от простой динамики (устойчивая неподвижная точка) к хаосу. Хорошо известно, что хаос в этом отображении возникает в результате фейгенбаумовского каскада бифуркаций удвоения периода.

В настоящей работе мы исследуем механизмы перехода от устойчивой неподвижной точки) к хаотическим, а также гиперхаотическим аттракторам в модели, описывающей взаимодействие двух связанных идентичных отображений параболы:

$$\begin{cases} \bar{x} = 1 - ax^2 + \varepsilon(x - y) \\ \bar{y} = 1 - ay^2 - \varepsilon(x - y) \end{cases} \qquad (1)$$

Локальные бифуркации в рассматриваемом отображении были изучены в работе [1]. Отметим, что при нулевом значении параметра связи ε, каждая из подсистем демонстрирует переход от устойчивой неподвижной точки к хаотическому аттрактору через каскад бифуркаций удвоения периода. Таким образом, в связанной системе (1) ожидается возникновение гиперхаотических аттракторов, хотя бы при малых значениях параметра ε.

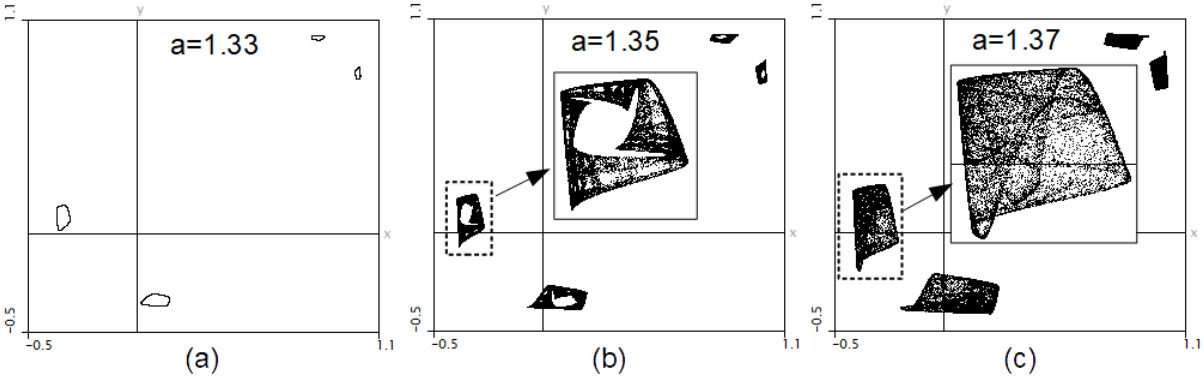


Рис. 1. Иллюстрация механизма возникновения гиперхаотических аттракторов при ε = 0.05: (a) устойчивая точка периода 4 (возникшая после двух бифуркаций удвоения периода) претерпевает бифуркацию Неймарка-Сакера, в результате которой рождается 4-х компонентная инвариантная кривая; (b) инвариантная кривая разрушается, возникает тор-хаос; (c) вполне неустойчивая точка периода 4 поглощается аттрактором, возникает 4-х компонентный аттрактор Шильникова.

Первая часть настоящей работы посвящена исследованию сценариев возникновения гиперхаотических аттракторов в отображении (1). Показано, что при ε ≠ 0 с увеличением параметра $\boldsymbol{a}$ каскад бифуркаций удвоения периода прерывается бифуркацией Неймарка-Сакера, в результате которой соответствующая устойчивая периодическая точка $\boldsymbol{O_p}$ становится вполне неустойчивой, а в ее окрестности рождается устойчивая инвариантная кривая. При дальнейшем увеличении параметра $\boldsymbol{a}$ эта кривая разрушается, образуется аттракторы типа тор-хаос, а затем, в результате поглощения вполне неустойчивой периодической точки $\boldsymbol{O_p}$ возникает периодиче-

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 19-71-10048.

ский аттрактор Шильникова. Далее, при увеличении параметра $\boldsymbol{a}$, этот аттрактор поглощает множество вполне неустойчивых точек, образующихся в результате бифуркаций удвоения периода седловых точек, и образуется гиперхаотический аттрактор, см. иллюстрацию описанного сценария на Рис. 1.

Во второй части работы мы проводим исследование аттракторов лоренцевского типа в рассматриваемом отображении. В работах [2-3] для трехмерных отображений показано, что дискретные аттракторы Лоренца могут возникать в окрестности периодических точек с парой мультипликаторов (+1,-1). Бифуркационные диаграммы в окрестности таких точек (называемых также fold-flip) подробно изучены в работе [4], где показано, что в зависимости от знаков коэффициентов нормальной формы существует четыре различных типа такой бифуркации.

Для трехмерных отображений в одном из четырех случаев, как показано в работе [3], в некоторой окрестности точки fold-flip могут возникать дискретные аттракторы Лоренца. Мы обобщили этот результат на случай двумерных эндоморфизмов и, на примере отображения (1), изучили бифуркации, приводящие к рождению аттракторов лоренцевского типа. На рисунке 2 изображена бифуркационная диаграмма для отображения (1). Аттракторы лоренцевского типа возникают в заштрихованной области, ниже кривой NS_2, отвечающей бифуркации Неймарка-Сакера с точкой периода 2.

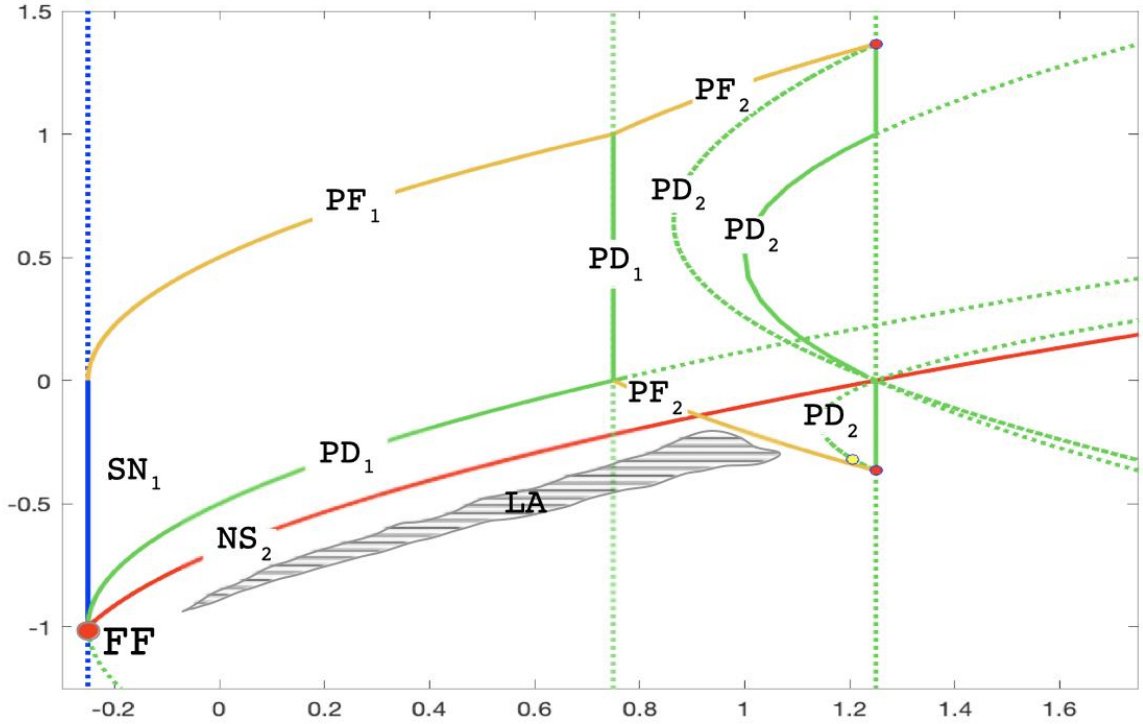


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для симметричной неподвижной точки и симметричной точки периода 2

Область устойчивости неподвижной точки снизу и справа ограничена кривыми бифуркации удвоения периода, сверху бифуркацией типа «вилка» и слева вертикальной кривой седло-узловой бифуркации $\boldsymbol{a}$ = -0.25. Для точки периода два верхняя и нижняя граница – это бифуркация типа «суперкритическая вилка», вне области, ограниченной этими кривыми, существует неустойчивая точка, которая в результате бифуркации приобретает устойчивость и одновременно появляются две седловые точки. Далее образовавшиеся седловые точки, а затем и устойчивая точка претерпевают бифуркацию удвоения периода. Точка пересечения кривых бифуркаций «вилка» и удвоения периода для устойчивой точки в верхней и нижней части диаграммы на линии $\boldsymbol{a}$ = 1.25 – это также точка коразмерности 2 фолд-флип, однако тип этой точки отличается от вышеупомянутой.

Далее зафиксируем параметр $\boldsymbol{a} = \mathbf{0.1}$. На рисунке 3 представлены основные этапы возникновения аттракторов Лоренца при движении вдоль этого маршрута.

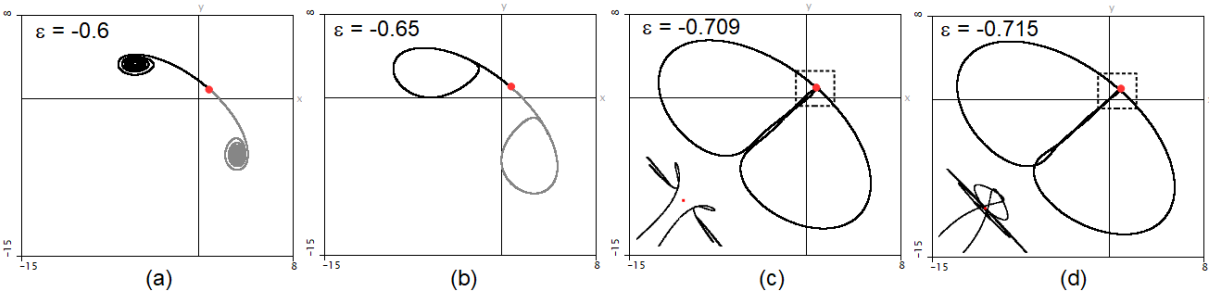


Рис. 3. Иллюстрация механизма возникновения аттрактора Лоренца в отображении (1) при $\boldsymbol{a} = \mathbf{0.1}$: (a) неустойчивое многообразие седловой неподвижной точки наматывается на точку периода 2, родившуюся в результате бифуркации удвоения периода этой неподвижной точки (ее область устойчивости ограничена на рис. 2 кривыми SN1, PD1 и PF1); (b) двухкомпонентная инвариантная кривая, родившаяся из точки периода 2 в результате суперкритической бифуркации Неймарка-Сакера; (c) двух компонентный хаотический аттрактор типа тор-хаос; (d) дискретный аттрактор Лоренца

Литература

1. Biragov V., Ovsyannikov I.M., Turaev D., A study of one endomorphism of a plane, Methods of qualitative theory and theory of bifurcations. 1988. – С. 72-86.
2. Gonchenko S. V. Ovsyannikov I. I., Simó C, Turaev D. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 11. – С. 3493-3508.
3. Гонченко А. С., Самылина Е. А. Об области существования дискретного аттрактора Лоренца в неголономной модели кельтского камня //Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 2019. – Т. 62. – №. 5. – С. 412-428.
4. Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., van Veen L. The fold-flip bifurcation //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2004. – Т. 14. – №. 07. – С. 2253-2282.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЕМКОСТИ РАБОЧЕЙ ПАМЯТИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ[1*]

Н.С. Ковалева, М.А. Мищенко, В.В. Матросов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В данной работе проведено математическое моделирование рабочей памяти рекуррентной сети нейронов – пороговых интеграторов. Рабочая память заключается в кратковременном хранении информации о предъявленном стимуле, физиологическим механизмом чего считается кратковременная синаптическая пластичность. Исследуется влияние временных параметров синаптической пластичности, силы связей между элементами сети и параметров внешнего шумового воздействия на емкость рабочей памяти сети.

Ключевые слова: нейронная сеть, рабочая память, емкость рабочей памяти, кратковременная пластичность.

1. Введение

Одним из наиболее актуальных и интересных для изучения феноменов является память, в том числе ее часть – рабочая память. Рабочая память – это ограниченная по емкости часть памяти человека, которая сочетает в себе временное хранение и манипулирование информацией. Рабочая память отличается от долговременной памяти, которая является отдельной частью системы памяти огромного объема и хранит информацию в относительно стабильной форме. Существует парадигма отложенного ответа, по которой некоторый предоставленный стимул сохраняется в памяти в течение нескольких секунд во время выполнения какой-либо задачи. В течение этого времени обнаружена повышенная активность нейронов, отвечающих за этот стимул, поэтому считается, что нейроны напрямую связаны с механизмами рабочей памяти [1].

2. Модель рабочей памяти сети

В настоящей работе предполагается, что образ поддерживается в состоянии рабочей памяти путем кратковременной синаптической фасилитации, опосредованной повышенным уровнем остаточного кальция в пресинаптических терминалях нейронов, которые кодируют этот элемент.

Такой механизм моделируется с помощью рекуррентной сети нейронов - пороговых интеграторов. Посредством внешнего возбуждения соответствующих популяций нейронов элементы загружаются в рабочую память. Нейроны, кодирующие один и тот же образ, имеют более сильные связи, чем связи между различными популяциями. Тормозные и возбуждающие связаны между собой случайным образом, что приводит к конкуренции между различными воспоминаниями. Все соединения между возбуждающими нейронами показывают усиленную передачу, описанную феноменологической моделью краткосрочной пластичности. В качестве внешних токов применяется гауссовский белый шум.

Моделирование сети проведено с использованием пакета прикладных программ MATLAB. Уравнения модели решаются численным модифицированным методом Эйлера. Воздействие внешних токов моделируется посредством применения численного метода Эйлера-Маруямы.

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках госзадания (соглашение 0729-2020-0040) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-32-90157.

2.1. Уравнения модели

Сеть состоит из N_E возбуждающих и N_I тормозных нейронов. Подпороговая динамика деполяризации описывается уравнением:

$$\tau_m V_i = -V_i + I_i^{(rec)}(t) + I_i^{(ext)}(t),$$

где $i = 1, N_E + N_I$ - номер нейрона, τ_m – постоянная времени мембраны, $I_i^{(ext)}$ – внешний ток. Каждый раз, когда деполяризация достигает определенного порога θ (т.е. $V_i(t) \geq \theta$), нейрон генерирует импульс и становится невосприимчивым в течение рефрактерного периода τ_{arp}, затем снова восстанавливается со значения потенциала V_r.

Рекуррентный ток $I_i^{(rec)}$ – сумма постсинаптического тока от всех других нейронов, связанных с нейроном i:

$$I_i^{(rec)}(t) = \sum_j \widehat{J_{ij}}(t) \sum_k \delta\left(t - t_k^{(j)}\right),$$

где $\widehat{J_{ij}}$ – мгновенная эффективность синапса, соединяющего нейрон j с нейроном i; $t_k^{(j)}$– все времена импульсов (j) пресинаптического нейрона j.

Уравнения синаптической пластичности:

$$\dot{u}_j(t) = \frac{U - u_j(t)}{\tau_F} + U[1 - u_j(t)] \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}),$$

$$\dot{x}_j(t) = \frac{U - x_j(t)}{\tau_D} + u_j(t) x_j(t) \sum_k \delta(t - t_k^{(j)}),$$

где u – синаптическая эффективность, x – синаптический ресурс.

Мгновенная эффективность синапса:

$$\widehat{J_{ij}}(t) = J_{ij} u_j(t) x_j(t),$$

где J_{ij} – абсолютная синаптическая эффективность связи между возбуждающими нейронами. Для остальных нейронных связей – $\widehat{J_{ij}}(t) = J_{ij}$.

Внешние токи моделируются как гауссовский белый шум:

$$I_i^{(ext)}(t) = \mu_{ext} + \sigma_{ext} \eta_i(t),$$

при $< \eta_i(t) > = 0$, $< \eta_i(t)\, \eta_j(t') > = \delta_{ij} \delta(t - t')$, так что μ_{ext} и σ_{ext}^2 являются средним значением и дисперсией внешних токов соответственно.

2.2. Исследование емкости модели рабочей памяти сети

В зависимости от временных параметров синаптической пластичности в работе [2] оценивалась емкость рабочей памяти частотной модели. Аналогично проведено исследование влияния параметров времени восстановления уровня кальция τ_F и времени восстановления нейропередатчиков τ_D на количество сохраненных образов в рассматриваемой спайковой модели сети. Различные комбинации параметров проводят к сохранению различного количества образов.

Рассмотрено влияние среднего значения и дисперсии фоновой активности на емкость рабочей памяти сети. Исследовано влияние силы связей между элементами сети на эффект сохранения образов памятью и емкость сети.

Литература

1. Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. Theory of Working Memory // Science. 2008. Vol. 319, No. 5869. P. 1543-1546. DOI: 10.1126/science.1150769.
2. Mi Y., Katkov M., Tsodyks M. Synaptic correlates of working memory capacity // Neuron. 2017. Vol. 93, No. 2. P. 323-330. DOI: 10.1016/j.neuron.2016.12.004.

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ДЕРЕВЬЕВ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ АЛГОРИТМА ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА[1*]

Е.А. Козинов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Алгоритмы глобального поиска могут применяться при решении задач оптимального выбора. Решение задач с множеством оптимизируемых параметров может быть сведено к решению серии задач глобального поиска с одним параметром. Как следствие, разработка более эффективных алгоритмов глобального поиска с одним параметром является актуальной задачей. В рамках статьи предлагается модификация алгоритма глобального поиска, позволяющая сократить число испытаний, необходимых для поиска оптимального решения.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многоэкстремальные функции, деревья решений.

1. Введение

Задачи поиска решений возникают перед человеком практически в любой сфере деятельности. Возникающие при этом задачи достаточно редко могут быть решены на основе только интуиции и накопленного опыта исследователя в силу их значительной сложности. Высокая сложность задач обусловлена такими факторами, как большое количество вариантов, нуждающихся в оценке, противоречивость требований, а также изменение самого представления об оптимальности выбранного решения в процессе исследований. Поиск решения при выбранных требованиях к оптимальности может быть выполнен с применением алгоритмов глобального поиска.

Для решения задач глобальной оптимизации могут быть применены как детерминированные алгоритмы глобального поиска [1-8], так и недетерминированные алгоритмы [9-13]. Недетерминированные алгоритмы, как правило, легко реализовать, однако данные алгоритмы не могут гарантированно утверждать, что найденное решение близко к реальному с заданной точностью. В свою очередь, детерминированные алгоритмы гарантируют нахождение оптимального решения с заданной точностью. Гарантированность результата обеспечивается доказанными теоремами сходимости.

В рамках статьи рассматривается модификация одного известного и эффективного детерминированного алгоритма глобального поиска, предложенного Стронгиным Р.Г. [1]. Модификация алгоритма позволяет сократить число испытаний, необходимых на поиск решений. Эффективность предложенного алгоритма показана на решении серии задач глобального поиска.

2. Постановка задачи

В рамках статьи рассматривается одномерная задача глобальной оптимизации:

$$\min \varphi(x),\ x \in [a,b],\ a < b, \tag{1}$$

где $a, b \in R$ определяют область поиска, а функция $\varphi(x)$ описывает поведение оптимизируемого критерия. В рамках статьи предполагается, что оптимизируемые критерии удовлетворяют условию Липшица

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le L\|x' - x''\|, x \in [a,b]. \tag{2}$$

[1*] Работа выполнена в рамках государственного задания (0729-2020-0055), а также при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1). Вычислительные эксперименты проводились с использованием ресурсов МСЦ РАН, СК Intel Endeavor и СК "Лобачевский".

Требование выполнимости условия Липшица имеет принципиальный характер, поскольку позволяет строить оценки возможных значений критериев по конечному количеству значений, ранее вычисленных в точках области поиска $[a, b]$ из (1).

3. Метод решения

Описание предлагаемого подхода к глобальному поиску будет выполнено в два этапа. В начале приводится базовый алгоритм глобального поиска [1]. Далее рассматривается предлагаемая модификация алгоритма.

Для поиска оптимального решения в алгоритме глобального поиска выполняются испытания. Под испытанием понимается вычисление значения оптимизируемого критерия $z = \varphi(x)$ из (1). Первые два испытания выполняются на границах области поиска: $x^0 = a$ и $x^1 = b$. Последующие точки проведения испытаний определяются на основе следующих правил:

1. Отсортировать точки испытаний вместе с вычисленными значениями критериев в порядке возрастания их координат:

$$x_0 < x_1 < \cdots < \cdots < x_k. \tag{3}$$

2. Вычислить оценку m для неизвестной константы Липшица L ,

$$m = \begin{cases} rM, M > 0 \\ 1, M = 0 \end{cases}, M = \max\left\{\frac{|z_i - z_{i-1}|}{(x_i - x_{i-1})}, i = 1, \dots, k\right\}, \tag{4}$$

3. Для каждого интервала (x_{i-1}, x_i), $1 \le i \le k$, вычислить характеристику $R(i)$,

$$R(i) = (x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m^2(x_i - x_{i-1})} - 2\frac{(z_i + z_{i-1})}{m} \tag{5}$$

где, $r > 1$, – параметр метода.

4. Определить номер интервала t с максимальным значением характеристики:

$$R(t) = \max\{R(i) : 1 \le i \le k\}. \tag{6}$$

5. Провести очередное испытание в точке из интервала (x_{t-1}, x_t)

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2m} \tag{7}$$

Алгоритм прекращает работу, если выполняется следующее условие остановки

$$(x_t - x_{t-1})(b - a) < \varepsilon \tag{8}$$

В качестве оптимального значения принимается

$$z^* = \min\{z_i = \varphi(x_i)\}, 0 \le i \le k. \tag{9}$$

Представленный алгоритм позволяет найти оптимальное решение с высокой эффективностью. Точки проведенных испытаний будут сконцентрированы в окрестности глобального минимума [1-3]. Вместе с тем, в алгоритме поиска (3)-(8) есть неявное предположение о том, что на всей области поиска $[a, b]$ из (1) оценка константы Липшица из (4) является одинаковой и, как следствие, для дальнейших вычислений m берется максимальной по всем интервалам из (3) в расчете на худший случай. Подобные предположения приводят к избыточным испытаниям в процессе глобального поиска. В рамках статьи предложена одна из возможных модификаций позволяющая оценивать константу Липшица m из (4) более точно, что должно привести к сокращению числа испытаний. В разработанном методе правило 2 из (4) заменено на следующую последовательность действий:

2а. Построить кусочно-линейную аппроксимацию оптимизируемого критерия. Для построения аппроксимации в рамках статьи использовались деревья решений из пакета sklearn [14].

2б. Для каждой точки проведения испытаний определить принадлежность номеру отрезка из построенной аппроксимации:

$$DTree(x_i) \to j. \tag{10}$$

2с. Посчитать M как глобальную оценку константы Липшица L по формуле из базового алгоритма (4).

2д. Посчитать m_j в качестве уточненной оценки константы Липшица L

$$m_j = \begin{cases} rM_j, M_j > 0 \\ 1, M_j = 0 \end{cases}, \tag{11}$$

$$M_j = \begin{cases} M, DTree(x_{i-1}) \neq DTree(x_i) \\ \max\left\{\frac{|z_i - z_{i-1}|}{(x_i - x_{i-1})}, \forall i: DTree(x_l) = j, 1 \leq l \leq k\right\}, \text{иначе,} \end{cases}$$

где M вычисляется согласно правилу 2 из (4), а $r > 1$, – параметр метода.

При подсчете характеристик интервалов $R(i)$ из (5), а также определении очередной точки проведения испытаний (7) используется уточненная оценка константы Липшица L из (11), при этом выбор константы M_j осуществляется на основании формулы (10).

4. Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительные эксперименты проводились с использованием ресурсов МСЦ РАН, СК Intel Endeavor и СК «Лобачевский». В качестве критериев задач использовались многоэкстремальные функции Шекеля и Хилла-Гибсона [1-3,15]. Для рассматриваемых алгоритмов параметр надежности метода из (4) был выбран $r = 3$, а точность метода из (8) была выбрана $\varepsilon = 0.001$. Для того чтобы показать эффективность предложенной модификации решались серии по 100 задач для каждого класса функций.

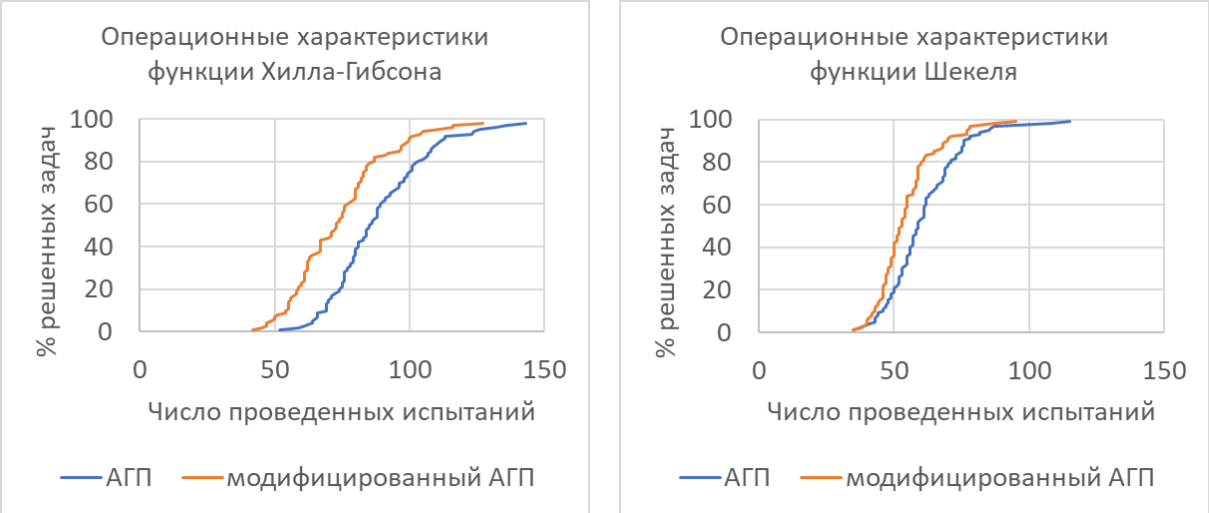


Рис. 1. Сравнение алгоритмов глобального поиска с использованием функций Хилла-Гибсона (слева) и Шекеля (справа)

Сравнение методов производилось на основе построенных графиков операционных характеристик[1-3]. Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 1. Из представленных графиков можно сделать вывод, что предложенная модификация метода позволила повысить эффективность выбора точек проведения испытаний и, как следствие, повысить эффективность поиска.

5. Заключение

В рамках статьи предложен новый подход для оценки константы Липшица в рамках алгоритма глобального поиска. С учетом нового подхода оценки константы Липшица разработана модификация метода глобального поиска и проведены вычислительные эксперименты. Вычислительные эксперименты показали перспективность направления исследований.

Литература

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах (информационно-статистические алгоритмы) – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", 1978. – 240 с.
2. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global Optimization with Non-Convex Constraints. Sequential and Parallel Algorithms. – The Netherlands, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 728 p.

3. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. – М.: Издательство Московского университета. 2013. – 280 с.
4. Сергеев Я.Д., Квасов Д. Диагональные методы глобальной оптимизации. – ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 352 с.
5. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. A Parallel Method for Finding the Global Minimum of Univariate Functions // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1994. – V. 80(3). – P. 513–536.
6. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // J. Comput. Anal. Appl. – 2001. – V. 3(2). – P. 123–145.
7. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. Introduction to global optimization exploiting space filling curves. – Verlag New York:Springer. – 2013. – 125 p.
8. Gergel V. An Unified Approach to Use of Coprocessors of Various Types for Solving Global Optimization Problems // 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. – 2015. – P. 13–18.
9. Yang, X.-S. Nature-inspired metaheuristic algorithms. – Frome: Luniver Press. – 2008. – 148 p.
10. Zhigljavsky, A.A. Theory of Global Random Search. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1991. – 341 p.
11. Kennedy J., Eberhard R. Particle swarm optimization // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Neural Networks. – 1995. – V. 4. – P. 1942–1948.
12. Карпенко А.П., Селиверстов Е.Ю. Обзор методов роя частиц (particle swarm optimization) // Электронное научно-техн. издание “Наука и образование”. – 2009. – № 3.
13. Кошур, В.Д. Глобальная оптимизация на основе гибридного метода усреднения координат и метода роя частиц // Ж. Вычислительные технологии. – 2013. – №4(18) .– С. 36-47.
14. Реализация деревьев решений. URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/tree.html (дата обращения: 10.10.2020).
15. Hill, J.D. A Search Technique for Multimodal Surfaces // IEEE Transactions on Systems and Cybernetics. – 1969. – V. 5(1). – P. 2–8.

МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СРЕДЫ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ КОРОНАВИРУСУ

В.Е. Кононова, В.Н. Дюпин

СарФТИ НИЯУ МИФИ

В работе содержится описание модели нейронной среды. Основу нейронной среды составляет вероятностная модель противодействия распространению пандемии коронавирусу. Представлено описание оптимизационной задачи по поиску безопасного маршрута перемещения граждан.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, нейронная среда, коронавирус.

1. Введение

Основным событием 2020 года стала пандемия коронавируса. Для борьбы с эпидемией многие страны были вынуждены ввести запретительные меры по социальному взаимодействию граждан [1]. Поскольку пандемия распространяется воздушно-капельным путем, всемирная организация здравоохранения рекомендовала использовать индивидуальные средства защиты и соблюдать социальную дистанцию 2 метра при взаимодействии граждан.

В ряде регионов нашей страны были созданы информационные средства для распределения времени и маршрутов перемещения граждан. Информационные средства опрашивали граждан об их состоянии здоровья (температуре) и запрашивали данные о маршруте их следования. На основе запрошенной информации сервисы выдавали рекомендации по безопасности выхода на маршрут. Безусловно предложенные методы помогли сократить число заболевших граждан за счет контроля общей плотности потока граждан, пребывающих в заданные интервалы времени на указанном маршруте следования. К сожалению, информационные средства не позволяли оценить степень безопасности оперативного маршрута граждан, вышедших на улицу.

Модель нейронной среды противодействия коронавирусу позволяет произвести прогноз о безопасности граждан, исходя из географических данных пребывания граждан. В основе нейронной среды заложена сеть персептронов, соединенных между собой соматической связью. Каждый персептрон накапливает входное воздействие и передает его следующим персептронам в соответствии с передаточной функцией. Передаточная функция нейронной среды основана на информации о пространственном распределении граждан.

2. Модель нейронной сети

Модель нейронной среды противодействия коронавирусу представляет собой распределенную сеть искусственных нейронов, которую можно описать с помощью графов.

В вершинах графа расположены нейроны искусственной сети, пространственное расположение которых соответствует географическому положению граждан (соответствие один к одному) [2]. Ребра графа описывают возможные близлежащие контакты граждан [3]. Ребра графа строятся в соответствии с алгоритмом Делоне для триангуляции двумерных сеток.

На основе информации о предыдущих маршрутах и контактах граждан строится вероятностная функция заболевания отдельного гражданина. Передаточная функция отдельного нейрона нейронной сети является обратной к функции заболевания гражданина, географическое положение которого, соответствует нейрону сети.

По информации о текущем состоянии здоровья гражданина (значении функции заболевания гражданина в текущий момент времени) строится оптимальный маршрут перемещения гражданина.

3. Оптимизация модели нейронной среды

Собранная информация о динамике перемещения граждан используется нейронной средой для корректировки параметров передаточной функции. Модель нейронной среды позволяет вносить произвольные возмущения в вероятную функцию заболевания гражданина для моделирования вариаций траекторий его перемещения и поиска наиболее безопасного маршрута.

4. Заключение

В рамках работы построена модель нейронной среды. Модель позволяет построить оптимальный маршрут перемещения граждан, базируясь на собранной информации о вероятных контактах между элементами сети. Внедрение нейронной сети позволит повысить как уровень свободы граждан по перемещению по пути следованию, так и безопасность граждан на заданном маршруте.

Литература

1. Камкин Е.Г. Временные методические рекомендации по профилактике, диагностике и лечению новой коронавирусной инфекции URL: https://static-1.rosminzdrav.ru/system/attachments/attaches/000/049/951/original/09042020_%D0%9C%D0%A0_COVID-19_v5.pdf (дата обращения: 27.09.2020).
2. Ковин Р.В. Геоинформационные системы. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F1502929774/GIS.pdf (дата обращения: 05.10.2020).
3. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. URL: https://www.indorsoft.ru/books/2006/SkvortsovAV-2006-08.Book(Trn).pdf (дата обращения: 08.10.2020).

ДИНАМИКА МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ КЛЕТОК[1*]

А.Г. Коротков

Нижегородский государственный университет им. Лобачевского

В данной работе исследуется динамика и бифуркации в модели, описывающей конкуренцию в популяции клеток, состоящей из трёх подпопуляций: здоровых клеток, клеток, чувствительных к химиотерапии, и клеток, нечувствительных к химиотерапии.

Ключевые слова: уравнение репликатора, бифуркация, «дилемма заключённого».

1. Введение

В работе [1] была предложена модель взаимодействия трёх конкурирующих за ресурсы подпопуляций клеток: здоровых клеток, клеток, чувствительных к химиотерапии, и клеток, нечувствительных к химиотерапии. Математической моделью такой системы является трёхкомпонентное уравнение репликатора. Фазовым пространством такой системы является симплекс $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Интенсивность химиотерапии в этой модели задавалась параметром C. В работе было изучено влияние на динамику предложенной модели параметра C. В данной работе приведено исследование влияния на динамику этой модели двух параметров: интенсивности химиотерапии C и параметра, задающего выигрыш при взаимодействии здоровых клеток между собой.

2. Модель

Динамика популяции трёх типов клеток задаётся следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(f_1 - f) \\ \dot{x_2} = x_2(f_2 - f) \\ \dot{x_3} = x_3(f_3 - f) \end{cases} \tag{1}$$

где x_1 – концентрация здоровых клеток, x_2 – концентрация чувствительных к химиотерапии клеток, x_3 – концентрация нечувствительных к химиотерапии клеток, f_i – приспособленности каждой из подпопуляций, $f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ – средняя приспособленность. При этом выполняется равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Приспособленности подпопуляций задаются выражением

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \\ 0 \end{pmatrix}$$

где C – концентрация химического вещества, A – матрица выигрышей.

Матрица A задаёт выигрыши при взаимодействии двух клеток. Каждая из трёх её подматриц размера 2*2 является матрицей игры «дилемма заключённого», поэтому её элементы удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} a_{31} > a_{11} > a_{33} > a_{13} \\ a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12} \\ a_{23} > a_{33} > a_{22} > a_{32} \end{cases} \tag{2}$$

Сложив все три равенства системы (1), можно заметить, что выражение $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ задаёт инвариантную плоскость, поэтому система (1) сводится к двумерной вида

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1(f_1 - f_2 + (f_2 - f_1)x_1 + (f_2 - f_3)x_3) \\ \dot{x_3} = x_3(f_3 - f_2 + (f_2 - f_1)x_1 + (f_2 - f_3)x_3) \end{cases} \tag{3}$$

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-29-10081.

Более того, выражение $x_1 + x_2 + x_3 = const$ является первым интегралом, если среднюю приспособленность считать по формуле $f = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3}{x_1 + x_2 + x_3}$.

После перехода к двум переменным x_1 и x_3 выражения для приспособленностей принимают вид

$$\begin{cases} f_1 = (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{13} - a_{12})x_3 + a_{12} \\ f_2 = C + (1 - C)((a_{21} - a_{22})x_1 + (a_{23} - a_{22})x_3 + a_{22}) \\ f_3 = (a_{31} - a_{32})x_1 + (a_{33} - a_{32})x_3 + a_{32} \end{cases}$$

Система (1) имеет семь состояний равновесия (но среди них могут быть такие, которые не принадлежат двумерному симплексу):

1. $(1, 0, 0)$
2. $(0, 1, 0)$
3. $(0, 0, 1)$
4. $(0, \frac{a_{33} + Ca_{23} - C - a_{23}}{a_{22} - a_{23} - a_{32} + a_{33} - Ca_{22} + Ca_{23}}, \frac{C + a_{22} - a_{32} - Ca_{22}}{a_{22} - a_{23} - a_{32} + a_{33} - Ca_{22} + Ca_{23}})$
5. $(\frac{a_{33} - a_{13}}{a_{11} - a_{13} - a_{31} + a_{33}}, 0, \frac{a_{11} - a_{31}}{a_{11} - a_{13} - a_{31} + a_{33}})$
6. $(\frac{C - a_{12} + a_{22} - Ca_{22}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} + Ca_{21} - Ca_{22}}, \frac{a_{11} - C - a_{21} + Ca_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} + Ca_{21} - Ca_{22}}, 0)$

Последнее состояние равновесия находится из условия $f_1 = f_2 = f_3$ (выражения для его координат слишком громоздкие).

В данной системе могут наблюдаться транскритические бифуркации, при которых состояние равновесия под номером 7 сливается с одним из трёх состояний равновесия 4, 5 или 6 (при этом оно может войти внутрь симплекса):

- При условии $C = \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23} + a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}}{a_{12} - a_{13} - a_{32} + a_{33} - a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}}$ состояние равновесия 7 сливается с состоянием равновесия 4.
- При условии $C = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} - a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}}{a_{11} - a_{13} - a_{31} + a_{33} - a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} - a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}}$ состояние равновесия 7 сливается с состоянием равновесия 5.
- При условии $C = \frac{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} - a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}}{a_{11} - a_{12} - a_{31} + a_{32} - a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}}$ состояние равновесия 7 сливается с состоянием равновесия 6.

Кроме того, могут происходить транскритические бифуркации, при которых одно из состояний равновесия 4, 5 или 6 сливается с одним из состояний равновесия 1, 2, или 3:

- При условии $C = \frac{a_{23} - a_{33}}{a_{23} - 1}$ состояние равновесия 4 сливается с состоянием равновесия 3.
- При условии $C = \frac{a_{22} - a_{32}}{a_{22} - 1}$ состояние равновесия 4 сливается с состоянием равновесия 2.
- При условии $a_{11} = a_{31}$ состояние равновесия 5 сливается с состоянием равновесия 1.
- При условии $a_{33} = a_{13}$ состояние равновесия 5 сливается с состоянием равновесия 3.
- При условии $C = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} - 1}$ состояние равновесия 6 сливается с состоянием равновесия 2.
- При условии $C = \frac{a_{21} - a_{11}}{a_{21} - 1}$ состояние равновесия 6 сливается с состоянием равновесия 1.

Далее примем следующие значения элементов матрицы A (эти значения взяты из работы [1]):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 1.5 & 1.5 \\ 4 & 2 & 2.8 \\ 3.9 & -2 & 2.2 \end{pmatrix}$$

и будем исследовать динамику системы с двумя параметрами: a_{11} и C. Параметр a_{11} задаёт выигрыш при взаимодействии двух здоровых клеток между собой.

Из ограничений (2) следует, что выполняется условие $2.2 < a_{11} < 3.9$. При выбранных значениях параметров система (3) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \left(\frac{7}{2} - a_{11} - 2C\right){x_1}^3 + \left(-\frac{14C}{5} - \frac{31}{10}\right){x_1}^2 x_3 + (C + a_{11} - 3){x_1}^2 + \left(-\frac{4C}{5} - \frac{17}{5}\right)x_1 {x_3}^2 + \left(\frac{16}{5} - \frac{C}{5}\right)x_1 x_3 + \left(C - \frac{1}{2}\right)x_1 \\ \dot{x_3} = \left(\frac{7}{2} - a_{11} - 2C\right){x_1}^2 x_3 + \left(-\frac{14C}{5} - \frac{31}{10}\right)x_1 {x_3}^2 + \left(C + \frac{22}{5}\right)x_1 x_3 + \left(-\frac{4C}{5} - \frac{17}{5}\right){x_3}^3 + \left(\frac{37}{5} - \frac{C}{5}\right){x_3}^2 + (C - 4)x_3 \end{cases} \quad (4)$$

Координаты состояний равновесия этой системы принимают вид (они приведены в том же порядке, что и координаты состояний равновесия системы (1)):

1. $(1, 0)$
2. $(0, 0)$
3. $(0, 1)$
4. $(0, -\frac{5C-20}{4C+17})$
5. $(\frac{7}{10a_{11}-32}, \frac{10a_{11}-39}{10a_{11}-32})$
6. $(-\frac{2C-1}{4C+2a_{11}-7}, 0)$
7. $(-\frac{35(10C-7)}{124C+170a_{11}+40Ca_{11}-439}, \frac{1440C+400a_{11}-100Ca_{11}-1595}{248C+340a_{11}+80Ca_{11}-878})$

При выполнении условия

$$C = \frac{80a_{11}-\sqrt{186400{a_{11}}^2-1128560a_{11}+2260129}+535}{24(15a_{11}-41)} \tag{5}$$

состояние равновесия 7 имеет пару сопряжённых мнимых собственных чисел.

Прямая, проходящая через состояния равновесия 4 и 6 имеет общий вид

$$x_3 = \frac{C + a_{22} - a_{32} - Ca_{22}}{a_{22} - a_{23} - a_{32} + a_{33} - Ca_{22} + Ca_{23}}(1 - \frac{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} + Ca_{21} - Ca_{22}}{C - a_{12} + a_{22} - Ca_{22}}x_1)$$

При выбранных значениях параметров она принимает вид

$$x_3 = -\frac{(5C-20)(4C+2a_{11}-7)}{(2C-1)(4C+17)}x_1 - \frac{5C-20}{4C+17}$$

Найдём условия, при которых эта прямая является инвариантным множеством.

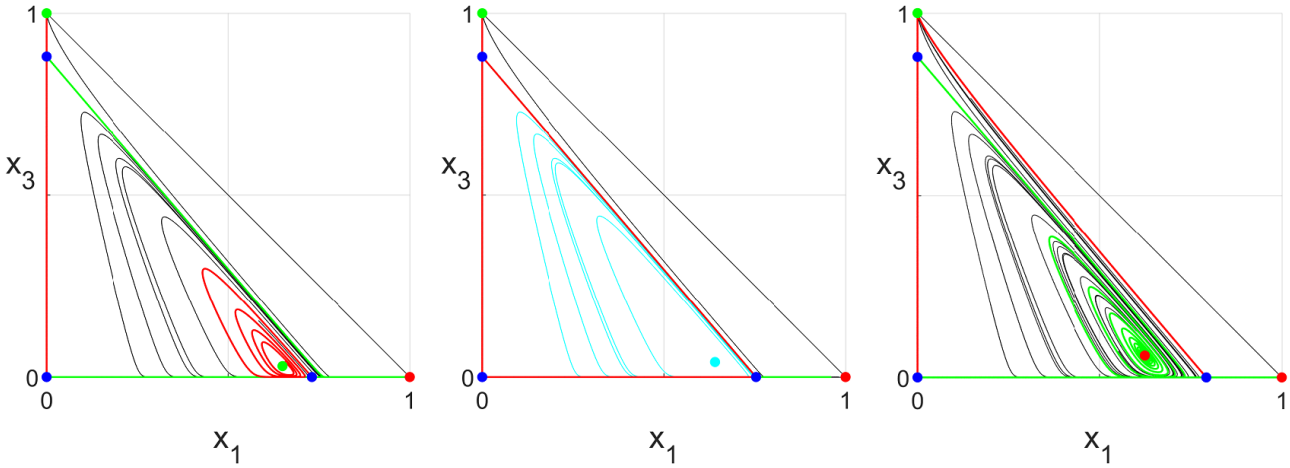
Для этого подставим выражение для x_3 в систему (4). После преобразований можно получить одно уравнение вида

$$\frac{(C-4)(4C+2a_{11}-7)(535C+250a_{11}+80Ca_{11}-180C^2a_{11}+492C^2-1003)}{2(8C^2+30C-17)^2}{x_1}^2 +$$
$$+\frac{(C-4)(2C-1)(535C+250a_{11}+80Ca_{11}-180C^2a_{11}+492C^2-1003)}{2(8C^2+30C-17)^2}x_1 = 0$$

При выполнении условия (5) оба коэффициента полученного полинома станут равны 0. Таким образом, прямая, проходящая через состояния равновесия 4 и 6, при выполнении этого условия является инвариантным множеством. Кроме того, состояние равновесия 5 также лежит на этой прямой.

При выполнении условия (5) и условия $\frac{587}{330} < a_{11} < 2.5$ состояния равновесия 2, 4 и 6 являются сёдлами. Поэтому найденная прямая, проходящая через состояния равновесия 4 и 6, содержит сепаратрисы этих сёдел. У седла 4 две другие сепаратрисы лежат на границе симплекса $x_1 = 0$, а у седла 6 – на границе симплекса $x_3 = 0$ (это следует из того, что у седла 4 координата x_1, а у седла 6 – координата x_3 равны нулю). У состояния равновесия 2 одна из сепаратрис лежит на границе симплекса $x_1 = 0$, и ещё одна – на границе симплекса $x_3 = 0$. Из сказанного следует, что эти три седла соединены гетероклиническими траекториями и совместно с ними образуют гетероклинический цикл (см. рисунок (1)). Внутри этого цикла лежит состояние равновесия 7, которое является центром.

На рис. 1 показана бифуркация, в результате которой состояние равновесия 7 теряет свою устойчивость. На рисунке под буквой (a) оно является устойчивым фокусом. На рисунке под буквой (b) приведён фазовый портрет при бифуркационных значениях параметров. При бифуркации в фазовом пространстве существует гетероклинический цикл, состоящий из трёх сёдел и трёх гетероклинических траекторий. Внутри него лежит состояние равновесия типа «центр» (состояние равновесия 7). После бифуркации состояние равновесия 7 становится неустойчивым фокусом.



(a) $a_{11} = 2.2$, $C = 0.589$ (b) $a_{11} = 2.2$, $C = 0.590112096367379$ (c) $a_{11} = 2.2$, $C = 0.592$

Рис. 1. Фазовые портреты при различных параметрах a_{11} и C. Красные точки соответствуют неустойчивым состояниям равновесия, зелёные – устойчивым, синие – седловым, голубые – центрам. Красные линии соответствуют неустойчивым сепаратрисам сёдел, зелёные – устойчивым сепаратрисам, голубые – замкнутым траекториям, чёрные – регулярным траекториям

Литература

1. P. K. Newton, Y. Ma. Nonlinear adaptive control of competitive release and chemotherapeutic resistance // Physical review E. 2019. Vol. 99, No. 2. P. 022404.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СОБЫТИЯ В МОДЕЛИ НЕЙРОННОГО АНСАМБЛЯ С МЕМРИСТОРНОЙ СВЯЗЬЮ[1*]

А.Г. Коротков, Т.А. Леванова

Нижегородский государственный университет им. Лобачевского

В данной работе изучается влияние мемристорной связи на ансамбль из двух элементов Фитцхью-Нагумо с возбуждающими химическими синаптическими связями. В исследуемой модели наряду с режимами нейроноподобной активности (режимы синфазной, противофазной и последовательной спайковой активностей) был обнаружен режим хаотической активности, при котором в системе возникают экстремальные события.

Ключевые слова: модель Фитцхью-Нагумо, химическая синаптическая связь, хаос, экстремальные события, нейронный ансамбль.

1. Введение

Данная работа является продолжением работы [1]. В работе [1] исследовалась система двух возбуждающе связанных элементов Фитцхью-Нагумо с дополнительной мемристорной связью.

Под экстремальными событиями будем понимать достаточно нечастые непериодические отклонения какой-либо величины, однозначно определяющейся фазовыми переменными, от нормальных значений, причём величина этих отклонения достаточно велика.

2. Модель

Математической моделью ансамбля двух элементов будет следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x}_1 = x_1 - \frac{{x_1}^3}{3} - y_1 + gI\left(\arctan\frac{y_2}{x_2}\right) + \rho(z)(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 - a \\ \varepsilon\dot{x}_2 = x_2 - \frac{{x_2}^3}{3} - y_2 + gI\left(\arctan\frac{y_1}{x_1}\right) + \rho(z)(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 - a \\ \dot{z} = x_1 - x_2 \end{cases} \quad (1)$$

где $\rho(z) = k_1 + k_2 z^2$ – величина, характеризующая мемристорную связь, $I(\varphi) = \frac{1}{1+\exp(k(\cos\frac{\delta}{2} - \cos(\varphi - \alpha - \frac{\delta}{2}))}$ – функция, задающая химическую синаптическую связь между элементами. График зависимости этой функции от фазы $\varphi_i = \arctan\frac{y_i}{x_i}$ приведён на рисунке 1. Функция связи такого вида использовалась в работах [1], [2] и [3].

Так как система (1) инвариантна относительно замены переменных $x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2, z \leftrightarrow -z$, то множество $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z = const$ является инвариантным (причём это выполняется для функции $I(\varphi)$ произвольного вида) и фазовый портрет системы симметричен относительно этого множества.

Кроме указанной выше симметрии, система (1) обладает первым интегралом $F = y_1 - y_2 - z = const$. На поверхности уровня $F = C$ система (1) принимает вид

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-72-10128.

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x}_1 = x_1 - \frac{{x_1}^3}{3} - y_1 + I\left(\arctan\frac{y_2}{x_2}\right) + (k_1 + k_2(y_1 - y_2 + C)^2)(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 - a \\ \varepsilon\dot{x}_2 = x_2 - \frac{{x_2}^3}{3} - y_2 + I\left(\arctan\frac{y_1}{x_1}\right) + (k_1 + k_2(y_1 - y_2 + C)^2)(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 - a \end{cases}$$

(2)

Примем $a = -1.01$, $\varepsilon = 0.01$, $k = 50$, $\delta = 50^\circ$.

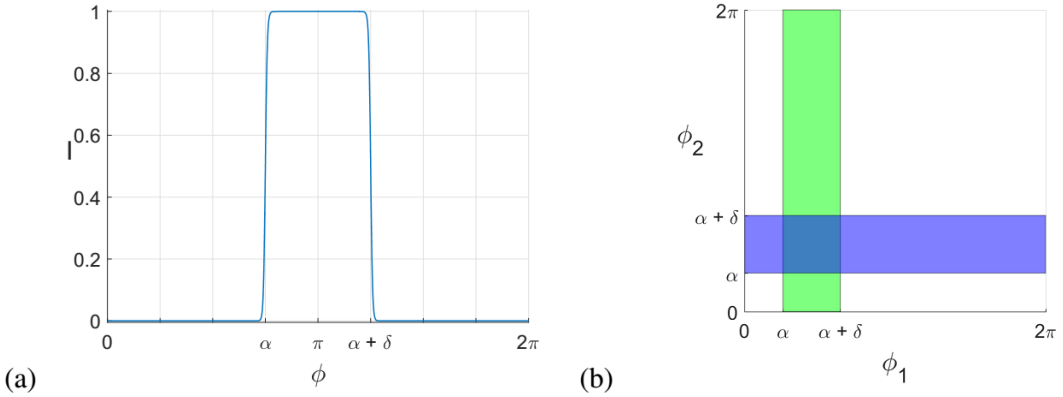
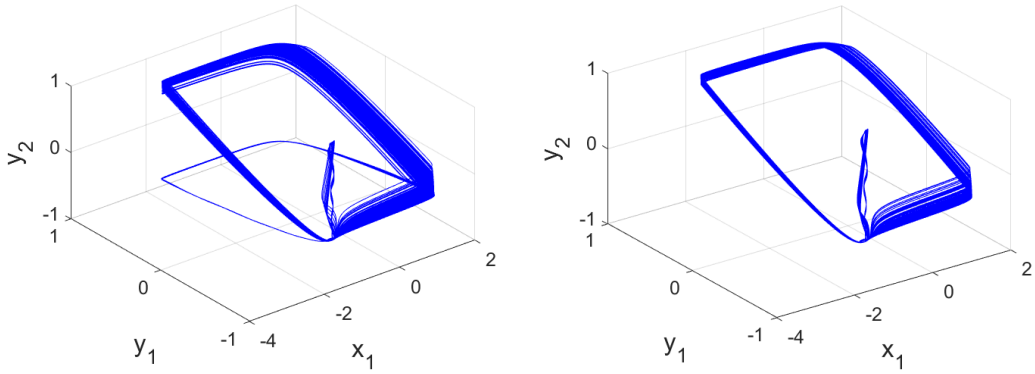


Рис. 1. (a) Функция связи. (b) Области активирования элементов на плоскости $\varphi_1 = \arctan\frac{y_1}{x_1}$, $\varphi_2 = \arctan\frac{y_2}{x_2}$. Когда точка (φ_1, φ_2) лежит в горизонтальной полосе, то активируется первый элемент, когда в вертикальной – второй

3. Экстремальные события

В исследуемой системе были обнаружены различные режимы нейроноподобной активности: возбудимый режим, а также режимы синфазной, противофазной и последовательной спайковой активностей. Кроме того, был обнаружен режим хаотической активности, при котором в системе возникают экстремальные события (рисунок 2).



(a) $\alpha = 210^\circ, g = 0.02037, k_1 = 0.001, k_2 = 0.0018$ (b) $\alpha = 210^\circ, g = 0.02252, k_1 = 0.001, k_2 = 0.0018$

Рис. 2. Экстремальные события в системе (1). (a) В аттракторе условно можно выделить три части. Почти вся траектория на аттракторе лежит в центральной части, с редкими заходами в нижнюю или верхнюю части. (b) В аттракторе условно можно выделить две части. Почти вся траектория на аттракторе лежит в нижней части, с редкими заходами в верхнюю часть

Литература

1. Korotkov A. G., Kazakov A. O., Levanova T. A. Effects of memristor-based coupling in the ensemble of FitzHugh–Nagumo elements // The European Physical Journal Special Topics. 2019. V. 228, No. 10. P. 2325–2337.

2. Korotkov A. G., Kazakov A. O, Levanova T. A., Osipov G. V. The dynamics of ensemble of neuron-like elements with excitatory couplings // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 71. P. 38–49.
3. Korotkov A. G., Kazakov A. O, Levanova T. A., Osipov G. V. Chaotic regimes in the ensemble of FitzhHugh-Nagumo elements with weak couplings // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 33. P. 241–245.

АНСАМБЛЬ ВОЗБУЖДАЮЩЕ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ АДЛЕРА[1*]

А.Г. Коротков[1], Т.А. Леванова[1], М.А. Закс[2], Г.В. Осипов[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Лобачевского,
[2]Institute of Physics, Humboldt University of Berlin

В данной работе предложена простая модель нейроноподобного ансамбля, состоящего из двух возбудимых элементов, моделируемых фазовым уравнением Адлера. В исследуемой модели обнаружены различные режимы нейроноподобной активности: синфазный и противофазный спайковый режимы, режим покоя. В работе исследованы бифуркации рождения этих режимов.

Ключевые слова: уравнение Адлера, предельный цикл, бифуркация, нейронный ансамбль.

1. Введение

Будем рассматривать ансамбль из двух возбуждающе связанных фазовых осцилляторов. Фазовым пространством такой системы является тор. Под *синфазным* предельным циклом будем понимать такой предельный цикл, на котором фазы обоих элементов совпадают: $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Под *противофазным* будем понимать такой предельный цикл, на котором фаза одного элемента отстаёт от фазы другого на половину периода этого цикла: $\varphi_1(t) = \varphi_2\left(t + \frac{T}{2}\right)$, где T – период этого предельного цикла.

Из определения следует, что в фазовом пространстве системы не может сосуществовать два или более противофазных предельных циклов.

2. Модель

Модель одного элемента имеет вид $\dot{\varphi} = \gamma - \sin\varphi$. Фазовым пространством системы является окружность. При $\gamma < 1$ в фазовом пространстве системы существуют два состояния равновесия: $\varphi_{01} = \arcsin\gamma$ (устойчивое) и $\varphi_{02} = \pi - \arcsin\gamma$ (неустойчивое). При $\gamma > 1$ состояний равновесия нет. При $\gamma = 1$ происходит касательная бифуркация.

Математической моделью ансамбля двух элементов будет следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \gamma - \sin\varphi_1 + d \cdot I(\varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 = \gamma - \sin\varphi_2 + d \cdot I(\varphi_1) \end{cases} \tag{1}$$

где $I(\varphi) = \frac{1}{1+\exp(k(\cos\frac{\delta}{2} - \cos(\varphi - \alpha - \frac{\delta}{2}))}$ – функция, задающая связь между элементами.

Функция $I(\varphi)$ является гладкой функцией, хорошо аппроксимирующей кусочно-постоянную функцию $\tilde{I}(\varphi) = \begin{cases} 1, \text{если } \alpha < \varphi < \alpha + \delta \\ 0, \text{если } \varphi \le \alpha \text{ или } \varphi \ge \alpha + \delta \end{cases}$. Погрешность аппроксимации уменьшается при увеличении коэффициента k. График зависимости этой функции от фазы φ приведён на рисунке 1. Такая функция связи использовалась в работах [1], [2] и [3].

Фазовым пространством системы (1) является тор. Так как система (1) инвариантна относительно циклической перестановки индексов, то прямая $\varphi_1 = \varphi_2$ является инвариантной (причём это выполняется для функции $I(\varphi)$ произвольного вида) и фазовый портрет системы симметричен относительно этой прямой.

Примем $\gamma = 0.7$, $d = 1$ (этот параметр характеризует силу связи между элементами; так как он положителен и $\gamma < 1$, то связь возбуждающая), $k = 50$. Будем исследовать влияние пара-

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-12-00367.

метров α и δ ($0 \leq \alpha, \delta < 2\pi$) на динамику ансамбля (из (1) следует, что α может быть определено с точностью до 2π, поэтому пространством параметров является цилиндр).

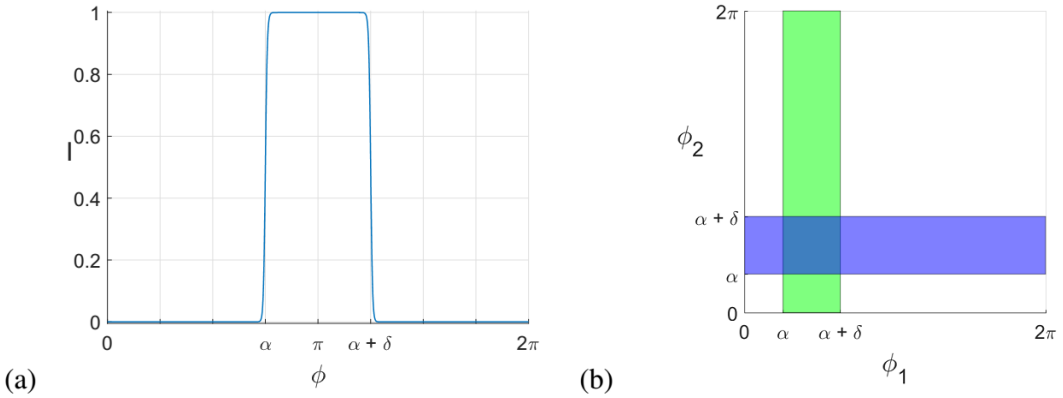


Рис. 1. (a) Функция связи. (b) Области активирования элементов на фазовом торе. Когда состояние системы (1) лежит в горизонтальной полосе, то активируется первый элемент, когда в вертикальной – второй

3. Режимы нейроноподобной активности

В исследуемой системе были обнаружены различные режимы нейроноподобной активности: возбудимый режим, а также режимы синфазной и противофазной активностей. На рисунке 2 приведено разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным режимам.

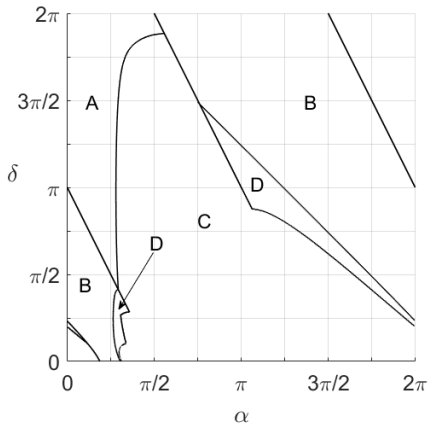


Рис. 2. Карта режимов. Области A соответствует режим синфазной спайковой активности, области B – режим противофазной спайковой активности, области C – возбудимый режим. В области D наблюдается бистабильность: сосуществуют противофазная спайковая активность и возбудимый режим.

При переходе из области A в область B противофазный предельный цикл становится устойчивым, а синфазный – неустойчивым. При переходе из области C в область A рождается синфазный предельный цикл в результате седло-узловой бифуркации на инвариантной кривой. При переходе из области C в область D рождается противофазный предельный цикл в результате гетероклинической бифуркации. При переходе из области C в область B противофазный предельный цикл становится устойчивым (в момент бифуркации система становится обратимой).

Литература

1. Korotkov A. G., Kazakov A. O, Levanova T. A., Osipov G. V. The dynamics of ensemble of neuron-like elements with excitatory couplings // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 71. P. 38–49.

2. Korotkov A. G., Kazakov A. O, Levanova T. A., Osipov G. V. Chaotic regimes in the ensemble of FitzhHugh-Nagumo elements with weak couplings // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 33. P. 241–245.
3. Korotkov A. G., Kazakov A. O, Levanova T. A. Effects of memristor-based coupling in the ensemble of FitzHugh-Nagumo elements // The European Physical Journal Special Topics. 2019. Vol. 228, no. 10. P. 2325–2337.

СРАВНЕНИЕ МИКРОАРХИТЕКТУР AMD ZEN2 И INTEL CASCADE LAKE НА ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕЛЕНИЯ КЛЕТОК МЛЕКОПИТАЮЩИХ[1*]

М.А. Кривов, Н.Г. Ирошников, А.А. Бутылин, А.Е. Филиппова, П.С. Иванов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Современные микроархитектуры центральных процессоров, в частности, AMD Zen2 и Intel Cascade Lake, позволяют собрать системы с общей памятью, обладающие более чем 100 физическими ядрами. В работе представлены результаты сравнения производительности данных микроархитектур при проведении численного моделирования митоза эукариотической клетки. В качестве бенчмарка использовался разрабатываемый авторами пакет MiCoSi, ранее демонстрировавший линейную масштабируемость при работе на кластерных системах. Тестирование осуществлялось на узлах облака Amazon EC2, имеющих по 96 логических ядер. Показано, что в рамках решаемой задачи две исследуемые микроархитектуры демонстрируют близкие показатели производительности, однако при использовании большого числа ядер микроархитектура Intel Cascade Lake обходит своего конкурента AMD Zen2 на 12-15%.

Ключевые слова: многоядерные процессоры, общая память, параллельное программирование, деление клеток, митоз, прометафаза.

1. Введение

Современные микроархитектуры типа AMD Zen2 и Intel Cascade Lake позволяют собрать вычислительные системы, обладающее десятками и даже сотней вычислительных ядер, снабжённых общей памятью. В результате многие прикладные и научные задачи, для решения которых ранее требовались небольшие кластеры, теперь оказываются по силам отдельным рабочим станциям.

Возникает вполне логичный вопрос: насколько готовы современные пакеты к работе на подобных системах в естественном для них SMP-режиме без какой-либо эмуляции кластера или разделения вычислений по процессам? Действительно, проблемы могут возникнуть как на уровне архитектуры самого пакета, не способного эффективно задействовать подобное количество ядер, так и из-за особенностей организации памяти, после перехода к чиплетной компоновке процессора, доступ к которой стал ещё более неоднородным.

Как следствие, достаточно большое количество работ посвящено оценке производительности различных алгоритмов и пакетов при их работе на современных системах с большим количеством ядер. Настоящая статья преследует аналогичные цели, ориентируясь на такие предметные области, как биофизика и вычислительная биология. Раздел 2 содержит описание используемых для тестов 48-ядерных узлов облака Amazon EC2, которые были представлены в 2019-2020 годах и оснащены процессорами на базе микроархитектур AMD Zen2 и Intel Cascade Lake. В разделе 3 приводится краткое описание процесса деления эукариотической клетки на две дочерних (митоза), моделирование которого в наши дни является достаточно актуальной задачей биофизики. Конкретные настройки численных опытов и краткая характеристика пакета MiCoSi, используемого в роли бенчмарка, приведены в разделе 4. Наконец, раздел 5 содержит сделанные авторами выводы о производительности обеих микроархитектур в привязке к выбранной предметной области.

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-07-01164а.

2. Вычислительные системы

Расчёты проводились на узлах c5ad (AMD) и c5d (Intel) облака Amazon EC2, позволяющих создать вычислительную систему с 48 физическими ядрами и общей памятью объёмом 192 ГБ. Приведённая в Табл. 1 информация об их технических характеристиках была получена путем обобщения официальной документации и результатов сторонних тестов. Стоит отметить, что рассматриваемые процессоры созданы специально по заказу компании Amazon, поэтому для неизвестных параметров приведены значения близких моделей.

Таблица 1. Технические характеристики используемых вычислительных систем

Узел Amazon EC2	**c5ad.24xlarge**	**c5d.4xlarge**	**c5d.24xlarge**
Процессор	AMD EPYC 7R32	Intel Xeon Platinum 8124M	Intel Xeon Platinum 8275CL
Микроархитектура	Zen2	Skylake	Cascade Lake
Год выпуска	*2019*[*]	2017	*2019*[***]
Тех. процесс, нм	7 + 14	14	14
Число транзисторов, млрд	*~32*[*]	*~8*[**]	*~8*[***] x 2
TDP, Ватт	280	240	240 x 2
Число ядер/потоков, шт	48 / 96	8 / 16 из 18 / 36	24 / 48 x 2
Базовая частота, ГГц	*2.2*[*]	3.0	3.0
Динамическая частота, ГГц	3.3	3.5	3.9
Кэши L1/L2, КБ на ядро	32+32 / 512	32+32 / 1.0	32+32 / 1.0
Кэши L3, МБ	192	24.75	35.75 x 2
Тип памяти	*DDR4-3200*[*]	DDR4-2666	*DDR4-2933*[***]
Каналы памяти, шт	8	6	6 x 2
Объём памяти, ГБ	192	32	192

[*] *AMD EPYC 7552*
[**] *Intel Xeon Gold 6154*
[***] *Intel Xeon Platinum 8270*

Основой процессоров AMD EPYC являются независимые чиплеты с 8 ядрами и 32 МБ кэш-памяти уровня L3, которые производятся по технологии 7 нм в виде отдельных чипов и впоследствии объединяются в один SMP-процессор. За работу с памятью и интерфейсами ввода-вывода отвечает ещё один чиплет, но уже изготовленный с использованием технологии 14 нм. В зависимости от модели процессор может содержать до 8+1 чиплетов, соединённых высокоскоростной шиной, что в сумме обеспечивает до 64 физических ядер. Подобная чиплетная архитектура делает возможным использование намного большего числа транзисторов, что, например, привело к существенному увеличению размера кэш-памяти L3 (192 МБ против 35.75 МБ у аналога от Intel). В дополнение к обычным ядрам, серверный вариант рассматриваемой микроархитектуры Zen2 (именуемый Rome) содержит специализированное ARM ядро, отвечающее за неявное шифрование содержимого оперативной памяти для предотвращения неавтоматизированного доступа к данным.

В решениях от Intel используется монолитная архитектура, и вычислительные ядра одного процессора располагаются ровно на одном чипе. Подобная структура накладывает заметные ограничения, в первую очередь на максимальное количество ядер (в случае узлов Amazon – 24 против 48 у AMD), однако, как показывают независимые замеры, позволяет обеспечить повышенную производительность отдельно взятого ядра. Например, в работе [1] проводится аналогичное сравнение микроархитектур AMD Zen2 и Intel Skylake, но на задаче вычислительной гидродинамики. Согласно выводам авторов [1], в сценарии с преобладанием вычислительной нагрузки 40 ядер процессора Intel Xeon обеспечивают производительность, аналогичную 64 яд-

рам AMD EPYC. Другим отличием микроархитектуры Skylake и её доработанной версии Cascade Lake от Zen2 является поддержка векторных расширений AVX-512, позволяющих ядру за один такт выполнять по восемь операций над числами с двойной точностью. Также важно отметить, что рассматриваемые процессоры Intel производятся по формально устаревшей технологии 14 нм, что в теории ограничивает их потенциал в плане повышения тактовой частоты и увеличения числа ядер.

Обе микроархитектуры Zen2 и Cascade Lake имеют возможность работы в многопроцессорных конфигурациях. Таким образом, максимально возможное число ядер на одном узле для процессоров AMD EPYC равняется 128 (2 процессора по 64 ядра), в то время как для Intel Xeon, согласно документации, этот показатель может достигать 224 (8 процессоров по 28 ядра).

3. Моделируемый биологический процесс

Клеточный цикл подавляющего большинства эукариотических клеток состоит из четырёх повторяющихся этапов, ключевым среди которых принято считать митотическое деление, завершающееся образованием двух генетически идентичных дочерних клеток. Нарушение данного процесса может привести к гибели клетки или, что ещё хуже, к появлению анеуплоидных дочерних клеток с изменённым набором хромосом, что в ряде случаев становится причиной развития злокачественных новообразований. Для подавления возможных «ошибок» деления в клетке имеются различные защитные механизмы, и на сегодняшний день понимание их работы является важной фундаментальной задачей.

Сложность изучения митоза обусловлена небольшими размерами исследуемых объектов, (доли микрометра), а также разнообразием биохимических реакций, задействованных в процессе клеточного деления. Как следствие, биофизики активно используют аппарат математического моделирования, позволяющий качественно дополнить и расширить экспериментальные данные. Например, в работе [2] поднимался вопрос о том, какой именно должна быть формула для скорости полимеризации микротрубочек, состоящих из белков тубулина, если их взаимодействия с хромосомами начинает наблюдаться в течение первых десяти минут митоза. Примером другого направления исследований является статья [3], авторам которой математическая модель позволила обобщить известные факты о механизме зацепления микротрубочек за хромосому.

Авторами настоящей статьи предпринята попытка построить собственную комплексную математическую модель, непрерывно описывающую протекание сразу трёх стадий митоза – прометафазы, метафазы и анафазы (Рис. 1). На первой из них происходит разрушение ядерной мембраны и выход хромосом в цитоплазму клетки. Далее следует метафаза, характеризующаяся ростом тубулиновых микротрубочек, которые прикрепляются к хромосомам и тянут их к соответствующему полюсу. Через некоторое время сцепленные хромосомы за счёт достижения баланса сил выравниваются в экваториальной плоскости клетки. Далее следует скоротечная анафаза, на которой центромера, связывающая сестринские хромосомы, разрывается, после чего они распределяются по двум новым дочерним ядрам.

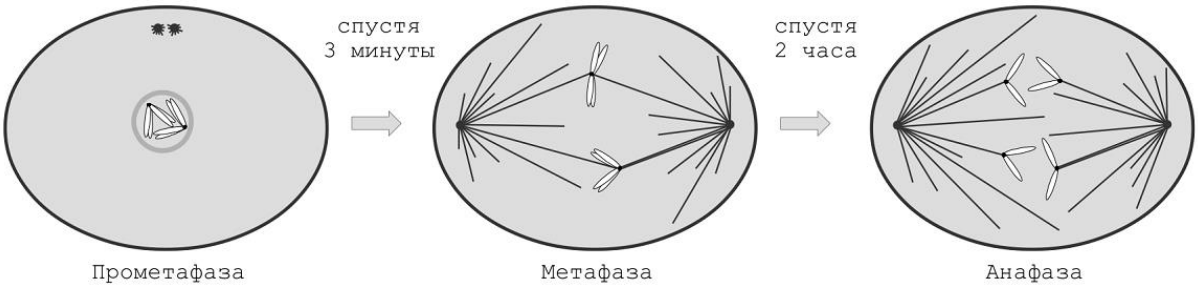


Рис. 1. Схематичное изображение стадий деления клетки, описываемых с помощью предложенной авторами модели

Стоит отметить, что вопросам построения математических моделей делящейся клетки и отдельных её частей посвящено огромное количество работ, зачастую основанных на взаимо-

исключающих подходах к описанию митоза. Классификация наиболее известных моделей, актуальных по состоянию на 2012 год, содержится в обзоре [4].

4. Методика тестирования

Для оценки производительности вычислительных систем был использован разрабатываемый авторами пакет с открытым исходным кодом MiCoSi [5]. Он содержит реализацию предложенной нами трёхмерной математической модели делящейся клетки, а также снабжён интерфейсами для гибкой настройки численных опытов и проведения замеров интересующих исследователя физических величин. Версия решателя соответствовала git-ревизии 6aadbfc, сборка пакета была выполнена с помощью компилятора Visual C++ 2017 и успешно прошла все функциональные и модульные тесты.

В качестве конкретного численного опыта была составлена программа для моделирования прометафазы – этапа деления клетки продолжительностью порядка 180 секунд, характеризующегося расхождением полюсов веретена деления в диаметрально противоположные части клетки, что порождает большое число взаимодействий между тубулиновыми микротрубочками и свободно дрейфующими в цитоплазме парами хромосом.

Было рассмотрено два базовых сценария. В первом, далее обозначаемом как 'Compute-bound' (Рис. 2A), модельная клетка состоит из трёх пар хромосом и 3000 микротрубочек. Моделирование осуществляется с шагом 0.1 секунды, а на диск сохраняются только параметры финального состояния клетки. Данный сценарий порождает существенный объём вычислительной нагрузки по проведению геометрических проверок, а также составлению и решению СЛАУ для последующего нахождения скоростей. Второй сценарий, имеющий обозначение 'Memory-bound' (Рис. 2B), описывает более простую клетку с одной парой хромосом и 1000 микротрубочек. Помимо этого, выгрузка состояний осуществляется каждые 0.01 секунды, в результате чего создаётся около 628 МБ выходных данных. Как следствие, начинают преобладать операции по сериализации и запаковке информации в собственный потоковый формат *.cell.

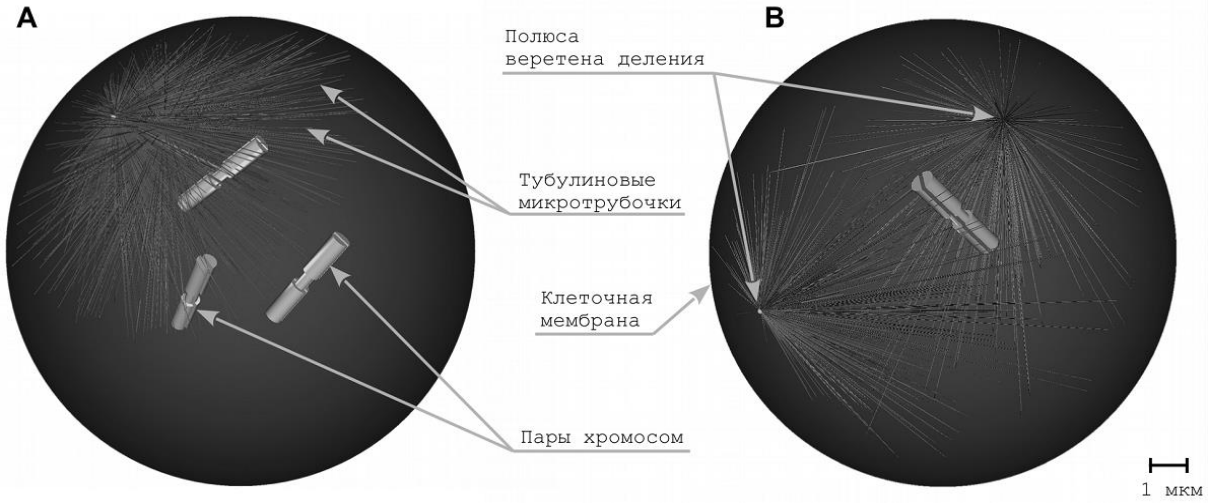


Рис. 2. Визуализация клеток, используемых для проведения численного моделирования прометафазы
(A) Сценарий 'Compute-bound' – 3 пары хромосом и 3000 микротрубочек
(B) Сценарий 'Memory-bound' – 1 пара хромосом и 1000 микротрубочек

Размер ансамбля, в зависимости от типа теста, равнялся 48 и 384 виртуальным клеткам. Число ядер процессора, задействованных для проведения расчётов, ограничивалось посредством лимитирования задач – клетки объединялись в группы строго нужного размера. В качестве метрики было использовано суммарное время, затраченное на выполнение метода Launcher.StartAndWait(). Тестирование проводилось в облаке Amazon EC2 на узлах c5d (Intel Skylake и Cascade Lake) и c5ad (AMD Zen2) с установленной системой Windows Server 2012 R2. Запуски осуществлялись с локальных NVMe-дисков, имеющих физическое подключение к узлам.

5. Результаты и обсуждение

5.1. При интенсивных вычислениях на небольшом числе ядер, Skylake и Zen2 демонстрируют схожую производительность

На Рис. 3A приведены замеры на узлах c5d.4xlarge и c5ad.4xlarge, имеющих по восемь физических ядер. В подобных сценариях процессоры Intel Xeon могут работать на чуть более высоких тактовых частотах (3.5 ГГц против 3.3 ГГц), однако производительность при этом оказывается идентичной. В обоих случаях масштабируемость была близка к линейной, но при переходе к виртуальным ядрам соответствующая технология от AMD, позволяющая разделить одно физическое ядро на два логических, показала немного лучшие результаты – выигрыш составил от 5.8 до 9.5%.

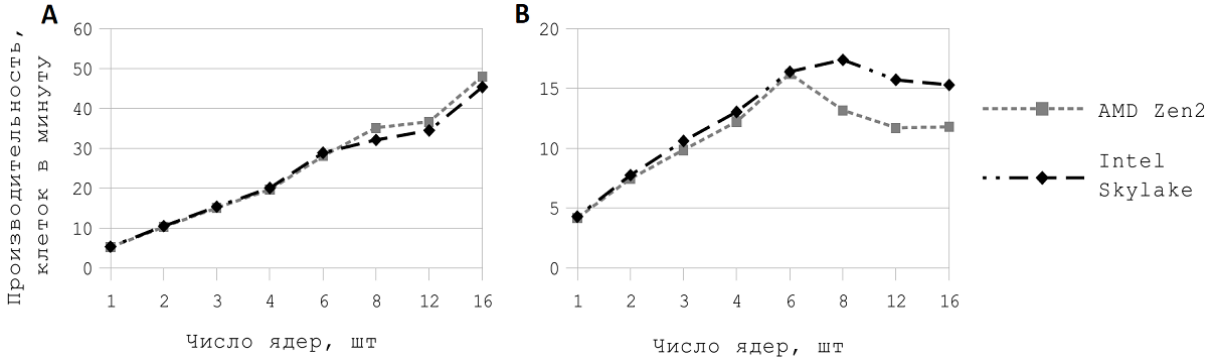


Рис. 3. Сравнение производительности при использовании узлов c5ad.4xlarge (AMD Zen2) и c5d.4xlarge (Intel Skylake) на ансамбле из 48 клеток, больше – лучше
(A) Сценарий 'Compute-bound', без выгрузки данных
(B) Сценарий 'Memory-bound', выгрузка данных с шагом 10^{-2} сек.

5.2. При активной работе с памятью Skylake незначительно опережает Zen2

Сценарий 'Memory-bound' (Рис. 3B) ожидаемо продемонстрировал, что с некоторого момента добавление вычислительных потоков приводит лишь к снижению производительности – в обоих случаях этим порогом оказались 6 ядер. Важно отметить, что при доминировании работы с памятью над вычислениями микроархитектура Skylake смогла обеспечить лучшие результаты, обойдя Zen2 на 29.5 – 32%. Данные наблюдения могут быть объяснены вдвое большим коэффициентом соотношения числа каналов памяти к ядрам (0.33 против 0.167), а также чиплетной архитектурой процессоров Zen2, фактически делающей общую память неоднородной.

5.3. Поддержка большого числа ядер требуется не только от программ, но и от операционных систем

Наиболее интересными результатами охарактеризовались запуски пакета MiCoSi на всех 96 логических ядрах узлов c5d.24xlarge и c5ad.24xlarge (Рис. 4). К сожалению, данный тест не удалось завершить в полной мере, так как операционная система Windows Server 2012 R2 накладывала маску соответствия (affinity mask) и искусственно ограничивала число ядер, используемых одним процессом. Аналогичная особенность наблюдалась также и на более новой версии Windows Server 2019, что может говорить о техническом характере этой проблемы – например, используемые процессоры EPYC 7R32 стали общедоступными только с 2020 года и, возможно, ещё не в полной мере поддерживаются со стороны операционных систем. При этом сам пакет MiCoSi ранее демонстрировал линейную масштабируемость даже на 100 ядрах MPI-кластера [6].

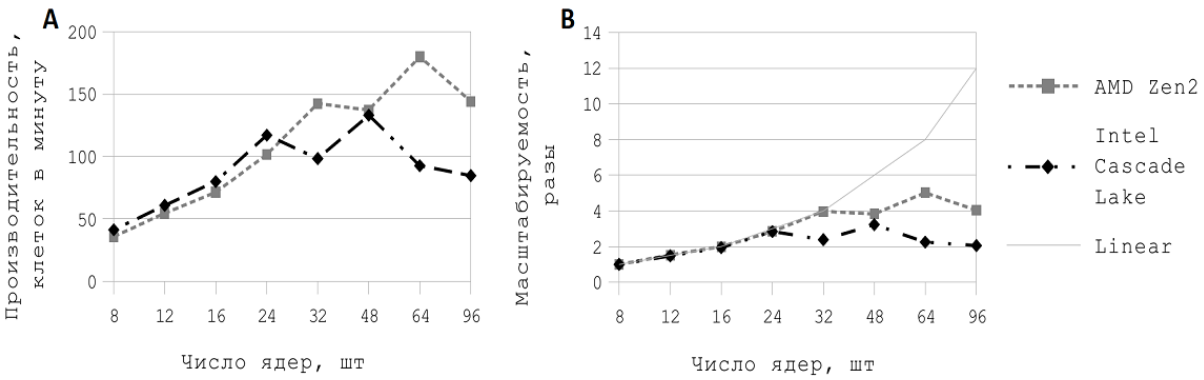


Рис. 4. Сравнение производительности узлов c5ad.24xlarge (AMD Zen2) и c5d.24xlarge (Intel Cascade Lake) при преобладании вычислительной нагрузки на ансамбле из 384 клеток, больше – лучше

Данные ограничения проявляются при попытках задействовать более 24 ядер процессора Intel Xeon и 32 ядер AMD EPYC, таким образом, имеется возможность их сравнить только в диапазоне 8 – 24. Обе микроархитектуры обеспечивали линейное масштабирование по ядрам, однако Cascade Lake оказалась быстрее на 12 – 15%. Стоит напомнить, что динамическая частота этого процессора выше на 18% (3.9 против 3.3 ГГц), что может объяснять этот выигрыш.

5.4. При одинаковой стоимости ядро-часа Cascade Lake оказывается предпочтительнее Zen2

Если абстрагироваться от технических характеристик процессоров, ориентируясь только на стоимость аренды соответствующего оборудования, то для пакета MiCoSi предпочтительной микроархитектурой является Cascade Lake. В облаке Amazon EC2 узлы c5d и c5ad позиционируются как взаимозаменяемые и имеют одинаковую стоимость. При этом решения от Intel обеспечивают лучшую производительность в сценарии интенсивной работы с памятью (29.5 – 32%) и более высокую скорость при проведении расчётов на большом числе ядер (12 – 15%). Единственным преимуществом процессоров на базе Zen2 оказалась более качественная реализация логических ядер, однако выигрыш от этой технологии не столь значителен (5.8 – 9.5%).

Литература

1. Ouroa P., Lopez-Novoac U., Guest M.F. On the performance of a highly-scalable Computational Fluid Dynamics code on AMD, ARM and Intel. URL: https://arxiv.org/pdf/2010.07111.pdf (дата обращения: 25.10.2020).
2. Wollman R., et al. Efficient Chromosome Capture Requires a Bias in the ‘Search-and-Capture’ Process during Mitotic-Spindle Assembly // Current Biology. 2005. Vol. 15. pp. 828–832.
3. Long A.F., Kuhn J., Dumont S. The mammalian kinetochore–microtubule interface: robust mechanics and computation with many microtubules // Current Opinion in Cell Biology. 2019. Vol. 60. pp. 60–67.
4. McIntosh R. et. al. Biophysics of mitosis // Quarterly Reviews of Biophysics. 2012. Vol. 45. pp. 147–207.
5. Кривов М.А., Иванов П.С. MiCoSi: Mitosis Computer Simulator. URL: https://github.com/m-krivov/MiCoSi (дата обращения: 25.10.2020).
6. Кривов М.А. и др. Моделирование деления биологических клеток в стадии метафазы на суперкомпьютере "Ломоносов-2" // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2018. Том 19. С. 327–339.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФУНКЦИИ ФИТНЕСА ДЛЯ ДВУХВОЗРАСТНОЙ ПОПУЛЯЦИОННОЙ МОДЕЛИ МЕТОДАМИ КЛАССИФИКАЦИИ[1*]

О.А. Кузенков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Решается задача идентификации функции приспособленности (фитнеса) для наследственных стратегий ежедневных вертикальных миграций зоопланктона. Предполагается, что каждый вид зоопланктона имеет две возрастные группы, отличающиеся наследственным режимом миграций. Строится функция приспособленности (фитнеса) на основе попарного сравнения селективных преимуществ некоторого набора видов. Задача определения коэффициентов функции фитнеса сводится к задаче классификации. Для решения задачи используются технологии искусственных нейронных сетей.

Ключевые слова: порядок предпочтительности, задача ранжирования, функция фитнеса, ежедневные вертикальные миграции зоопланктона, методы классификации, нейронные сети.

1. Введение

В современной теоретической биологии ключевую роль играет концепция естественного отбора. Центральным в эволюционной теории является понятие приспособленности. Сравнивая приспособленность разных наследственных единиц, можно прогнозировать результаты эволюции, исследовать направленность изменения экологических систем. Максимизация функции приспособленности (фитнеса) дает возможность выявлять эволюционно устойчивые наследственные стратегии поведения, то есть стратегии, которые сохраняются в сообществе неограниченно долго на фоне появления возможных мутаций [1-3].

Первые попытки математической формализации функции фитнеса были сделаны Холдейном, Фишером и Райтом. В настоящее время задача установления функции приспособленности для различных биологических сообществ привлекает внимание множества исследователей [4, 5]. Существует общий подход решения этой задачи на основе изучения динамики распределения численности популяции по пространству наследственных элементов. Этот подход был предложен в [6] и в дальнейшем получил развитие в серии работ [7-9].

Было показано, что на множестве наследственных элементов можно ввести частичный порядок, отражающий селективные преимущества, путем анализа долгосрочной динамики соответствующих численностей особей [10]. Функция приспособленности вводится как функция сравнения, выражающая данный порядок предпочтительности. При этом основная проблема состоит в выражении этой функции через известные численные значения характеристик каждого наследственного элемента. В работе [9] была представлена методика вывода математического выражения функции фитнеса для широких классов моделей популяционной динамики с учетом возрастной неоднородности.

Однако нередко параметры и коэффициенты, фигурирующие в модели, не могут быть измерены эмпирически, и сами по себе предполагают идентификацию, что затрудняет восстановление функции фитнеса. Поэтому представляется интересным построение функции фитнеса непосредственно на основании известной популяционной динамики. В этом случае задача восстановления функции фитнеса является частным случаем известной задачи ранжирования [11].

Задача ранжирования в общем случае ставится следующим образом: на некотором конечном подмножестве элементов компактного метрического пространства задан частичный порядок; требуется распространить его на все пространство, сохраняя известные результаты сравне-

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Y26.31.0022).

ния. Такой порядок часто задается путем введения функции сравнения на указанном пространстве, большие значения которой соответствуют лучшим наследственным элементам. Для случая сравнения селективных преимуществ наследственных элементов данная функция будет являться функцией приспособленности.

В настоящее время существует множество компьютерных методов и алгоритмов для решения этой задачи, в частности, широко используются методы машинного обучения (learning to rang) [12-14]. Представляется целесообразным использовать существующие технологии для восстановления функции фитнеса по наблюдаемой популяционной динамике. В работах [11, 14] был создан метод решения задачи ранжирования наследственных элементов и идентификации соответствующей функции фитнеса путем сведения ее к задаче классификации – разделения упорядоченных пар элементов на два класса: «первый элемент лучше второго» и «второй элемент лучше первого». В настоящей работе эта методика применяется для идентификации функции приспособленности ежедневных вертикальных миграций зоопланктона.

Явления ежедневно повторяющихся вертикальных миграций зоопланктона обнаружено более двухсот лет назад [16]. Сейчас такие миграции рассматриваются как одно из наиболее значимых синхронных перемещений биомассы на Земле, которые вносят существенное вклад в углеродный обмен и могут потенциально влиять на климат планеты [17-18]. Изучению особенностей наследственного поведения зоопланктона посвящено большое количество исследований [19-22]. Привлечение концепции приспособленности позволяет объяснить зависимость такого поведения от возраста организма [23-25]. В связи с этим становится актуальной задача восстановления функции фитнеса.

Цель настоящей работы состоит в построении функции фитнеса наследственных стратегий поведения зоопланктона для двухвозрастной популяционной модели.

2. Материалы и методы

Настоящее исследование опирается на следующую методику сравнения селективных преимуществ наследственных элементов (стратегий поведения) [9]. Пусть задано некоторое сообщество компактное метрическое пространство V наследственных элементов v некоторого сообщества, например, такими элементами могут быть непрерывные функции поведения. Каждому элементу v в каждый момент времени t ставится в соответствие некоторое число (показатель присутствия) $\rho(v,t)$, характеризующее присутствие v в сообществе во время t. Предполагается, что показатель присутствия удовлетворяет следующим требованиям: он равен нулю, когда элемент в сообществе отсутствует; он является строго большим нуля, когда элемент представлен в сообществе; если в какой-то момент времени этот показатель обращается в ноль, то остается равным нулю во все последующие моменты времени; показатель присутствия непрерывно зависит от времени; стремление его к нулю соответствует утрате (вымиранию, исчезновению) данного элемента в сообществе. Таким показателем может быть численность, биомасса особей с данным наследственным элементом, плотность распределения численности популяции по пространству наследственных единиц и т. п.

С помощью введенного показатель присутствия сравниваются между собой селективные преимущества различных наследственных элементов, а именно, считается, что элемент v лучше, чем элемент w, если выполняется предельное соотношение: $\lim_{t\to\infty} \rho(w,t)/\rho(v,t) = 0$.

В случае равномерной ограниченности сверху показателя присутствия (равномерной ограниченности численности сообщества) это соотношение означает, что элемент v вытесняет элемент w из сообщества с течением времени. Таким образом, на множестве V задается частичный порядок предпочтительности.

Предполагается, что введенный порядок может быть выражен с помощью функционала сравнения $J(v)$, то есть существует функционал, удовлетворяющий условию $J(v)>J(w)$ тогда и только тогда, когда v лучше w. Тогда функционал J является функцией приспособленности, отражающей селективные преимущества наследственных элементов.

Если изменение во времени показателя существования однозначно определяется конечным набором $M(v)= (M_1(v),\ldots M_n(v))$ ключевых наследственных параметров (характеристик), присущих элементу v, то функционал J будет функцией этих параметров: $J(v)=J(M(v))$. Если эта

функция является достаточно гладкой, то для ее аппроксимации целесообразно исплользовать ее разложения по формуле Тейлора. Наиболее простой является линейная аппроксимация, которая имеет вид линейной свертки ключевых параметров

$$J(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i .$$

Если из анализа динамики показателя присутствия вытекает, что элемент *v* лучше, чем элемент *w*, то должно иметь место неравенство $J(M(v)) > J(M(w))$, соответственно, коэффициенты λ_i, должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(v) > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i(w).$$

Зная результаты сравнения наследственных элементов из некоторого конечного набора, можно построить систему линейных неравенств относительно коэффициентов свертки, которая может быть решена с использованием методов линейного программирования.

Но оценка этих коэффициентов возможна также на основе применения методов классификации [11, 15]. Поставим в соответствие упорядоченной паре элементов *(v, w)* точку *M(v)-M(w),* паре *(w,v)* – точку *M(w)-M(v)* в *n*-мерном пространстве ключевых параметров. Тогда гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i = 0$$

должна отделять эти точки друг от друга. Наличие некоторой выборки пар наследственных элементов с известными результатами сравнения задает в *n*-мерном пространстве два множества точек, которые должны лежать по разные стороны от указанной гиперплоскости. Таким образом, задача определения коэффициентов свертки сводится к нахождению компонент нормали разделяющей гиперплоскости. Эта задача классификации, для решения которой существует достаточный арсенал хорошо зарекомендовавших себя методов [12], например, разделяющую гиперплоскость можно построить с помощью детерминанта Фишера. Задача классификации достаточно просто решается методом ближайших соседей, но в данном контексте этот метод имеет ограниченное применение, поскольку не всегда позволяет найти коэффициенты разделяющей гиперплоскости. Одним из перспективных методов решения поставленной является построение обучающейся нейронной сети [13-14].

Сформулированная задача является также частным случаем задачи распознавания образов. Но в отличие от классических задач такого типа здесь в итоге осуществляется не простое отнесение элемента к одному из двух классов, а сравнение элементов по принципу «лучше-хуже». Такое сравнение сводится к распознаванию принадлежности упорядоченных пар элементов «первый, второй» к одному из двух классов: «первый лучше второго» или «первый хуже второго».

Конечно, линейная аппроксимация функции приспособленности не всегда обеспечивает достаточную точность решения задачи. Имеют место случаи, когда множества пар элементов из обучающей выборки нельзя разделить гиперплоскостью. В этом случае нужно применять аппроксимацию функции приспособленности более высокого порядка – второго, третьего и т.п.

В настоящем исследовании строились аппроксимации функции приспособленности первого и второго порядков. При этом использовались как методы линейного программирования, так и методы классификации. Как показывает опыт применения различных методов, наибольший эффект удается получить при использовании нейронных сетей для решения поставленной задачи, которые обеспечивают большую гибкость алгоритма при расширении обучающей выборки, добавлении в нее новых экспериментальных результатов сравнения пар. По сравнению с методом ближайших соседей применение нейронных сетей обеспечивает существенно меньший процент ошибки.

Для построения обучающей выборки использовались эмпирические данные, полученные в результате наблюдения за поведением зоопланктона в северо-восточной части акватории Черного моря [25]. Из результатов многочисленных исследований известно, что основными факторами окружающей среды, влияющим на поведение зоопланктона, относятся: степень насыщения слоя воды (с вертикальной координатой *x*) пищей (фитопланктоном) *E(x),* количество хищ-

ников (рыб) $S_x(x)$ в слое воды x, активность хищника $S_t(t)$ в зависимости от времени суток t, а также наличие в слое воды неблагоприятных факторов $G(x)$ таких, как температура, концентрация сероводорода и т.п [16, 19]. Все эти факторы математически представляют собой функции от вертикальной координаты или времени. Данные о внешних факторах были взяты из [16,19].

Для компьютерного решения с использованием технологий нейронных сетей использовались следующие стандартные программные приложения и ресурсы, имеющиеся в открытом доступе: библиотека машинного обучения Scikit-learn для языка программирования Python, программная библиотека Pandas на языке Python для обработки и анализа данных. Для расчета эволюционно устойчивой стратегии поведения на основе идентифицированной функции приспособленности использовался стандартный пакет Maple 17.

Для аналитической оценки функции приспособленности использовались модели динамики популяций, рассмотренные в [9], в частности, модель, предполагающая наличие в популяции двух возрастных групп, отличающихся друг от друга реализуемым режимом миграций.

3. Результаты

Было рассмотрено сообщество, состоящее из различных видов зоопланктона. Предполагалось, что в сообществе каждый вид зоопланктона имеет две возрастные группы – молодые особи и взрослые, половозрелые особи, отличающихся наследственным режимом миграций, который представляет собой непрерывную периодическую (с периодом одни сутки) функцию вертикального положения зоопланктона в зависимости от времени дня.

На основе эмпирических данных была построена обучающая выборка, содержащая 210 сравнимых пар наследственных стратегий. Был осуществлен расчет ключевых параметров для каждой стратегии. Для упрощения расчета использовались линейные и квадратичные аппроксимации факторов окружающей среды.

Первичный анализ данных позволил выделить восемь ключевых параметров: средние за день энергетические выигрыши в результате поглощения пищи для молодых особей M_1 и взрослых особей M_5, энергетические расходы на осуществление вертикальных перемещений (кинетическая энергия, пропорциональная квадрату скорости движения) для молодых особей M_3 и взрослых особей M_7, потери вследствие хищничества у молодых особей M_2 и взрослых особей M_6, потери вследствие неблагоприятных внешних условий для молодых особей M_4 и взрослых особей M_8. Соответственно, функция фитнеса должна быть функцией восьми ключевых параметров. Фактически необходимо было установить связь между этими параметрами, которая позволяет сравнивать приспособленность разных видов зоопланктона и соответственно эффективность реализуемых стратегий поведения. Дальнейший анализ показал, что использование линейной комбинации этих параметров дает неудовлетворительную оценку функции приспособленности. Для получения относительно приемлемой аппроксимации требуется искать приближение в виде функции второго или даже третьего порядка. При построении аппроксимации второго порядка приходится искать 24 коэффициента, а при построении аппроксимации третьего порядка – 88 коэффициентов. В связи с большой сложностью такой задачи было разработано более эффективное решение.

Было выявлено, что если ключевые параметры взрослых особей M_5-M_8 фиксированы каким угодно образом, и при этом стратегия v лучше w, то это соотношение между стратегиями сохраняется при любом способе фиксации ключевых параметров взрослых особей. Иными словами характер связи между ключевыми параметрами молодых особей M_1-M_4 не зависит от тех значений, которые принимают ключевые параметры взрослых особей M_5-M_8; при любых значениях M_5-M_8 связь между M_1-M_4 устанавливается одинаковым образом.

Замеченная особенность позволила осуществить декомпозицию задачи и решать ее последовательно в два этапа.

Поэтому на первом этапе рассматривались пары стратегий, у которых ключевые параметры взрослых особей M_5-M_8 попарно совпадали. На основе результатов сравнения таких стратегий строилась зависимость между ключевыми параметрами молодых особей M_1-M_4. Для аппроксимации связи использовались приближения первого и второго порядка. При этом для приближения второго порядка необходимо найти всего лишь четыре коэффициента свертки, а для приближения второго порядка – 16, что существенно проще, чем при решении задачи без декомпо-

зиции. Было установлено, что в ряде случаев (если в обучающей выборке не наблюдается большого расхождения в значениях параметров M_1,M_3) приближение первого порядка может дать приемлемый уровень точности. Но в общем случае необходимо использовать приближение второго порядка. При этом задача решается лучше, если использовать не непосредственно параметр M_2, а обратно к нему значение $1/M_2$.

На втором этапе решалась задача установления связи между ключевыми параметрами взрослых особей M_5-M_8 при фиксированных значениях параметров для молодых особей M_1-M_4. Было установлено, что задача легко решается в классе линейных функций. При этом подлежат идентификации только четыре коэффициента линейной свертки параметров. Также было установлено, что значения ключевых параметров M_1-M_4 оказывают существенное влияние только на один коэффициент этой свертки, а именно, коэффициент, относящийся к M_5.

Для проверки работы обучающая выборка была разделена в процентном соотношении 70% для обучения на 30% для тестирования с помощью модуля train_test_split из библиотеки sklearn.model_selection. Качество обучения оценивалось с помощью метрики Logloss. В этой метрике погрешность обучения составляет 9.99e-16. Использовался также второй способ проверки, с помощью функции cross_val_score из библиотеки sklearn.model_selection. При таком способе оценки распознавание производится с точностью 96,3%.

Кроме того, для валидации разработанного метода использовались результаты аналитического исследования. Были осуществлены компьютерные симуляции на основе популяционной модели с известными значениями параметров. Затем на основе проведенных симуляций производилось восстановление функции фитнеса. С другой стороны использовалось аналитическое выражение функции фитнеса для данной модели. Эта аналитическая функция раскладывалась в ряд Тейлора относительно ключевых параметров в окрестности эволюционно устойчивого режима. Затем коэффициенты Тейлора сопоставлялись с коэффициентами, восстановленными нейронной сетью. Такое сопоставление позволяет сделать заключение о высоком качестве сделанных аппроксимаций.

Проведенное исследование дало возможность построить хорошую аппроксимацию функцию фитнеса.

Функция фитнеса позволяет найти эволюционно устойчивую стратегию поведения молодых и взрослых особей зоопланктона методами вариационного исчисления [23]. Эта задача решалась приближенно с использованием пакета Maple 17. Было установлено, что полученное решение с большой степенью точности совпадает с наблюдаемым в действительности эволюционно устойчивым поведением зоопланктона.

Литература

1. Birch J. Natural selection and the maximization of fitness// Biol Rev Camb Philos Soc. 2016. V. 91(3). P. 712–727.
2. Gavrilets S. Fitness landscapes and the origin of species (MPB-41)// Princeton University Press. 2004. V. 41. P. 476.
3. Gabriel W., Thomas B. Vertical migration of zooplankton as an evolutionarily stable strategy. Am. Nat. 1988. V. 132(2). P. 199– 216.
4. Parvinen K., Dieckmann U., Heino M., Function-valued adaptive dynamics and the calculus of variations// J. Math. Biol. 2006. V.52. P.1–26.
5. Gyllenberg, M., Metz, J., Service, R.. When do optimisation arguments make evolutionary sense? In: Chalub F., Rodrigues J. (eds) The Mathematics of Darwin’s Legacy. Mathematics and Biosciences in Interaction. P. 233–268. Basel: Springer, 2011.
6. Gorban. A. N. Selection Theorem for Systems with Inheritance // Math. Model. Nat. Phenom. 2007. V.2(4). P. 1–45.
7. Kuzenkov O.A., Kuzenkova G.V. Optimal control of self-reproduction systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. V. 51. № 4. P. 500–511.
8. Kuzenkov O., Ryabova E. Variational Principle for Self-replicating Systems // Math. Model. Nat. Phenom. 2015. V. 10. N 2. P. 115–128.

9. Kuzenkov O., Morozov A. Towards the construction of a mathematically rigorous framework for the modelling of evolutionary fitness // Bulletin of Mathematical Biology, 2019, doi.org/10.1007/s11538-019-00602-3.
10. Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. Limit possibilities of solution a hereditary control system // Differential Equations. 2015. V. 51. № 4. P. 523–532.
11. Kuzenkov O., Morozov A., Kuzenkova G. Machine learning evaluating evolutionary fitness in complex biological systems: 2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). 2020, P. 1. DOI: 10.1109/IJCNN48605.2020.9206653
12. Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A. Foundations of Machine Learning. The MIT Press, 2012.
13. Tax N., Bockting S., Hiemstra Dj. A cross-benchmark comparison of learning to rank methods// Information Processing & Management. 2015. V. 51 (6). P. 757–772.
14. Liu T.-Y. Learning to Rank for Information Retrieval// Foundations and Trends in Information Retrieval. 2009. V. 3. P. 225–331.
15. Kuzenkov O., Kuzenkova G. Identification of the Fitness Function using Neural Networks// Procedia Computer Science. 2020, Volume 169, Page 692. DOI: 10.1016/j.procs.2020.02.179.
16. Clark C.W., Mangel M. Dynamic State Variable Models in Ecology: Methods and Applications, Oxford Series in Ecology and Evolution. Oxford: Oxford University Press. 2000.
17. Kaiser M.J., et al. Marine Ecology: Processes, Symptoms and Impacts. Oxford: Oxford Univercity Press. 2005. p. 557.
18. Buesseler K., Lamborg C., Boyd P., et al. Revisiting carbon flux through the oceans twilight zone // Science. 2007. V.316. P. 567–570.
19. Fiksen O., Giske J. Vertical distribution and population dynamics of copepods by dynamic optimization // ICES J. Mar. Sci. 1995. V.52. P 483–503.
20. Ringelberg, J. Diel Vertical Migration of Zooplankton in Lakes and Oceans. Netherlands: Springer, 2010. https://doi.org/10.1007/978-90-481-3093-1.
21. Morozov A.Yu., Arashkevich E.G. Towards a correct description of zooplankton feeding in models: Taking into account food-mediated unsynchronized vertical migration // Journal of Theoretical Biology. 2009. V. 262 (2). P. 346.
22. Morozov A., Arashkevich E., Nikishina A., Solovyev K. Nutrient-rich plankton communities stabilized via predator-prey interactions: revisiting the role of vertical heterogeneity // Mathematical medicine and biology: a journal of the IMA. 2011. V. 28. № 2. P. 185–215.
23. Morozov A., Kuzenkov O. Towards developing a general framework for modelling vertical migration in zooplankton// Journal of Theoretical Biology. 2016. V. 405. P. 17–28. DOI: 10.1007/s11538- 019-00602-3.
24. Sandhu S. K., Morozov A., Kuzenkov O. Revealing Evolutionarily Optimal Strategies in Self-Reproducing Systems via a New Computational Approach// Bulletin of Mathematical Biology. 2019. V. 81, issue 11. P. 4701–4725. DOI: 10.1007/s11538-019-00663-4.
25. Morozov A., Kuzenkov O., Arashkevich E. Modelling optimal behavioural strategies in structured populations using a novel theoretical framework// Scientific Reports. 2019. V. 9. N 1. P.15. DOI: 10.1038/s41598-019-51310-w.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ МИГРАЦИЙ ЗООПЛАНКТОНА НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, А. Гарсиа Гарсиа, А.Ю. Дегтярёв

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В статье представлены результаты численного моделирования вертикальных миграций зоопланктона с помощью средств пакета Maple 17. Данное исследование продолжает цикл работ авторов, посвященных определению наличия выраженных колебаний зооплактона по данным об окружающей среде, таким как источники пищи, вязкость и сопротивление воды. Существенной особенностью этой работы является учет потери энергии на поддержание жизнеспособности зоопланктона в зависимости от слоя воды и использование кусочно-линейных функций в качестве энергетического выигрыша от поглощения пищи и потерей в результате хищнического истребления. Для анализа модели используются методы решения задач оптимального управления.

Ключевые слова: ежедневные вертикальные миграции зоопланктона, максимизация энергетического выигрыша, принцип максимума.

1. Введение

Зоопланктон, встречающийся в крупных водоёмах, включая океаны и пресноводные системы, является разновидностью гетеротрофного планктона, который варьируется от микроскопических организмов до крупных видов, таких как медузы. Океанический планктон – важнейшая часть системы поддержания жизни на Земле. Он лежат в основе пищевой цепочки, а кроме того, связывает в процессе фотосинтеза примерно столько же углерода (в виде CO2), сколько вся наземная растительность, тем самым оказывая сильное влияние на климат Земли [1–6]. Это дрейфующие экологически важные организмы, многие из которых обитают глубоко в толще воды в течение дня, поднимаясь в сумерках к поверхности воды и спускаясь на рассвете. Разницу между дневной и ночной глубиной погружения планктона называют амплитудой вертикальных миграций [7].

Явление суточных вертикальных миграций широко изучается как эмпирически, так и теоретически [8-11]. Однако нет единого мнения, как экологические переменные влияют на это движение [12–17]. Например, ключевым фактором могут быть изменения интенсивности света в сумерках и на рассвете [18], ультрафиолетовое излучение [19], размер рачков [20], лунный свет [21], избежание хищников [22], низкая температура, увеличение генетического обмена [12].

2. Исследование суточных вертикальных миграций зоопланктона

Данное исследование продолжает цикл работ [23–26], посвященных определению наличия выраженных колебаний зоопланктона по данным об окружающей среде, таким как наличие пищи, вязкости и сопротивления воды, потери популяции в результате хищнического истребления и метаболических издержек миграции [23]. Существенной особенностью этой работы является учет потери энергии на поддержание жизнеспособности в зависимости от слоя воды и использование кусочно-линейных функций в качестве энергетического выигрыша от поглощения пищи и потерей в результате хищнического истребления. Эти гипотезы, с одной стороны, отражают наблюдаемые явления, с другой, позволяют использовать возможности аналитического решения.

2.1. Постановка задачи

Введем обозначения: x– вертикальная координата положения зоопланктона; t – время суток, изменяющееся от 0 до 1, при этом 0 соответствует полудню, $1/2$ – полночи, 1 – следующему полудню; $x(t)$ – глубина погружения популяции в зависимости от времени суток. Очевидно, что функция $x(t)$ должна быть непрерывной периодически продолжаемой с периодом $T = 1$ (одни сутки). Отсюда вытекает условие $x(0) = x(1)$.

Систему координат введем так, что $x = 0$ совпадает с поверхностью воды; $x = -D$ уровень концентрации сероводорода, смертельной для всего живого; $x = -\mathrm{C}$ уровень, ниже которого нет ни хищников, питающихся зоопланктоном, ни растительности, которой питается зоопланктон (D, C – положительные константы, $C < D$). Учтем, что на достаточно большой глубине нет ни хищников, ни еды.

Будем обозначать $E_0 = \begin{cases} \alpha(x + C), x > -C, \\ 0, x < -C, \end{cases}$ энергетический выигрыш от поглощения пищи; $S = \begin{cases} \gamma(x + C)(cos(2\pi t) + 1), x > -C, \\ 0, x < -C, \end{cases}$ потери в результате хищнического истребления; $G = \delta(x + D/2)^2$ дополнительная смертность, вызванная приближением к границам среды обитания (поверхности воды или уровню со смертельной концентрацией сероводорода); $E_1 = \beta\dot{x}^2$ потери популяции в результате метаболических издержек миграции, пропорциональные квадрату скорости перемещения; $E_2 = \xi(x + D)$ расход энергии для поддержания жизнеспособности, зависящий от слоя воды (координаты x), например, от температуры. Погружение за границу области $x \leftarrow \mathrm{C}$ для данной функции приводит к еще большей экономии энергии, поддерживающей существование. В этом случае среднесуточный коэффициент размножения зоопланктона имеет вид

$$R = \int_0^1 (E_0 - E_1 - S - G - E_2)\, dt. \tag{1}$$

Можно считать, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ весовые коэффициенты, отражающие степень влияния указанных факторов на приспособленность организмов.

Предположим, что популяция зоопланктона состоит из разных видов, отличающихся друг от друга характером перемещения в вертикальных слоях воды. Обозначим $v = x(t)$ наследственную стратегию поведения планктона. Оптимальной стратегией будет та, которая максимизирует временное среднее коэффициента воспроизводства стратегии. В силу периодического характера колебаний зоопланктона оптимальной будет та, на которой достигает максимума функционал (1).

Задача состоит в прогнозировании поведения популяции зоопланктона по истечении длительного времени приспособления по экспериментально регистрируемым входным данным, отражающим состояние среды.

Введенные функции E_0, E_1, E_2, S, G, с одной стороны, представляют некое приближение к реально наблюдаемым данным, с другой -- их относительная простота позволяет решить поставленную задачу аналитически практически до конца.

2.2. Аналитическое решение задачи

Поставленную задачу можно решать как задачу оптимального управления, где управляющая функция вводится с помощью уравнения

$$\dot{x}(t) = u(t). \tag{2}$$

Максимизацию функционала (1) и граничные условия $x(0) = x(1)$ учтем в задаче на минимум функционала

$$J_0 = -R + \lambda\big(x(0) - x(1)\big), \tag{3}$$

где λ – некоторая константа,

$$-R = \begin{cases} \int_0^1 \big((\gamma(cos2\pi t + 1) - \alpha)(x + C) + \delta(x + D/2)^2 + \xi(x + D) + \beta u^2\big)\, dt, x > -C, \\ \int_0^1 (\delta(x + D/2)^2 + \xi(x + D) + \beta u^2)\, dt, x < -C, \end{cases}$$

Запишем сопряженную систему и условия трансверсальности:

$$\dot{\psi} = \begin{cases} \big(\alpha - \gamma(cos2\pi t + 1)\big) - 2\delta(x + D/2) - \xi, x > -C, \\ -2\delta(x + D/2) - \xi, x < -C; \end{cases}$$

$$\psi(0) = -\lambda, \psi(1) = -\lambda.$$

Согласно принципу минимума оптимальным управлением в задаче (1), (2) будет то, на котором функция Гамильтона $H_\tau[u] = \psi u + \beta u^2$достигает своего минимума. Тогда стратегия $x(t)$ поведения зоопланктона на промежутке $0 \le t \le 1$ представляет собой непрерывное соединение решений уравнений

$$\ddot{x} - \frac{\delta}{\beta}x = \frac{1}{2\beta}(\gamma(cos2\pi t + 1) - \alpha + \delta D + \xi), x > -C;$$

$$\ddot{x} - \frac{\delta}{\beta}x = \frac{1}{2\beta}(\delta D + \xi), x < -C.$$

Заметим, что функционал (1) симметричен относительно замены переменной t на $\tau = 1 - t$. Для переменной τ функционал (3) примет вид $J_0 = -R + \lambda\big(x(1) - x(0)\big)$, условия трансверсальности: $\psi(0) = \lambda, \psi(1) = \lambda$,сопряженная система не изменится. Следовательно, решение на промежутке $0 \le t \le 1$ должно быть симметричным относительно $t=1/2$ и удовлетворять условию $\dot{x}(1) = -\dot{x}(0)$. Учитывая периодичность решения, делаем вывод, что $\dot{x}(1) = \dot{x}(0) = 0$.

Тогда решение представляет непрерывное соединение функций

$$x = C_1 cosh\left(\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{\gamma cos2\pi t}{8\pi^2\beta + 2\delta} - \frac{1}{2\delta}(\gamma - \alpha + \delta D + \xi), x > -C;$$

$$x = C_2 cosh\left(\sqrt{\frac{\delta}{\beta}}t\right) - \frac{1}{2\delta}(\delta D + \xi), x < -C.$$

Устанавливаем аналитическую связь между константами C_1, C_2 из условия непрерывности решения, находим допустимый диапазон изменения константы C_2, численно выбираем пару C_1, C_2 на которой функционал (1) достигает максимума.

2.3. Результаты численного эксперимента

На рис. 1-5 представлены графики $E_0(x)$ – энергетического выигрыша от поглощения пищи; $G(x)$ – дополнительная смертность, вызванная приближением к границам среды обитания;$S_x(x), S_t(t)$ – функции, определяющие потери $S = S_x(x) \cdot S_t(t)$ в результате хищнического истребления, а также соответствующий график траектории движения зоопланктона при D=110, C=40, $\alpha = 0.25, \beta = 2.5 \cdot 10^{-5}, \gamma = 1.15, \delta = 0.023, \xi = 2.15$ и постоянные $C_1 = -0.19681, C_2 = 0.0089515$.

На Рис. 5 рассчитанная траектория движения зоопланктона сопоставляется с траекторией выявленного миграционного вертикального движения зоопланктона в заливе Саанич [27].

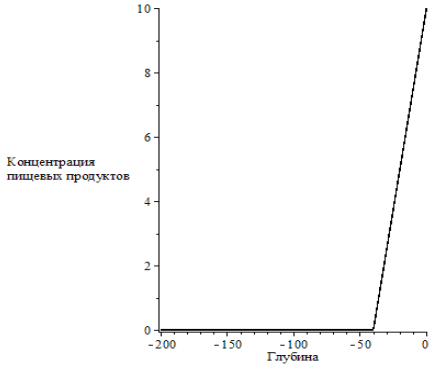


Рис. 1. Энергетический выигрыш от поглощения пищи (E0(x))

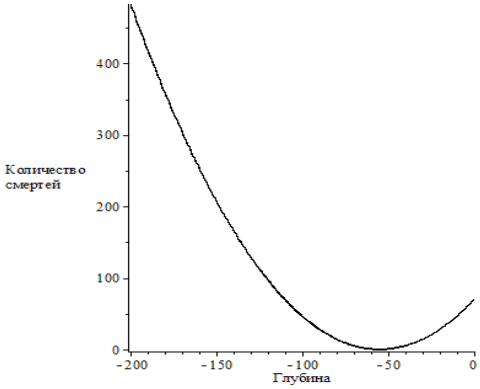


Рис. 2. Дополнительная смертность, вызванная приближением к границам среды обитания (G(x)).

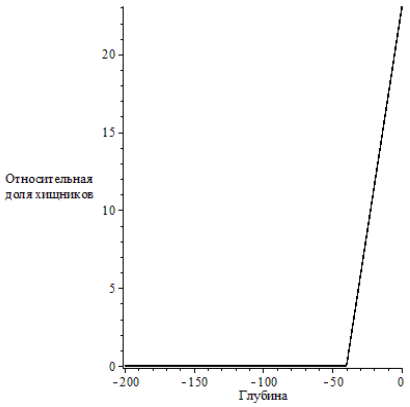


Рис. 3. Смертность от хищничества (Sx(x))

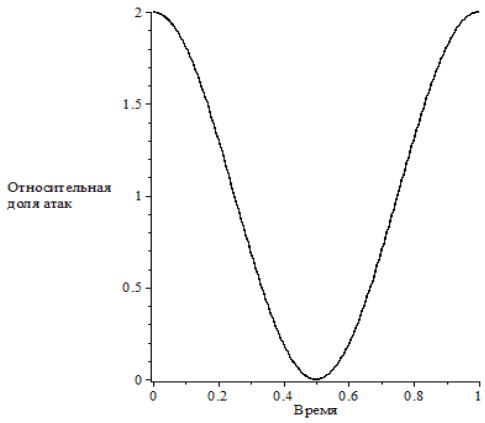


Рис. 4. Количество атак во времени (St(t))

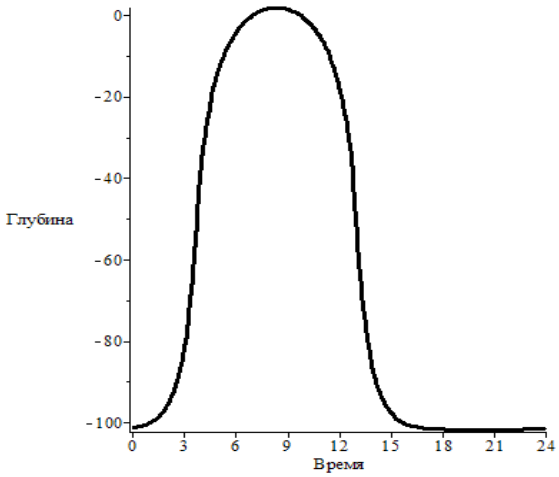


Рис. 5. Сравнение с экспериментальными данными, полученными на 01.04.2010 из Саанича. Пунктирная линия указывает путь, по которому, скорее всего, следует зоопланктон, а непрерывная линия - это линия, полученная нашей моделью при D=110, C=40, $\alpha = 0.25, \beta = 2.5 \cdot 10^{-5}, \gamma = 1.15, \delta = 0.023, \xi = 2.15$ и постоянные $C_1 = -0.19681, C_2 = 0.0089515$

3. Заключение

С помощью средств пакета Maple 17 решается задача определения эволюционно устойчивой стратегии ежедневных вертикальных миграций зоопланктона. Для моделирования поведения зоопланктона используются данные об окружающей среде такие как, наличие пищи, хищников, неблагоприятные условия существования на границах среды обитания, описываемые кусочно линейными и квадратичными функциями. Полученные в результате расчетов траектории сравниваются с траекториями регистрируемого движения зоопланктона.

Данное исследование и его результаты будут использованы для подготовки магистерской диссертации в учебном процессе Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Это соответствует тенденциям модернизации высшего образования в области ИКТ и лучшим образовательным практикам ННГУ [28–31].

Литература

1. Hays G.C., Harris R.P., Head R.N. The vertical nitrogen flux caused by zooplankton diel vertical migration.//Marine Ecology Progress Series. –UK, 1997. V.160. P. 57–62.
2. Ducklow H., Steinberg D., Buesseler K. Upper ocean carbon export and the biological pump.//Oceanography, 2001. V. 14(4). P. 50–58.

3. Schnetzer A., Steinberg D.K. Active transport of particulate organic carbon and nitrogen by vertically migrating zooplankton in the Sargasso Sea.//Marine Ecology Progress Series.--UK, 2002. V. 234. P. 71–84.
4. Buesseler K., Lamborg C., Boyd P., et al. Revisiting carbon flux through the oceans twilight zone.//Science, 2007. V. 316. P. 567–570.
5. Isla A., Scharek R., Latasa M. Zooplankton diel vertical migration and contribution to deep active carbon flux in the NW Mediterranean.//Journal of Marine Systems, 2015. V. 143. P.86–97.
6. Archibald K.M., Siegel D.A., Doney S.C. Modeling the Impact of Zooplankton Diel Vertical Migration on the Carbon Export Flux of the Biological Pum//Global Biogeochemical Cycles, 2019. V. 33. P. 181–199.
7. Hays G.C. A review of the adaptive significance and ecosystem consequences of zooplankton diel vertical migrations.//Hydrobiologia, Migrations and Dispersal of Marine Organisms.– Netherlands, 2003. V. 503. P. 163–170.
8. Pai I.K., Terdalkar S., Pereira M.L. Zooplankton diel vertical migration at Andaman Sea.//Recent Trends in Biodiversity of Andaman and Nicobar Islands, 2010. V. 7. P. 113–129.
9. Arcifa M.S., Perticarrari A., Bunioto T.C., Domingos A.R., Minto W.J. Microcrustaceans and predators: diel migration in a tropical lake and comparison with shallow warm lakes//Limnetica.--Madrid, 2016. V. 35(2). P. 281–296
10. Häfker N.S.,Meyer B., Last K.S., Pond D.W., Hüppe L., Teschke M. Circadian Clock Involvement in Zooplankton Diel Vertical Migration.//Current Biology, 2017. V. 27. P. 2194–2201.
11. Guerra D., Schroeder K., Borghini M., et al. Zooplankton diel vertical migration in the Corsica Channel (north-western Mediterranean Sea) detected by amoored acoustic Doppler current profile.// Ocean Science, 2019. V. 15. P. 631–649.
12. Mangel M., Clark C.W. Dynamic Modeling in Behavioral Ecology.// Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA. 1988.
13. Pearre, Jr S. Eat and run? The hunger satiation hypothesis in vertical migration: history, evidence and consequences.// Biol. Rev. , 2003. V. 78. P. 1–79.
14. Ringelberg J. Diel Vertical Migration of Zooplankton in Lakes and Oceans.//Springer Science, Dordrecht, 2003.
15. Morozov A.Yu., Arashkevich E., Nikishina A., Solovyev K. Nutrient-rich plankton communities stabilized via predator–prey interactions: revisiting the role of vertical heterogeneity.//Math. Med. Biol., 2011, P. 185–215.
16. Berge, J., Cottier F., Varpe O. et al. Arctic complexity: a case study on diel vertical migration of zooplankton.// J. Plankton Res., 2014. V. 36(5). P. 1279–1297.
17. Bandara K., Varpe O., Ji R., Eiane K. A high-resolution modeling study on diel and seasonal vertical migrations of high-latitude copepods//Ecological Modelling, 2018. V. 368. P. 357–376.
18. Ringelberg, J. Changes in light intensity and diel vertical migration: a comparison of marine and freshwater environments.// J. Mar. Biol. Assoc.– UK, 1995. V. 75. P.15–25.
19. Leach T.H., Williamson C.E., Theodore N., Fischer J.M, Olson M.H. The role of ultraviolet radiation in the diel vertical migration of zooplankton: an experimental test of the transparency regulator hypothesis.// J. Plankton Res., 2015. V 37(5). P. 886–896.
20. Ohman M.D., Romagnan J.B. Nonlinear effects of body size and optical attenuation on Diel Vertical Migration by zooplankton.//Limnology and Oceanografic, 2016. V. 61. P. 765–770.
21. Last K.S., Hobbs L., Berge J., Brierley A.S., Cottier F. Moonlight Drives Ocean-Scale Mass Vertical Migration of Zooplankton during the Arctic Winter.// Curr Biol., 2016. V.26(2). P.244–251.
22. Bollens S.M., Frost B.W. Diel vertical migration in zooplankton: rapid individual response to predators.// J. Plankton Res.,1991. V. 13(6). P. 1359–1365.
23. Morozov, A.Yu., Kuzenkov, O.A., Towards developing a general framework for modelling vertical migration in zooplankton.// J. Theor. Biol.,2016. V. 405. P. 17--28.
24. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Соколов М.С. Определение робастно-оптимальных периодических миграций водных организмов на основе вариационного принципа отбора // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) (Москва, 01-03 июня 2016 г.). Материалы XIII международной конференции. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 226–228.

25. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Рябов В.И. Информационно-компьютерная поддержка распознавания эволюционно устойчивых вертикальных миграций планктона// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики (Воронеж, 17-19 декабря 2018 г.). Сборник трудов Международной научной конференции. Научно-исследовательские публикации, 2019. С. 814–817.
26. Кузенков О.А., Рябова Е.А., Гарсиа Гарсиа А. Оптимальное управление с фазовыми ограничениями в задаче поиска режима колебаний зоопланктона // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) (Москва, 03-05 июня 2020 г.). Материалы XVмеждународной конференции. М.: ИПУ РАН, 2020. С. 242–244. URL: https://stab20.ipu.ru/sites/default/files/STAB-20%20Proceedings%20%28rus%29.pdf (дата обращения: 25.10.2020).
27. Ocean Networks Canada (2010), ZAP Data from Saanich Inlet, URL: https://www.oceannetworks.ca/zap-data-saanich-inlet (дата обращения: 25.10.2020).
28. Басалин П.Д., Тимофеев А.Е. Нечеткие модели функционирования гибридной интеллектуальной обучающей среды продукционного типа // International Journal of Open Information Technologies, 2019. Т. 7. № 2. С. 49–55.
29. Басалин П.Д., Кумагина Е.А., Неймарк Е.А., Тимофеев А.Е., Фомина И.А., Чернышова Н.Н. Реализация гибридной интеллектуальной обучающей среды продукционного типа // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2018. Т. 14. № 1. С. 256–267.
30. Грезина А.В., Панасенко А.Г. Электронный образовательный контент, предназначенный для формирования профессиональных компетенций бакалавров направления подготовки "прикладная математика и информатика" // Образовательные технологии и общество, 2019. Т. 22. № 1. С. 198–208.
31. Грезина А.В., Панасенко А.Г. Использование современных технологий в преподавании физики при подготовке бакалавров // Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2018. Т. 14. № 1. С. 293–303.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА КОВАЧИЧА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧИ О КАЧЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ОДНОРОДНОГО ШАРА ПО ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ[1*]

А.С. Кулешов, Д.В. Соломина

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Известно, что задача о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения приводится к интегрированию некоторого линейного уравнения второго порядка. Поэтому можно поставить вопрос, для каких поверхностей вращения соответствующее уравнение допускает общее решение, выраженное с помощью лиувиллевых функций. Ответ на этот вопрос можно получить, применив к уравнению алгоритм Ковачича. В работе дан вывод линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого сводится задача о качении тяжелого шара по поверхности вращения. Для случая качения шара по параболоиду вращения доказано, что общее решение уравнения выражается через лиувиллевы функции.

Ключевые слова: однородный шар, поверхность вращения, лиувиллевы решения, алгоритм Ковачича.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении однородного шара по произвольной абсолютно шероховатой поверхности под действием сил, результирующая которых проходит через центр шара [1]. Пусть G – центр тяжести шара, а подвижными осями GC, GA, GB будут соответственно нормаль к опорной поверхности и две перпендикулярные прямые, лежащие в касательной плоскости, построенной в точке соприкосновения шара с поверхностью. Направления прямых GA и GB определим позднее. Пусть $\mathbf{\Omega} = \theta_1\mathbf{e}_1 + \theta_2\mathbf{e}_2 + \theta_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость выбранной подвижной системы координат; $\mathbf{v}_G = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3$ - вектор скорости точки G (причем очевидно, что $w = 0$, поскольку шар не отрывается от опорной поверхности во все время движения); $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$ – угловая скорость вращения шара в проекции на оси рассматриваемой системы координат. Обозначим через $\mathbf{R} = F\mathbf{e}_1 + F'\mathbf{e}_2 + R\mathbf{e}_3$ силу реакции, действующей на шар со стороны опорной поверхности. Через $\mathbf{P} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + P\mathbf{e}_3$ обозначим результирующую силу, приложенную к центру масс шара. Пусть m - масса шара, a – его радиус, J – момент инерции шара относительно любой оси, проходящей через его центр. Предполагая, что шар катится по выпуклой стороне неподвижной поверхности, и что положительное направление оси GC направлено наружу в сторону выпуклости, запишем уравнения движения шара в векторном виде:

$$m\dot{\mathbf{v}}_G + \left[\mathbf{\Omega} \times m\mathbf{v}_G\right] = \mathbf{P} + \mathbf{R}, \tag{1}$$

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \left[\boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega}\right] = \left[\overrightarrow{GK} \times \mathbf{R}\right]. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) выражают, соответственно, законы изменения импульса и кинетического момента шара относительно выбранной подвижной системы координат. Здесь $\overrightarrow{GK} = -a\mathbf{e}_3$ - радиус-вектор из центра масс шара в точку касания с опорной поверхностью. Поскольку скорость точки шара, находящейся в соприкосновении с опорной поверхностью, в каждый момент времени равна нулю, то имеем:

$$\mathbf{v}_G + \left[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{GK}\right] = 0 \tag{3}$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00140 и грант № 20-01-00637).

В скалярной форме уравнения (1)-(3) записываются следующим образом:

$$m\dot{u} - m\theta_3 v = X + F, \quad m\dot{v} + m\theta_3 u = Y + F', \quad m\theta_1 v - m\theta_2 u = P + R; \tag{4}$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F'a, \quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -Fa, \quad \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \tag{5}$$

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = 0. \tag{6}$$

Исключая $F, F', \omega_1, \omega_2$ из уравнений (4)-(6), получаем:

$$\dot{u} - \theta_3 v = \frac{a^2 X}{J + ma^2} + \frac{Ja\theta_1\omega_3}{J + ma^2}, \quad \dot{v} + \theta_3 u = \frac{a^2 Y}{J + ma^2} + \frac{Ja\theta_2\omega_3}{J + ma^2}. \tag{7}$$

Уравнения (7) можно рассматривать как уравнения такого движения центра масс шара, которое получается в предположении, что центр масс G движется по гладкой поверхности, в точке G приложены дополнительные силы

$$\frac{Ja\theta_1\omega_3}{J + ma^2} \text{ и } \frac{Ja\theta_2\omega_3}{J + ma^2}$$

по осям GA и GB, а ранее приложенные силы уменьшены в отношении

$$\frac{a^2}{J + ma^2}$$

Центр тяжести шара G движется по поверхности, полученной из данной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу шара. Пусть оси GA и GB направлены по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Найдем выражение для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ выбранной подвижной системы координат в зависимости от компонент u и v скорости центра масс шара. Будем считать, что поверхность, по которой движется центр шара, задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2) \tag{8}$$

где q_1 и q_2 - гауссовы координаты на поверхности. Предположим, что координатная сеть на поверхности (8) составлена из линий кривизны. Направления этих линий в каждой точке указываются ортогональными единичными векторами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \tag{9}$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены параметры Ламе

$$h_i(q_1, q_2) = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right|, \quad i = 1, 2$$

Вектор $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]$ является вектором нормали к поверхности (8) в точке (q_1, q_2). С другой стороны, скорость центра масс G шара может быть определена по формуле

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следует, что u и v связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами:

$$u = h_1\dot{q}_1, \quad v = h_2\dot{q}_2. \tag{10}$$

Обозначая через $k_i(q_1, q_2)$, $i = 1, 2$ главные кривизны поверхности (8), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathbf{e}_2. \tag{11}$$

Формулы (11) являются следствием известной в дифференциальной геометрии теоремы (формулы) Родрига [2], в которой дополнительно нужно учесть, что выбранная нами координатная сеть на поверхности (8) является ортогональной и составленной из линий кривизны. С помощью формул (9) и (11) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + h_1 k_1 \mathbf{e}_3, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_2} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + h_2 k_2 \mathbf{e}_3. \tag{12}$$

Угловая скорость системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ находится по стандартной формуле

$$\mathbf{\Omega} = \left(\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1\right)\mathbf{e}_2 + \left(\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2\right)\mathbf{e}_2,$$

где

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2, \ \ i = 1,2,3.$$

Принимая во внимание формулы (11)-(12), для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ получим следующее выражение

$$\mathbf{\Omega} = h_2 k_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_1 - h_1 k_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\right)\mathbf{e}_3$$

Учитывая формулы (10), перепишем выражение для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ в виде:

$$\mathbf{\Omega} = k_2 v \mathbf{e}_1 - k_1 u \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u\right)\mathbf{e}_3.$$

Таким образом, для компонент угловой скорости подвижной системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеем следующие выражения

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u\right). \tag{13}$$

Теперь предположим, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho(q_1)\cos q_2 \\ \rho(q_1)\sin q_2 \\ \zeta(q_1) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этом случае коэффициенты Ламе h_1 и h_2 имеют вид:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \tag{15}$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности вычисляются по формулам:

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}, \tag{16}$$

Линиями кривизны на поверхности вращения являются ее меридианы и параллели. Пусть вертикальная ось Z является осью симметрии рассматриваемой поверхности вращения. Кроме координат q_1, q_2 введем углы Эйлера θ, ψ и φ, где угол, который ось GC составляет с осью Z равен $\pi/2 - \theta$, а ψ - угол, который плоскость, содержащая оси Z и GC, составляет с некоторой фиксированной вертикальной плоскостью. Будем считать, что компоненты угловой скорости системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяются при помощи стандартных кинематических формул Эйлера

$$\theta_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \ \ \theta_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \ \ \theta_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

в которых значение угла φ положено равным $-\pi/2$. Поэтому получаем:

$$\theta_1 = -\dot{\psi}\sin\theta, \ \ \theta_2 = \dot{\theta}, \ \ \theta_3 = \dot{\psi}\cos\theta, \tag{17}$$

С другой стороны, сравнивая полученные формулы с формулами (13), находим

$$-\dot{\psi}\sin\theta = k_2 h_2 \dot{q}_2, \ \ \dot{\theta} = -k_1 h_1 \dot{q}_1, \ \ \dot{\psi}\cos\theta = \frac{1}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}\dot{q}_2. \tag{18}$$

Из второго уравнения системы (18) определяется связь между переменными θ и q_1. Поэтому можно считать, что поверхность (14) задана в зависимости от θ и q_2, то есть

$$\rho\big|_{q_1=q_1(\theta)}=\sigma(\theta),\quad \zeta\big|_{q_1=q_1(\theta)}=\tau(\theta). \tag{19}$$

Коэффициенты Ламе, вычисляемые по формулам (15), определяются формулами:

$$h_1=h_1(\theta)=\sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2},\quad h_2=h_2(\theta)=\sigma(\theta), \tag{20}$$

а главные кривизны $k_1=k_1(\theta)$ и $k_2=k_2(\theta)$ равны

$$k_1=k_1(\theta)=\frac{\dfrac{d^2\tau}{d\theta^2}\dfrac{d\sigma}{d\theta}-\dfrac{d^2\sigma}{d\theta^2}\dfrac{d\tau}{d\theta}}{\left(\left(\dfrac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{d\tau}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad k_2=k_2(\theta)=\frac{\dfrac{d\tau}{d\theta}}{\sigma\sqrt{\left(\dfrac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{d\tau}{d\theta}\right)^2}}, \tag{21}$$

Теперь учтем вторую из формул (18), которую представим в виде $\dot\theta=-k_1u$, и найдем из нее, что

$$u=-\frac{\dot\theta}{k_1}. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим третью из формул (5) и формулы (6). Из формул (6) следует, что

$$\omega_2=\frac{u}{a}=-\frac{\dot\theta}{ak_1},\ \omega_1=-\frac{v}{a}.$$

Поэтому

$$\dot\omega_3=\theta_2\omega_1-\theta_1\omega_2=\frac{v\dot\theta}{ak_1}(k_2-k_1). \tag{23}$$

Окончательно, из формулы (23) получаем уравнение

$$\frac{d\omega_3}{d\theta}=\frac{v}{ak_1}(k_2-k_1). \tag{24}$$

Теперь предположим, что качение шара происходит под действием силы тяжести. Тогда имеем:

$$Y=0,\quad \theta_3=\frac{1}{h_1h_2}\frac{dh_2}{d\theta}v$$

и второе из уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{v}{k_1}\frac{dh_2}{d\theta}=\frac{Ja}{J+ma^2}\omega_3. \tag{25}$$

Дифференцируя повторно формулу (25) и принимая во внимание уравнение (24), найдем:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{v}{k_1}\frac{dh_2}{d\theta}\right)=\frac{Ja}{J+ma^2}\frac{v}{k_1}(k_2-k_1). \tag{26}$$

Таким образом, задача о качении шара по поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр тяжести G шара движется по поверхности вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) относительно компоненты скорости v шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (26) интегрируется в лиувиллевых функциях. Лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [3]. Для ответа на вопрос о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка обычно используется алгоритм Ковачича [4]. Ниже доказано, что задача о качении тяжелого шара по параболоиду вращения интегрируется в лиувиллевых функциях.

2. Качение по параболоиду вращения

Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара есть параболоид вращения с вертикальной осью, расположенный вершиной вверх. Уравнение параболоида запишем в виде (14):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Rq_1 \cos q_2 \\ Rq_1 \sin q_2 \\ -\dfrac{Rq_1^2}{2} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае

$$\rho(q_1) = Rq_1,\ \zeta(q_1) = -\frac{Rq_1^2}{2}.$$

Здесь R – некоторый параметр, имеющий размерность длины. Коэффициенты Ламе h_1 и h_2, вычисляемые по формуле (15), имеют вид

$$h_1 = R\sqrt{1+q_1^2}\ ,\ \ h_2 = Rq_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2, вычисляемые по формулам (16), равны

$$k_1 = -\frac{1}{R\left(1+q_1^2\right)^{3/2}},\quad k_2 = -\frac{1}{R\sqrt{1+q_1^2}}$$

Второе из уравнений (18) определяет связь между переменными q_1 и θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{q}_1}{1+q_1^2},$$

откуда следует, что

$$q_1 = \operatorname{tg}\theta. \tag{27}$$

Учитывая формулу (27), мы можем считать теперь, что выражения для $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$ переписываются в виде:

$$\sigma(\theta) = \rho(q_1)\big|_{q_1=\operatorname{tg}\theta} = R\operatorname{tg}\theta,\quad \tau(\theta) = \zeta(q_1)\big|_{q_1=\operatorname{tg}\theta} = -\frac{R}{2}\operatorname{tg}^2\theta.$$

В результате получим следующие выражения для коэффициентов Ламе h_1 и h_2 и главных кривизн k_1 и k_2:

$$h_1 = \frac{R}{\cos^3\theta},\ h_2 = R\operatorname{tg}\theta,\ k_1 = -\frac{\cos^3\theta}{R},\ k_2 = -\frac{\cos\theta}{R}.$$

Уравнение второго порядка (26) может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{\sin\theta\cos\theta}\right) = \frac{J}{J+ma^2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}v. \tag{28}$$

Таким образом, задача о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности такой, что геометрическое место центров шара является параболоидом вращения, сводится к интегрированию дифференциального уравнения (28). Сделаем в уравнении (28) замену независимой переменной $x = \cos^2\theta$ и введем обозначение

$$\frac{J}{J+ma^2} = n^2 < 1.$$

Тогда уравнение (28) приводится к уравнению с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x-1}\frac{dv}{dx} - \frac{\left(n^2x^2 + 2\left(1-n^2\right)x - \left(1-n^2\right)\right)}{4x^2\left(x-1\right)^2}v = 0. \tag{29}$$

Применение к уравнению (29) алгоритма Ковачича [4] показывает, что общее решение данного уравнения может быть представлено в виде:

$$v(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}\left(C_1x^{\frac{n}{2}}+C_2x^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (29) выражается через лиувиллевы функции.

Литература

1. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
3. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. 85 с.
4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2, Issue 1. P. 3–43. DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ

Т.В. Куприянова, Д.И. Кислицын

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

В данной статье описывается процесс использования методов машинного обучения для автоматического ранжирования и назначения ответственных лиц за решение возникших инцидентов. Также предлагается разработка автоматизированного модуля для строительного процесса с использованием в ней алгоритмов машинного обучения, что потенциально повысит эффективность работы и снизит затраты.

Ключевые слова: алгоритмы машинного обучения, интеллектуальный анализ данных, ранжирование инцидентов.

Строительство – одна из крупнейших отраслей экономики, которая обеспечивает потребности всех быстроразвивающихся стран. Однако эта отрасль является самой травмоопасной. На протяжении всего строительного процесса на строительных площадках каждый день происходят инциденты разной степени тяжести. По данным Роструда, 21% работников от общего числа занятых на стройке стали участниками тяжелых несчастных случаев, большая часть которых закончилась летальным исходом [1]. Инцидент представляет собой совокупность ситуаций, которые обнаруживаются либо рабочими на стройке, либо регистрируемыми датчиками и приборами и несущими признаки предотказного состояния и требующими техническое обслуживание и ремонт.

Ежегодно в строительной сфере увеличивается спрос на инновационные проекты. Поэтому возник вопрос о применении методов машинного обучения в строительных процессах. Ведь именно благодаря искусственному интеллекту (ИИ) и машинному обучению (МО) можно минимизировать проектные риски, обезопасить и оптимизировать строительные процессы.

Научной проблемой, на решение которой направлено исследование, является недостаточная автоматизация технологических процессов для предотвращения и устранения инцидентов на строительных объектах.

Целью проводимой научно-исследовательской работы является предложение варианта разработки автоматизированного модуля для строительного процесса с использованием методов машинного обучения. Для достижения поставленной цели планируется решение следующих задач:

1) ознакомление с существующими способами решения проблемы,
2) выявление возможных вариантов сбора информации о ситуации на строительном объекте,
3) проведение анализа имеющихся данных для распределения инцидентов по их признакам на соответствующие категории,
4) исследование предсказательных алгоритмов машинного обучения и их готовых реализаций,
5) представление автоматизированного модуля на начальном этапе разработки и оценка его эффективности.

В настоящее время машинное обучение широко применяется во многих сферах [2], [3] для решения задач предсказательного обслуживания промышленного сегмента. Однако использование методов машинного обучения в строительной отрасли происходит на менее продвинутом уровне. Это в большей степени технологии для определения и анализа угроз, например, для безопасности на стройке. Примером такой разработки является стартап Smartvid.io, разработавший технологию применения искусственного интеллекта и машинного обучения, которая анализирует фото и видео информации на стройплощадке [4]. Эта технология дает пользователям возможность получить данные и изображения с площадок для обеспечения безопасности на объекте.

Использование машинного обучения в качестве решения задачи предсказательного обслуживания произошло после доработки проекта Smartvid.io, где в результате сотрудничества с компанией Suffolk Construction была разработана возможность предсказывания инцидентов на конкретных строительных площадках. Для этого использовались сохраненные за десять лет данные о строительных процессах от Suffolk. Они были представлены в движке на базе искусственного интеллекта – Vinnie. Во время процесса работы происходило сравнение ситуаций в настоящее время с моментами из информационной базы [4]. На основе исторических данных могли предсказываться возможные инциденты и выдавались предупреждения.

Данные проекты действительно эффективные, однако они неполные, поскольку вся информация, которая обрабатывается, не структурирована, выводится сплошным потоком и не имеет рекомендаций ни по предотвращению или устранению инцидента, ни по ответственным лицам, которые должны решить появившуюся проблему. Именно поэтому необходимо создать автоматизированный модуль на основе машинного обучения, который, помимо ведения непрерывного мониторинга инцидентов, определения и анализа угроз, будет составлять приоритетный список проблем, на которые нужно обратить внимание в первую очередь, а также классифицировать, маркировать их на основе визуальных данных и данных с датчиков и определять ответственного за устранение возможной или существующей проблемы.

Для сбора информации о ситуации на строительном объекте необходимо использовать все известные на текущий момент параметры инцидента (фото и/или видео материалы, признаки места, времени, этап стройки, показания датчиков и приборов и т.п.), а также его контекст (погода, прошлые инциденты и др.). Помимо этого, существуют функции системы мониторинга: контроль за техническим состоянием объектов в реальном масштабе времени; диагностика и прогнозирование состояния объектов; определение предотказных состояний объектов.

Нередко во время строительных работ возникает множество различных проблем разной степени сложности. Случаи автоматически объединяются в инциденты в информационной системе, а затем текущие инциденты обрабатываются людьми, которые отвечают за мониторинг инцидентов. Эти работники выявляют причины возникновения неполадок, классифицируют как относящиеся к одному из нескольких типов (предотказному состоянию, техническому обслуживанию и ремонту, недостатку диагностики или технологической ситуации), и принимают необходимые меры. Обработка всех этих операций зачастую может быть крайне интенсивной и трудоемкой: новые инциденты могут появляться с промежутком в несколько секунд; в то время как машинное обучение может справиться с этой задачей гораздо быстрее и эффективнее. Именно поэтому крайне актуально использовать автоматическое ранжирование инцидентов по уровню их важности.

Важность инцидента можно определить двумя факторами: риском реального предотказного состояния инцидента, и последствиями (в частности, экономическим эффектом) отказа устройства, использующегося на строительном объекте. Однако алгоритмы машинного обучения следует использовать только для предсказания риска предотказного состояния на основе автоматически сформированных данных, полученных от приборов и датчиков, об инциденте, поскольку эти факторы разные по характеру, и оценка последствий отказа предполагает дополнительные стоимостные модели отказов [5]. В зависимости от важности инцидента машинным обучением будут указаны баллы от 1 до 5 между ситуациями: 1 – наиболее важно, 5 – низкая степень приоритета.

Каждый инцидент заносится в базу данных, которая отображает набор единичных событий, несущих определенные атрибуты. Все эти ситуации автоматически объединяются в инциденты на этапе предварительной обработки сигналов датчиков. После анализа массива исторических данных, машинное обучение создает алгоритм ранжирования инцидентов. Описание инцидента характеризуется своим типом, временем и местом проявления, прибором, на котором всё наблюдалось, и некоторыми другими сведениями. Все свойства, за исключением времени, распределяются на категории. В соответствии с определенным набором характеристик конкретного инцидента следует присвоить ему одну из пяти категорий с цветовой маркировкой для облегчения распознавания: первый уровень (серый) – несрочная и незначительная проблема; второй уровень (желтый) – небольшой сбой, не приводящий к возможным жертвам; третий уровень (оранжевый) – ситуация, требующая внимание, и которая может привести к возможным

жертвам; четвертый уровень (красный) – ситуация, требующая срочного устранения проблемы и несущая за собой жертвы; пятый уровень (зеленый) – проблема решена.

При появлении нового инцидента и его автоматическом ранжировании, следующим шагом является назначение ответственного за решение проблемы. Для этого необходим анализ статистики по всем работникам на стройке, когда-либо участвовавшим в исправлении неполадок во время строительного процесса, среди которых выбираются те, кто работает в текущее время и не является ответственным за неисправность третьего или четвертого уровня приоритета. Практика машинного обучения производит построение модели: сначала отделяются атрибуты и создается обучающая матрица, а затем применяется некоторый общий алгоритм машинного обучения к полученной обучающей матрице. Важным шагом для подготовки данных является способ их преобразования в числовые вектора определенной размерности, атрибуты которого отражают существенные характеристики работника. Вся выборка передается некоторому классификатору, основанному на стандартном алгоритме машинного обучения – ансамбль решающих деревьев. И в результате применения методов машинного обучения будет установлен ответственный за решение инцидента, которому передаются все атрибуты, полученные из систем мониторинга.

В конечном итоге, после решения и закрытия проблемы, данные становятся историческими, и в дальнейшем могут быть использованы машинным обучением при появлении подобной ситуации для руководства по её решению.

На основе всех вышеописанных технологий можно разработать автоматизированный модуль для обработки инцидентов в строительном процессе с использованием методов машинного обучения. Вид предлагаемой программы представлен на рисунке 1.

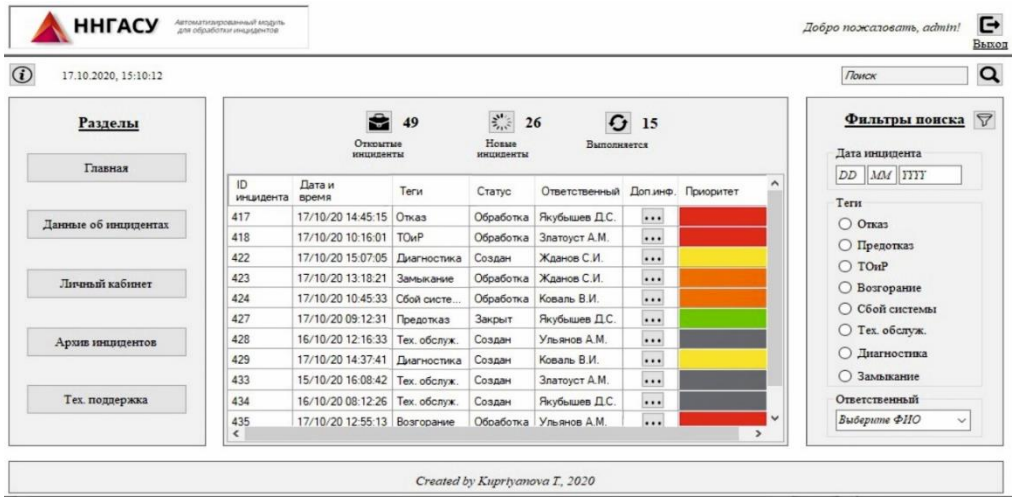


Рис. 1. Предлагаемый вид автоматизированного модуля для обработки инцидентов.

Предлагаемая разработка автоматизированного модуля для обработки инцидентов представляет из себя программу, которая связана с базой данных, в которой будет храниться вся информация об инцидентах, а также которая принимает показания с устройств системы мониторинга. На главной странице показываются возможные объявления, автоматически загруженные с сайта строительного проекта, а также рабочий график всех ответственных лиц, которые могут заниматься устранением инцидентов. Раздел «Данные об инцидентах» является ключевым и содержит краткие сведения о возникших инцидентах. Все данные в таблице заполняются автоматически машинным обучением на основе показаний с датчиков, приборов и других устройств мониторинга: ID инцидента; дата и время его возникновения; теги, которые выводятся в ходе анализа имеющихся данных о ситуации; статус инцидента; ответственный за ликвидацию инцидента; дополнительная информация; приоритет, маркированный цветовой гаммой для облегчения восприятия информации. При нажатии на кнопку с многоточием в столбце «Дополнительная информация» открывается новое окно с развернутыми характеристиками, помимо уже показанных кратких сведений, где указываются источники информации (код устройства мониторинга, с которого пришел сигнал), местоположение возникшего инцидента,

содержание инцидента, которое автоматически генерируется машинным обучением в зависимости от показателей, возможные медиа файлы, которые были получены от устройств мониторинга в виде фото и/или видео, а также место для комментария ответственного за инцидент, который после устранения инцидента производит изменение статуса на «Закрыт» и в то же время может сделать пометки в отведенном для этого textBox. Помимо этого, раздел с данными об инцидентах имеет функцию поиска информации по ключевым словам и фильтрации открытых инцидентов по трем критериям: дате возникновения, тегам и ответственному. Для входа в программу ответственное лицо авторизуется в личном кабинете. Раздел «Личный кабинет» содержит информацию об одном конкретном работнике, его контактные данные, график работы, а также всю историю текущих инцидентов и тех, которые он когда-либо устранял. Здесь же ответственный добавляет комментарии к инциденту и закрывает его после устранения проблемы. В архиве инцидентов содержится вся краткая и дополнительная историческая информация об инцидентах с аналогичными возможностями поиска по ключевым словам и фильтрации инцидентов на основе тех же параметров, как в разделе текущих инцидентов. Раздел технической поддержки необходим для поддержания работоспособности программы и при необходимости её доработки или устранения возможных ошибок.

Таким образом, подобная разработка автоматизированного модуля для обработки инцидентов с использованием алгоритмов машинного обучения будет эффективной, поскольку позволяет сократить количество пропущенных инцидентов, уменьшить расходы и время реакции на возникшую проблемную ситуацию, что положительно отразится на всех процессах строительного объекта.

В данной работе был предложен вариант разработки автоматизированного модуля для строительного процесса, основанного на методах машинного обучения, в ходе которых были рассмотрены задачи автоматического ранжирования инцидентов и назначения ответственных за их ликвидацию. При реализации этого автоматизированного модуля можно ожидать положительные практические результаты.

Литература

1. Рейтинг несчастных случаев на стройке / aleksandr – Текст: электронный // Прорабофф.РФ: сайт. – URL: https://xn--80ac1bcbgb9aa.xn--p1ai/rejting_neschastnyh_sluchaev_na_strojke/ . – Дата обращения 26.09.2020.
2. Hebert, Jeff. 2016. Predicting rare failure events using classification trees on large scale manufacturing data with complex interactions. Pages 2024–2028 of: 2016 IEEE International Conference on Big Data, BigData 2016, Washington DC, USA, December 5-8, 2016.
3. Hastie, Trevor, Tibshirani, Robert, & Friedman, Jerome. 2001. The Elements of Statistical Learning. Springer Series in Statistics. New York, NY, USA: Springer New York Inc.
4. Технология умного строительства: как машинное обучение предсказывает и предотвращает несчастные случаи на стройке / Дж. Каннер. – Текст: электронный // isicad. Ваше окно в мир САПР: сайт. – URL: http://isicad.ru/ru/articles.php?article_num=20712 . – Дата обращения 27.09.2020.
5. Применение машинного обучения к ранжированию инцидентов на Московской железной дороге / П. Ю. Бойко, Е. М. Быков, Е. И. Соколов, Д. А. Яроцкий. – Текст: непосредственный // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2017. – № 2. – С. 43-53.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

С.Р. Лаврова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В статье анализируются проблема моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере Земли в квазистационарном электрическом приближении. Доказывается существование и единственность решения поставленной задачи.

Ключевые слова: глобальная электрическая цепь, квазистационарное электрическое приближение, система уравнений Максвелла.

1. Введение

В работе рассматривается моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли в квазистационарном электрическом приближении с учетом периодичности объемной плотности сторонних токов. При описании квазистационарных электрических полей используются особые функциональные пространства с соответствующими нормами. Разобран вопрос о существовании единственного периодического по времени решения задачи.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается моделирование глобальной электрической цепи в атмосфере Земли в квазистационарном электрическом приближении следующего вида [1-3]:

$$i\omega\Phi(x) + 4\pi div\big(\sigma(x) grad\Phi(x)\big) = 4\pi div\big(J^{ex}(x)\big), x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

где Ω - открытое гомеоморфное шаровому слою множество с границей $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, объемная плотность тока $J^{ex}(x)$, удельная проводимость среды $\sigma(x)$.

С граничными условиями

$$\Phi|_{\Gamma_1} = 0, \Phi|_{\Gamma_2} = V_I,$$

$$i\omega \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial\Phi(x)}{\partial n} d\Gamma + 4\pi \int\limits_{\Gamma_2} \sigma(x) \frac{\partial\Phi(x)}{\partial n} d\Gamma = 4\pi \int\limits_{\Gamma_2} (J^{ex}(x) \cdot n)\, d\Gamma$$

Для строгой формулировки задачи, вводятся следующие функциональные пространства:

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega): u(x) = 0, x \in \Gamma_1, u(x) = c, x \in \Gamma_2\}$$

$$\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega) = \{u \in L_2^3(\Omega): div\big(u(x)\big) \in L_2(\Omega)\}$$

где $H^1(\Omega)$ - комплексное пространство Соболева, $L_2(\Omega)$- комплексное пространство Лебега с нормой

$$\|u\|_{\mathrm{X}} = \|u\|_{H^1} = \sqrt{\int\limits_{\Omega} u^2\, dx + \int\limits_{\Omega} \big(grad(u)\big)^2\, dx}$$

Пусть также Γ_1, Γ_2 удовлетворяют условию Липшица, $J^{ex}(x) \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$, $\Phi(x) \in \mathrm{X}(\Omega)$, $\sigma(x)$ – измеримая функция в области Ω, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных σ_1, σ_2 условию

$$\sigma_1 \le \sigma(x) \le \sigma_2$$

Основным результатом работы является доказательство теоремы существования единственного периодического по времени решения $\Phi(x) \in \mathrm{X}(\Omega)$ описанной выше задачи с соответствующими граничными условиями. Доказательство опирается на теорему Лакса-Мильграма в поле комплексных чисел с учетом свойств векторного анализа [4].

Литература

1. Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физических наук – 2010. – Т. 180 – № 5. – С. 527–534.
2. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды. – М.: МГУ, 1988. – 232 с.
3. Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А. Стационарные и неста-ционарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Физика атмосферы и океана. –2014. – Т. 50. – № 3. – С. 314–322.
4. Жидков А.А., Калинин А.В., Тюхтина А.А. Пространства вектор-функций в математической физике. Учебно-методическое пособие – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Лобачевского, 2012. – 70 с.

ДИНАМИКА ОБРАТИМОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ СИММЕТРИЧНОГО ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКОГО КОНТУРА[1*]

Л.М. Лерман[1], К.Н. Трифонов[1,2]

[1]Научно-образовательный математический центр «Математика для технологий будущего»
[2]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе изучается динамика обратимой гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, имеющей гетероклинический контур, состоящий из седло-центра, седловой периодической траектории и двух гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией. Рассматриваемая ситуация имеет коразмерность 1 в классе обратимых гамильтоновых систем. Тем самым, такая структура может встречаться неустранимо в общих однопараметрических семействах таких систем. Существует два различных типа контуров, в зависимости от того, как инволюция действует вблизи седло-центра. Доказан ряд теорем, которые показывают хаотическое поведение системы.

Ключевые слова: гамильтонова система, гетероклинический контур, эллиптические периодические траектории.

Изучение динамики гамильтоновых систем является интересной и трудной задачей, привлекающей исследователей из многих разделов науки, поскольку гамильтоновы системы появляются в качестве математических моделей в различных задачах физики, химии, техники. Такие системы, в основном, весьма сложно устроены, поэтому одним из плодотворных подходов при исследовании их динамики является изучение поведения гамильтоновой системы в окрестностях некоторых их инвариантных множеств, которые могут быть выделены некими простыми условиями. Изучение систем в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров является одной из таких задач.

В настоящей работе изучается динамика обратимой аналитической гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, имеющей симметричный гетероклинический контур, состоящий из симметричного седло-центра, симметричной седловой периодической траектории в том же уровне гамильтониана H=0 и двух несимметричных гетероклинических траекторий, переставляемых инволюцией, которые идут от седло-центра к периодической траектории, одна при возрастании времени и, другая, соответственно, при убывании времени.

В силу обратимости системы и симметричности контура рассматриваемая ситуация имеет коразмерность 1 в классе обратимых гамильтоновых систем. Тем самым, такая структура может встречаться неустранимо в общих однопараметрических семействах таких систем.

Отметим, что во всем четырехмерном фазовом пространстве седловая периодическая траектория γ принадлежит однопараметрическому семейству седловых периодических траекторий γ_c, образующих аналитический двумерный симплектический цилиндр, параметром семейства является значение гамильтониана c. Контуры, указанные выше, могут быть двух различных типов в зависимости от того, как инволюция действует вблизи седло-центра.

Наши результаты доказывают существование в такой системе:

– счетного множества однообходных трансверсальных гомоклинических траекторий к седловой периодической траектории;

– гиперболических множеств, построенных на конечном множестве трансверсальных гомоклинических траекторий к седловой периодической траектории γ_c при c<0, а также счетного множества интервалов значений c, накапливающихся к нулю, при которых на соответствующем уровне гамильтониана существуют однообходные эллиптические периодические траектории, сопровождаемые семействами КАМ торов;

[1*] Данная работа выполнена в рамках научного и образовательного математического центра «Математика для технологий будущего» и поддержана грантом РНФ 19-11-00280 (К.Н. Трифонов) и Министерством образования и науки РФ по проекту 0729-2020-0036 (Л.М. Лерман).

– гиперболических множеств на каждом уровне c>0, построенных на основе симметричного гетероклинического контура, состоящего из двух симметричных гиперболических периодических траекторий и 4 несимметричных гетероклинических траекторий к ним, а также счетного множества интервалов значений, накапливающихся к нулю, для значений c из которых на соответствующем уровне гамильтониана существует однообходная эллиптическая периодическая траектория;

– для однопараметрического семейства, зависящего от параметра μ обратимых гамильтоновыых систем, содержащего систему с указанным контуром при μ=0, существование счетного множества значений параметра μ накапливающихся к нулю, при которых соответствующая система имеет гомоклиническую траекторию к седло-центру.

Указанные результаты позволяют утверждать, что динамика обратимой гамильтоновой системы, имеющей указанный выше контур, является хаотической, в частности, ее топологическая энтропия положительна. Доказательства в работе основаны на следующих ингредиентах:

1. Геометрии обратимых гамильтоновых систем, ее симметрийных свойствах;

2. Ранее полученных результатах первого автора [1], а также Кольцовой-Лермана [2], Гротта Рагаццо [3], и др. о структуре гамильтоновой системы в окрестности гомоклинической траектории седло-центра;

3. Результатах Ньюхауса [4], Гаврилова-Шильникова [5], С. Гонченко [6], Дуарте [7], Тураева [8] и др. о бифуркациях в симплектических отображениях с гомоклиническими касаниями.

Литература

1. Л.М. Лерман, О гамильтоновых системах с петлей сепаратрисы седло-центра. Методы качеств. теории диффер. уравн. Межвуз. сб. науч. трудов (ред. Е.А. Леонтович-Андронова). Горьковский ун-т. Горький: 1987. С 89-103.
2. O.Yu. Koltsova, L.M. Lerman, Periodic and homoclinic orbits in a two-parameter unfolding of a Hamiltonian system with a homoclinic orbit to a saddle-center, Int. J. Bifurcation к Chaos, V.5 (1995),No.2, 397-408.
3. C. Grotta Ragazzo, Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle-centers. Commun. Pure Appl. Math., v.50 (1997), No.2, 105-147.
4. S. Newhouse, Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. Am. J. Math. v.99 (1977), 1061-1087.
5. N.K. Gavrilov, L.P. Shilnikov, On the three dimensional dynamical systems close to a system with a structurally unstable homoclinic curve. I. Math. USSR Sbornik 17, 467-485 (1972); Math. USSR Sbornik 19, 139-156 (1973).
6. S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, On two-dimensional analytic area-preserving diffeomorphisms with inflitelv many stable elliptic periodic points, Regular Chaotic Dvn. v.2 (1997), 106-123.
7. P. Duarte, Abundance of elliptic isles at conservative bifurcations, Dvnam. & Stab. Svst., v.14 (1999), No.4, 339-356.
8. W. Giles, J.S.W. Lamb, D. Turaev, On homoclinic orbits to center manifolds of elliptic – hyperbolic equilibria in Hamiltonian systems, Nonlinearity, v.29 (2016), 3148–3173.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СФОКУСИРОВАННЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В МЯГКИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЯХ С ПОСЛЕДУЮЩЕЙ ГЕНЕРАЦИЕЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ[1*]

А.А. Лисин, И.Ю. Демин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Проведено численное моделирование распространения ультразвуковых волн на основе численного решения уравнения Вестервельта псевдоспектральным методом с визуализацией. Условия моделирования подобраны в соответствии с физической моделью мягкой биологической среды. Проведено сравнение физического и численного моделирования эволюции сдвиговых волн и определены упругие характеристики полимерных фантомов.

Ключевые слова: моделирование, ультразвук, сдвиговые волны, мягкие биологические ткани, MATLAB, k-wave

1. Введение

Численное моделирование физического эксперимента позволяет предсказать результат измерения, поэтому для решения задачи компьютерной симуляции сред с заданными параметрами разработано большое количество алгоритмов, программных модулей и самостоятельных пакетов. Современные средства вычислительной техники позволяют производить расчет с высокой точностью, но предъявляют высокие требования к аппаратной части машины, поэтому важным становится выбор алгоритма, эффективно использующего мощность вычислительных модулей с минимально возможной нагрузкой, при этом обеспечивающего достаточную точность.

2. Численное моделирование

2.1. Эволюционное уравнение Вестервельта

Распространение волн в упругих средах удобно моделировать в пакете MATLAB, оптимизированном для работы с матрицами большого размера, а для удобства работы с пространством toolbox k-Wave, созданный для расчета распространения волн в упругих средах.

Численная модель набора скриптов k-wave подразумевает работу с пространством как инициализацию матрицы заданного размера, каждому элементу которой присваиваются необходимые физические параметры, необходимые для расчета поля в точке. В пространстве k-wave данная матрица имеет название kgrid.

Численное решение задачи о распространении акустических волн в мягких биологических тканях сводится к решению уравнения Вестервельта в частных производных [1-2].

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\tau\partial z} = \frac{c_0}{2}\Delta p + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 p^2}{\partial\tau^2}, \tau = t - z/c_0,$$

z – направление вдоль оси пучка β – коэффициент нелинейности.

Уравнение решается с использованием псевдоспектрального метода k-пространства, где пространственные градиенты вычисляются с использованием схемы БПФ, а временные градиенты вычисляются с использованием скорректированной k-пространственной разностной схемы. Каждая из этих схем реализуется посредством метода конечных элементов.

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0729-2020-0040).

Суть метода заключена в его названии. Область, в которой ищется решение дифференциальных уравнений, разбивается на конечное количество подобластей (элементов). В каждом из элементов произвольно выбирается вид аппроксимирующей функции. В простейшем случае это полином первой степени. Вне своего элемента аппроксимирующая функция равна нулю. Значения функций на границах элементов (в узлах) являются решением задачи и заранее неизвестны. Коэффициенты аппроксимирующих функций обычно ищутся из условия равенства значения соседних функций на границах между элементами (в узлах). Затем эти коэффициенты выражаются через значения функций в узлах элементов. Составляется система линейных алгебраических уравнений. Количество уравнений равно количеству неизвестных значений в узлах, на которых ищется решение исходной системы, прямо пропорционально количеству элементов и ограничивается только возможностями ЭВМ. Так как каждый из элементов связан с ограниченным количеством соседних, система линейных алгебраических уравнений имеет разрежённый вид, что существенно упрощает её решение [2].

Для того, чтобы решать уравнение Вестервельта, его необходимо привести к слабой формулировке, для чего введем начальные и граничные условия:

$$\begin{cases} p(0,t) = f(t) \\ p(x,0) = 0, \\ p(L,t) = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(t=0) = 0 \end{cases}$$

f(t) – функция источника при x=0, v(t)- тестовая функция.

$$\int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} V(x)dx - \frac{1}{C^2}\int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} V(x)dx = \frac{-\beta}{\rho_0 c_0^4}\int_0^L \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} V(x)dx$$

Это является первой слабой формулировкой. Потребуем, чтобы v было достаточно гладким и удовлетворяющим v (0) = v (L) = 0, так как p имеет существенное значение. Решаем интегрированием по частям:

$$\int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} V(x)dx = \left[\frac{\partial \quad p}{\partial x} V(x)\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dV}{dx}dx = -\int_0^L \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dV}{dx}dx$$

где V обращается в 0 при x=0 и x=L.

$$\int_0^L \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dV}{dx}dx + \frac{1}{C^2}\int_0^L \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} V(x)dx = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4}\int_0^L \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} V(x)dx$$

что теперь справедливо только для гладких v, удовлетворяющих v(0) =v(L)= 0

Для реализации численной модели на первом этапе необходимо рассчитать матрицу сигналов во временном пространстве. Каждый источник излучает сигнал как набор точечных источников,

$$S = \begin{cases} A_s, t < t_s \\ 0, t > t_s \end{cases}$$

где t – время симуляции,– время, за которое излучает источник, и в каждой точке системы результирующий сигнал равен сумме сигналов из всех источников

$$S_{res} = \sum_{i=1}^{k} S_i$$

где – S сигнал точечного источника, k – количество точечных источников.

Следующим этапом является переход в частотную область с помощью алгоритма БПФ.

2.2. Фокусировка ультразвуковой волны. k-WAVE

В данной работе было проведено численное моделирование метода эластографии сдвиговой волной (Shear Wave Elasticity Imaging SWEI). Данный метод был реализован на системе Verasonics с открытой архитектурой на кафедре акустики в лаборатория биомедицинских технологий, медицинского приборостроения и акустической диагностики «МедЛаб» ННГУ им. Н.И. Лобачевского [3-5]. Это позволяет проверять результаты, полученные с помощью численного моделирования, на практике.

Расчет величины радиационной силы производится по результатам фокусировки [5]. На основе этих результатов пересчитывается величина мнимых источников для последнего этапа моделирования.

Реализация численного решения задачи моделирования подразумевает разделение на этапы: сначала задается среда, в которой проводится моделирование (это может быть как линейная среда, так и нелинейное пространство), после этого ставится датчик (в данном случае это модель стандартного линейного датчика для ультразвуковых исследований), и, наконец, симуляция распространения волн в среде.

Для работы симуляции необходимо создать пространство, в котором будет рассчитываться распространение волн. В модуле k-Wave рабочее пространство – это набор точек, образующих матрицу, называемую k-grid, или k-пространство. Для каждой из этих точек прописываются значения скорости звука, плотности, и другие параметры, если требуется.

Источник излучения в данной модели – точка. Но при необходимости можно ставить несколько источников, или группировать несколько точек в один излучатель.

В случае с линейным датчиком излучателем является фазированная антенная решетка, состоящая из 128 элементов. В рамках заданной численной модели это 128 точечных источников(рис.1). Для получения сдвиговой волны необходимо сфокусировать излучатели в точку. Это достигается с помощью квадратичного фазового набега на каждом излучателе, за ноль считаем центр датчика. Среда в данной модели принята однородной, с такими характерными параметрами, как плотность $\rho = 1030$ кг/м^3 и скорость звука $C = 1540$ м/с.

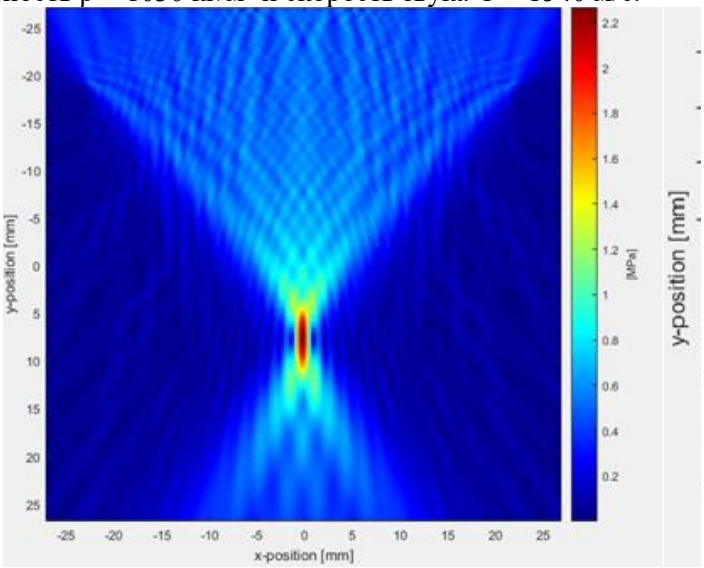


Рис.1. Визуализац ия расчетного давления фокусировки ультразвуковых излучателей, аналогичных линейному медицинскому датчику L7-4

Расчет радиационной силы и генерация сдвиговой волны проводится на основании результатов моделирования фокусировки ультразвуковой волны. Здесь источники излучения помещаются в центр таким образом, чтобы излучать в области пятна фокусировки суммарной мощностью, эквивалентной давлению, полученному в пятне на этапе фокусировки.

3. Сравнение физического и численного моделирования сдвиговых волн в полимерных фантомах

Экспериментальное определение скорости сдвиговой волны, модуля Юнга и вязкости среды проводилось с помощью акустической системы Verasonics в калиброванном полимерном фантоме CIRS Model 049 Elasticity QA Phantom Spherical с расположенными на разной глубине сферами диаметром 10 мм и 20 мм. Сферы в фантомах были четырех типов с разным значением модуля Юнга (Type I–IV), указанные в сопровождающих документах. Данные элементы находились в полимерной среде (матрица), упругие характеристики которой также были известны. Достоинством фантомов является то, что они изготовлены из полимерного материала Zerdine,

характеристики которого не зависят от изменения внешней температуры и прикладываемого давления.

Для сравнения результатов численного моделирования с физическим моделированием использовались результаты, полученные при измерении скорости сдвиговой волны в CIRS фантоме. Начальные условия модели задавались в соответствии с паспортными значениями фантома, а также настроек измерительного датчика.

Свойства среды: C = 1540 m/s, ρ_0 = 1010 kg/m^3. Параметры источника: f = 5MHz, 128 излучателей(датчик L7-4).

Моделирование проводилось на компьютере со следующими характеристиками: Ryzen 5 3400G, 16Гб ОЗУ, без ускорения на графическом процессоре. Время расчета фокусировки излучения датчика составило 1мин. 26 сек., а время обработки генерации сдвиговой волны 2 мин. 5 сек.

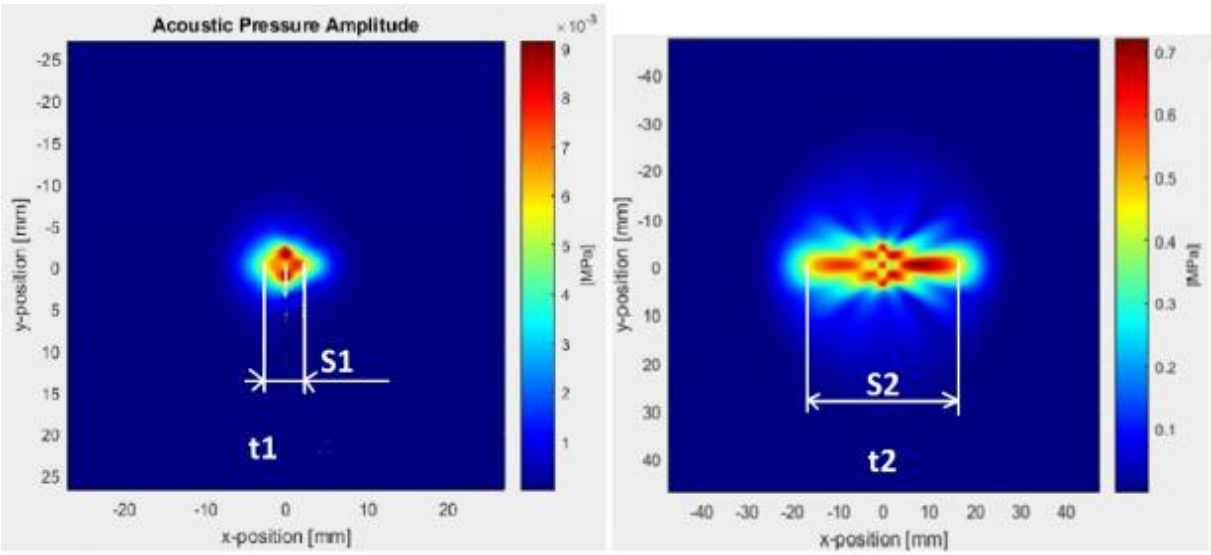


Рис.2. Определение скорости по положению волнового фронта

Расчет скорости производится на основании положения пика давления, характеризующего расположение волнового фронта, в нескольких моментах времени. Скорость вычисляется как $V = S/t$, где S-расстояние между пиками, t-время, за которое пик пришел из точки 1 в точку 2.

При физическом моделировании все измерения проводились в один день, последовательно без выключения установки, с поддержанием температуры как в помещении (26 градусов), так и самого объекта измерения (18 градусов).

Таблица 1. Сопоставление результатов численного и физического моделирования.

Тип среды	Численное моделирование (пакет K-wave) Скорость (м/с)	Физическое моделирование (Verasonics) Скорость (м/с)
матрица	4.17	2.68
I	1.84	1,34
II	2.07	1,81
III	4.85	3,46

Литература

1. Lauterborn, W., Kurz, T. and Akhatov, I., 2007. Nonlinear Acoustics in Fluids in Handbook of Acoustics, Chap. 8, p. 257-297, Springer
2. Dirkse B. Finite Element Method Applied to the One-dimensional Westervelt Equation // Delft University of Technology,Bachelor Applied Physics & Applied Mathematics, 2014, P.21.

3. Khalitov R.Sh., Gurbatov S.N., Demin I.Yu. Use of the Verasonics ultrasound system for measurement the velocity of shear waves in the CIRS phantoms // Phys.Wave Phenom. 2016. V. 24. №. 1. P. 73.
4. Демин И.Ю., Спивак А.Е., Лисин А.А. Моделирование диагностического метода эластографии сдвиговой волной в акустической системе Verasonics с открытой архитектурой // Проектирование и технология электронных средств. 2019. №1. С.50-56.
5. Лисин А.А., Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Спивак А.Е. Численное моделирование, визуализация, и подсчет скорости сдвиговых волн в мягких биологических тканях // Ученые записки физического факультета Московского университета. № 5. 2019. С. 1950101 (5стр).

АСТРОЦИТАРНО-ИНДУЦИРОВАННАЯ ПЕРЕМЕЖАЮЩАЯСЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ НЕЙРОНОВ В МАЛЫХ АНСАМБЛЯХ[1*]

С.Ю. Маковкин, С.Ю. Гордлеева, М.В. Иванченко

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В проведено исследование влияния астроцитарной связи на межнейрональную синхронизацию в минимальной мультиплексной модели колебательной сети. Сеть имитирует нейро-глиальные системы путем взаимодействия медленных («глиальных») и быстрых («нейрональных») колебательных элементов (осцилляторов). В результате исследования было обнаружено, что астроцит вместе с синаптически связанными нейронами образуют замкнутый контур, в котором эффективная сила связи элементов зависит от активности всех элементов системы, а так же что осциллятор астроцит может вызывать периодическую синхронизацию двух синаптически связанных нейрональных осцилляторов.

Ключевые слова: нейроны, астроциты, синхронизация, модель Уллаха-Юнга, модель Ходжкина-Хаксли

В работе изучается минимальная конфигурация нейрон-астроцитного ансамбля, состоящую из двух пар нейронов и астроцитов. Схематическое представление топологии ансамбля нейрон-астроцитов показано на рис.1. Динамика внутриклеточной концентрации Ca2+ в астроците описывается моделью Уллаха-Юнга [1], мембранный потенциал нейрона описывается моделью Ходжкина-Хаксли [2] с модификацией Майнена для мозга млекопитающих [3].

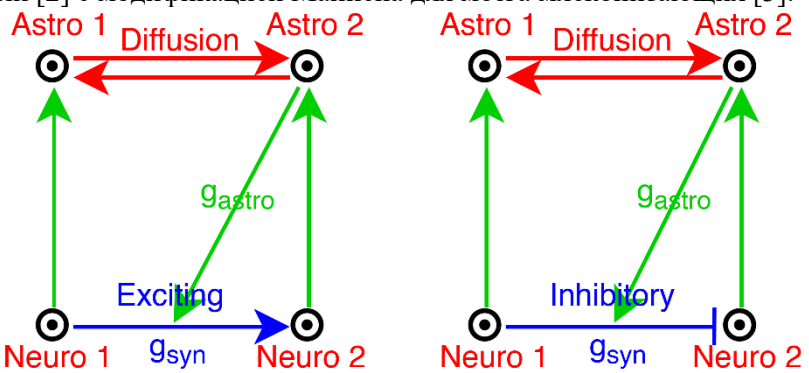


Рис. 1.

Динамика мембранного потенциала описывается моделью Х-Х [2].

Нелинейные функции для воротных переменных α_x, β_x, задаются с помощью модификации Майнена [3].

Возбуждающая или ингибирующая однонаправленная нелинейная связь пресинаптического (ведущего) нейрона с постсинаптическим (подчиненным) нейроном осуществляется синаптическим током I_{syn_2}.Этот ток отражает кинетику химического синапса.

Переменные состояния $i-$го астроцита включают: внутриклеточную концентрацию Ca^{2+}, долю активированных рецепторов $IP3$ в эндоплазматическом ретикулуме и внутриклеточную концентрацию инозит-1,4,5-трифосфата(IP_3), $IP3_i$. Они задаются уравнениями модели астроцита Уллаха-Юнга.

Повышение уровня кальция в астроцитах вызывает высвобождение глиотрансмиттеров, таких как глутамат, ГАМК, АТФ и D-серин. Глиотрансмиттер может модулировать синаптическую силу путём связывания с пре- или постсинаптическими терминалами. Среди разнообразных экспериментальных проявлений разных глиотрансмиттеров [4] мы остановимся на эффекте

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 074-02-2018-330(1).

астроцитарно-индуцированного усиления синаптической передачи. Этот эффект описан с помощью модели, предложенной в [5].

Подробное биофизическое описание нейрон-астроцитарного взаимодействия можно найти в статье [6], [7].

Нелинейный анализ динамики одиночного астроцита $(5, 6)$ и одиночного нейрона X-X описан в [8] и [9] соответственно.

Для каждого из двух колеблющихся синаптически связанных нейронов мы рассчитываем мгновенную частоту $\nu(t)$, определенную как обратная величина интервала (периода) между пиками спайков (ISI):

$$\nu(t) = (ISI(t))^{-1}.$$

Также мы определяем относительную фазу потенциалов действия $\Delta\phi_{1,2}$, как сдвиг во времени между ответным (постсинаптическим) спайком $t_{post}(n)$ и соответствующим предшествующим спайком в пресинаптическом нейроне $t_{pre}(n)$:

$$\Delta\phi_{1,2} = 2\pi * \frac{t_{post}(n) - t_{pre}(n)}{T},$$

T – самый длинный период колебаний между пре- или постсинаптическим спайком нейронов, а $n = 1, 2, \ldots$, отвечают за индекс постсинаптического колебания. Мы считаем, что нейроны синхронизируются во временном интервале, t_s, если отсутствуют сдвиги по фазе на этом интервале и разница между мгновенными частотами нейронов была меньше, чем 1%: $|\nu_2(t_i) - \nu_1(t_i)| < 0.2$. Мы суммируем все такие временные интервалы, когда нейроны синхронизированы во время t_s, нормированное по всему времени наблюдения, t_{tot}, и получаем относительное время синхронизации $\frac{t_s}{t_{tot}}$. Когда относительное время синхронизации равно 1, два нейрона синхронизируются все время наблюдения.

Было обнаружено, что астроцитарная модуляция синаптической связи нейронов улучшает синхронизацию между колеблющимися нейронами. Влияние астроцитов на динамику пары связанных нейронов заключается в стимуляции синхронизации колебательной активности нейронов за счет управляемого астроцитами увеличения нейрональной синаптической силы связи. Пример вызванной астроцитами синхронизации показан на рис. 2. Первоначально колебания нейронов вызывают колебания кальция в астроците. При достижении порога внутриклеточной концентрации Ca^{2+}, астроцит усиливает синаптическую силу связи между нейронами, и они синхронизируются в противофазе на интервале времени, равном длительности импульсов кальция в астроците. В отсутствие астроцитарного воздействия система проявляет биения из-за расстройки частоты между связанными осцилляторами (рис. 2 (b)). На рис. 2 серые области показывают временные интервалы синхронизации (t_s). a) Режим фазовой синхронизации. b) Асинхронный режим (биения). c) Спайки двух связанных нейронах. d) Мгновенные частоты нейронов. Для (a-d) синий цвет соответствует пресинаптическому нейрону, красный цвет - постсинаптическому. e) Относительные фазы. f) Один период динамики увеличения внутриклеточной концентрации кальция в астроците. Красная пунктирная линия показывает порог активации для астроцитарного влияния на синаптическую силу связи.

В заключение, мы выявляем следующие результаты исследования. Астроциты вместе с синаптически связанными нейронами образуют замкнутый контур, в котором эффективная сила связи элементов зависит от временной динамики элементов системы. Астроцит может вызывать прерывистую (периодическую) синхронизацию пары синаптически связанных колеблющихся нейронных осцилляторов X-X на временной шкале. Такой эффект может быть существенным для динамики всей сети и астроцит может влиять на передачу сигнала в тысячи синапсов.

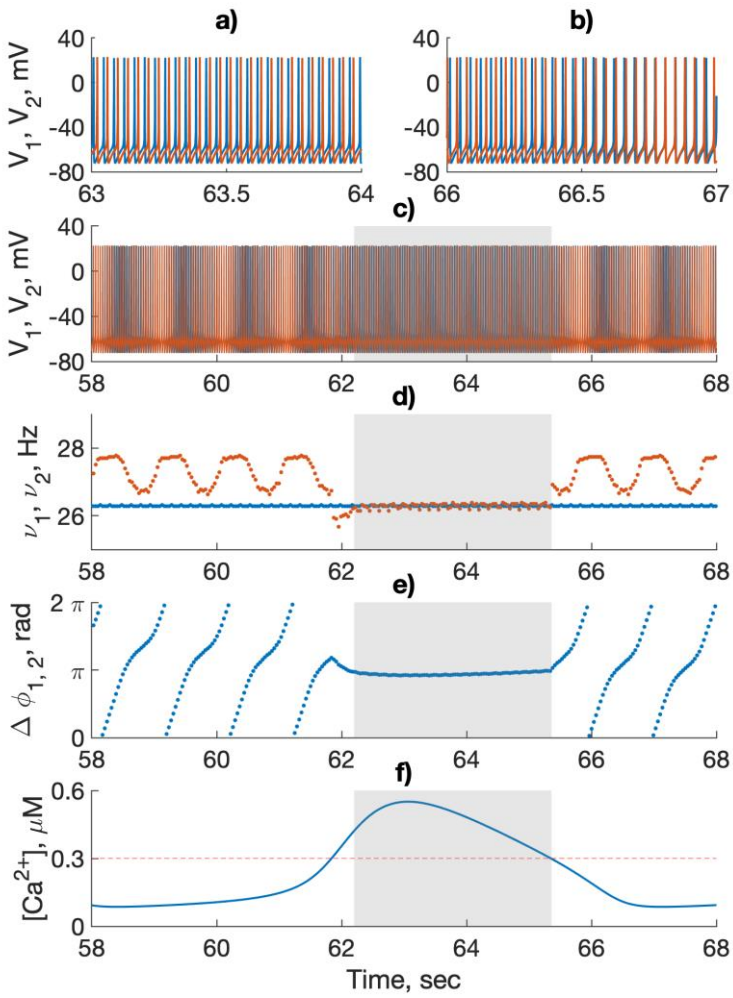


Рис. 2.

Литература

1. Ullah G., Jung P., Cornell-Bell A. H. 2006. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1,4,5)-trisphosphate regeneration. // Cell Calcium, 39 (197–208)
2. Hodgkin, A. L., Huxley, A. F. 1952. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. // The Journal of physiology, 117 (4) 500-544.
3. Mainen, Z. F., Joerges, J., Huguenard, J. R., Sejnowski, T. J. 1995. A model of spike initiation in neocortical pyramidal neurons. // Neuron, 156 (6), 1427-1439.
4. Araque, A., Carmignoto, G., Haydon, P. G., Oliet, S. H., Robitaille, R., and Volterra, A. 2014. Gliotransmitters travel in time and space. // Neuron, 81, 728-739.
5. Kanakov, O., Gordleeva, S., Ermolaeva, A., Jalan, S., Zaikin, A. 2019. Astrocyte-induced positive integrated information in neuron-astrocyte ensembles. // Physical Review E, 99(1), 012418.
6. Gordleeva, S. Y., Lebedev, S. A., Rumyantseva, M. A., Kazantsev, V. B. 2018. Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network. // JETP Letters, 107(7), 440-445.
7. Pankratova, E. V., Kalyakulina, A. I., Stasenko, S. V., Gordleeva, S. Y., Lazarevich, I. A., Kazantsev, V. B. 2019. Neuronal synchronization enhanced by neuron–astrocyte interaction. // Nonlinear Dynamics, 1-16.
8. V Matrosov, S Gordleeva, N Boldyreva, E Ben-Jacob, V Kazantsev 2018. Emergence of regular and complex calcium oscillations by inositol 1, 4, 5-trisphosphate signaling in astrocytes. // Computational Glioscience, 1, 151-176.

9. Kazantsev, V. B., Asatryan, S. Y. 2011. Bistability induces episodic spike communication by inhibitory neurons in neuronal networks. // EPL (Physical Review E), 84(3), 031913.

О СТРУКТУРЕ РАСШИРЕННОЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В СИСТЕМЕ РЁССЛЕРА[1*]

С.М. Малых

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В работе изучаются гомоклинические бифуркации, приводящие к разрушению хаотических аттракторов в системе Ресслера. С помощью разработанных методов символической динамики показано, что граница существования аттракторов образована "бесконенчыми" гомоклиническими траекториями состояния равновесия, двумерное устойчивое многообразие которого ограничивает поглощающую область.

Ключевые слова: бифуркационный анализ, система Рёсслера, символическая динамика

Рассматривается система Ресслера [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = bx - z(x - c), \end{cases} \tag{1}$$

где x, y, z – переменные, a, b и c – параметры.

Работа посвящена изучению влияния состояния равновесия O_2 с координатами (c-ab, b-c/a, -(b-c/a)) на хаотические аттракторы, возникающие в системе в результате бифуркаций состояния равновесия O_1(0, 0, 0).

Разработан метод символической динамики на основе метода, предложенного для аттрактора Лоренца в работе [2]. С помощью этого метода мы построили бифуркационные диаграммы за границей области существования аттракторов в системе Рёсслера. Напомним, что граница области притяжения аттракторов в системе (1) образована устойчивым многообразем состояния равновесия O_2 [3].

В результате работы была проанализирована структура множества гомоклинических бифуркационных кривых состояния O_2 с помощью алгоритма символической динамики и получен ряд бифуркационных диаграмм, согласующихся с ранее известными теоретическими представлениями [4]. При расчете использовались методы параллельного программирования с помощью пакета CUDA.

Для построения бифуркационных диаграмм мы кодировали неустойчивую сепаратрису состояния равновесия O_2, направленную в сторону состояния равновесия O_1 по следующему правилу: при обороте сепаратрисы вокруг точки O_1 добавляли в последовательность 1. Если траектория уходила на бесконечность, все последующие члены последовательности брались равными нулю, см. рис. 1.

На рисунке 2 представлена бифуркационная диаграмма системы при длине последовательности равной четырем. При этом бордовый цвет соответствует кодировке {1, 0, 0, 0} – когда траектория после одного оборота уходит на бесконечность, желтый цвет соответствует кодировке {1, 1, 0, 0}, фиолетовый – {1, 1, 1, 0} и желтый цвет соответствует кодировке {1, 1, 1, 1}. По границам цветов проходят гомоклинические кривые, соответствующие количеству оборотов, совершающих неустойчивой сепаратрисой. Также представлены гомоклинические траектории в некоторых точках на бифуркационных кривых, и схематический вид бифуркационной диаграммы, построенный в работе [3].

Область существования аттракторов в системе Рёсслера ограничена бифуркационными кривыми бесконечной длины, которые расположены на границе бордового цвета.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 20-71-10048.

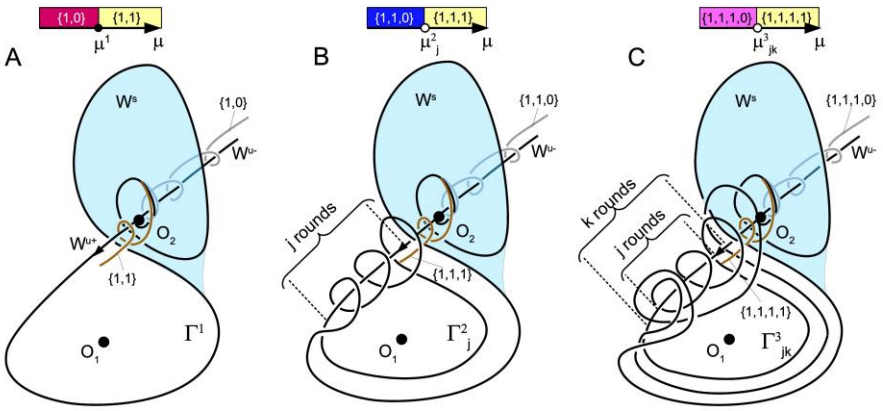


Рис.1. Правило кодирования сепапатрисы состояния равновесия O_2

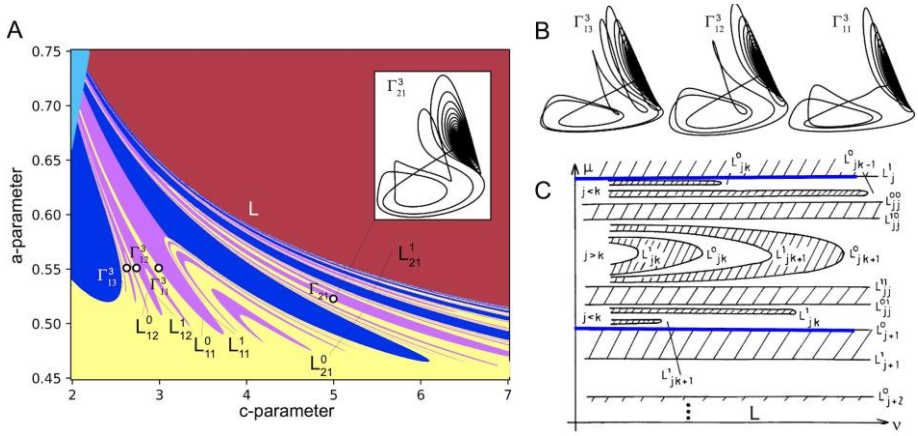


Рис. 2. (A) Двухпараметрическая гомоклиническая бифркационная диаграмма состояния равновесия O_2. (B) Тройные гомоклиничеческие петли. (C) Схематическая бифуркаицонная диграмма, отображающая взаимное расположения кривых тройных гомоклинических петель.

Литература

1. O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos,” Physics Letters A57,397–398 (1976).
2. T. Xing, R. Barrio, and A. L. Shilnikov, “Symbolic quest into homoclinicchaos,” International Journal of Bifurcation and Chaos24, 1440004 (2014).
3. Malykh S., Bakhanova Y., Kazakov A., Pusuluri K., Shilnikov A. Homoclinic chaos in the Rössler model //arXiv preprint arXiv:2008.12865. – 2020.
4. S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, P. Gaspard, and G. Nicolis, “Complexityin the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus,” Nonlin-earity10, 409 (1997).

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИЙНОГО ОГРАНИЧИТЕЛЯ НАКЛОНОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА[1*]

В.Ф. Масягин

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет

В работе представлен численный алгоритм решения уравнений газовой динамики на неструктурированных треугольных сетках. Алгоритм строится с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями. Построение неявной схемы базируется на представлении системы уравнений в дельта-форме, в которой рассматриваются не сами искомые функции, а их приращения на каждом шаге по времени. Для обеспечения монотонности численного решения применяется лимитер, обеспечивающий выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства. Приводятся результаты численных расчетов некоторых модельных задач, позволяющие оценить эффективность метода.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, метод Галеркина с разрывными базисными функциями, неявная схема, NVIDIA AmgX, ограничитель наклонов, энтропийное неравенство.

1. Введение

На сегодняшний день для решения задач газовой динамики активно применяется метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Данный метод обладает высоким порядком точности получаемого решения, хорошо адаптируется к неструктурированным сеткам и при этом обладает компактным вычислительным шаблоном. При всех перечисленных достоинствах метод Галеркина с разрывными базисными функциями требует существенных вычислительных затрат, что, при использовании явных схем, приводит к значительным затратам вычислительного времени. Одним из перспективных направлений исследований сегодня является разработка эффективных неявных схем для разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках. Однако, данный подход, несмотря на снятие существенных ограничений с шага по времени, требует значительных ресурсов для работы со СЛАУ огромных размерностей, поэтому встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники [1].

Данная работа посвящена разработке неявной схемы метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения двумерных уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках. Численный алгоритм решения при таком подходе сводится к решению одной системы линейных уравнений на каждом шаге по времени. В данной работе для решения СЛАУ используется библиотека NVIDIA AmgX, написанная на языке CUDA C. К достоинствам библиотеки следует отнести поддержку параллелизма как на уровне нескольких графических процессоров, так и на уровне нескольких вычислительных кластеров, что обеспечивается посредством поддержки технологии MPI. Также библиотека AmgX предоставляет гибкую систему конфигурации, и благодаря этому появляется возможность создавать иерархию решающих алгоритмов с произвольной глубиной, в которой внешний решающий алгоритм будет использовать внутренние в качестве предобработчиков и предобуславливателей, которые сами могут быть обработаны другими методами. Такой подход позволяет пользователю быстро экспериментировать с различными схемами [2].

В настоящий момент библиотека находит всё более широкое применение в современном промышленном и научном численном анализе. В частности, AmgX является составной частью

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-71-00131).

коммерческого вычислительного программного обеспечения ANSYS Fluent. Показателем актуальности и эффективности используемой библиотеки является и тот факт, что на данный момент она используется в качестве стандарта для сравнения эффективности и скорости работы новых численных алгоритмов для решения СЛАУ, наряду с такими мощными средствами как библиотека HYPRE [3].

2. Математическая модель и вычислительный алгоритм

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v^2+p)}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial\big((\rho E+p)u\big)}{\partial x}+\frac{\partial\big((\rho E+p)v\big)}{\partial y}=0, \tag{4}$$

дополненную подходящими начальными и граничными условиями, вид которых зависит от конкретной задачи. Здесь ρ – плотность, $\boldsymbol{v}=(u,v)$ – вектор скорости, p – давление, $E=\rho\left(e+\frac{u^2+v^2}{2}\right)$ – полная энергия, e – внутренняя энергия. Система уравнений замыкается уравнением состояния $p=\rho e(\gamma-1)$, где γ – показатель адиабаты.

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\rho\\\rho u\\\rho v\\\rho E\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}^{(1)}\\\boldsymbol{F}^{(2)}\end{pmatrix},\boldsymbol{F}^{(1)}(\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}\rho u\\\rho u^2+p\\\rho uv\\(\rho E+p)u\end{pmatrix},\boldsymbol{F}^{(2)}(\boldsymbol{U})=\begin{pmatrix}\rho v\\\rho uv\\\rho v^2+p\\(\rho E+p)v\end{pmatrix}.$$

Тогда система (1)-(4) переписывается в виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=0, \tag{5}$$

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями расчетную область Ω покроем неструктурированной сеткой $K_h\colon\Omega=\cup_{i=1}^{N_h}K_i$, состоящей из треугольников таких, что $\dim\big(K_i\cap K_j\big)<2, i\neq j$. Введем пространство кусочно-полиноминальных функций: $V_h^K=\big\{v\in L^2(\Omega)\colon v|_{K_i}\in P_K(K_i), i=1,\cdots,N_h\big\}$, где $P_K(K_i)$ – пространство полиномов степени не выше чем K на элементе K_i. На каждом элементе K_i зададим базисные функции из V_h^K: $\varphi_{il}=\left(\frac{x-x_{ci}}{\Delta x_i}\right)^{\alpha_{K_il}}\cdot\left(\frac{x-y_{ci}}{\Delta y_i}\right)^{\beta_{K_il}}, l=1,\cdots,N,$ т акие, что сумма степеней $\alpha_{K_il}+\beta_{K_il}$ не превышает некоторого заданного числа p. Здесь x_{ci},y_{ci} - к оординаты центра масс, а $\Delta x_i,\Delta y_i$ - х арактерные размеры ячейки K_i.

Дискретный аналог системы (5) получается, полагая, что внутри каждого элемента K_i сетки приближенное решение $\boldsymbol{U}_{ih}\in V_h^K$ будем искать в виде $\boldsymbol{U}_{ih}(x,y,t)=\sum_{k=0}^{N}\boldsymbol{U}_{ik}(t)\,\varphi_{ik}(x,y)$.

Умножим уравнения системы на пробные функции, взятые из пространства базисных функций и проинтегрируем по каждому элементу сетки:

$$\int\limits_{K_i}\sum_{k=0}^{N}\frac{d\boldsymbol{U}_{ik}}{dt}\varphi_{ik}\varphi_{il}dS+\oint\limits_{\partial K_i}\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\varphi_{il}dl-\int\limits_{K_i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{ih})\nabla\varphi_{il}dS=0\,,$$

где $\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}$ – функция численного потока на границе элементов сетки. В данной работе используется потоковая функция Годунова.

С учетом введенных ранее обозначений и с учетом шага по времени Δt получаем:

$$\int\limits_{K_i} \sum_{k=0}^{N} \frac{\boldsymbol{U}_{ik}^{m+1} - \boldsymbol{U}_{ik}^{m}}{\Delta t} \varphi_{ik}\varphi_{il} dS + \oint\limits_{\partial K_i} \left(\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\right)^{m+1} \varphi_{il} dl -$$

$$- \int\limits_{K_i} \left(\boldsymbol{F}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1}\right) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \boldsymbol{F}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1}\right) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS = 0. \qquad (6)$$

где верхние индексы указывают шаг по времени, на котором берется значение.

Далее рассмотрим нахождение элементов результирующей матрицы от конвективных слагаемых в системе (6).

$$\boldsymbol{F}^{(\alpha)}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1}\right) = \boldsymbol{F}^{(\alpha)}(\boldsymbol{U}_{ih}^{m}) + \frac{\partial \boldsymbol{F}^{(\alpha)}}{\partial \boldsymbol{U}}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1} - \boldsymbol{U}_{ih}^{m}\right), \alpha = 1,2.$$

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}^{(\alpha)}}{\partial \boldsymbol{U}}\right|_{\boldsymbol{U}=\widehat{\boldsymbol{U}}}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{-} + \boldsymbol{\Lambda}^{+}, \boldsymbol{\Lambda}^{-} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda} - |\boldsymbol{\Lambda}|), \boldsymbol{\Lambda}^{+} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Lambda} + |\boldsymbol{\Lambda}|),$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-} + \boldsymbol{A}^{+}, \boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}^{-}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}^{+}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{A}|_{\boldsymbol{n}=(1,0)}, \boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{A}|_{\boldsymbol{n}=(0,1)}$$

где $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{R}$, – матрицы, составленные из правых и левых собственных векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\boldsymbol{A}$, $\widehat{\boldsymbol{U}}$ соответствует решениям задачи о распаде разрыва.

Потоковые значения от конвективных слагаемых с учетом введенных ранее обозначений находятся в виде: $\left(\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\right)^{m+1} = \left(\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\right)^{m} + \boldsymbol{A}^{+}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1} - \boldsymbol{U}_{ih}^{m}\right) + \boldsymbol{A}^{-}\left(\boldsymbol{U}_{jh}^{m+1} - \boldsymbol{U}_{jh}^{m}\right)$.

Для нахождения значения $\left(\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\right)^{m}$ в работе используется потоковая функция Годунова. Нормаль $\boldsymbol{n}$ к ребру σ направлена из ячейки i в ячейку с индексом j.

Обозначим за Γ_{ij} границу между ячейками i и j. Определим приращение за шаг по времени от решения как $\Delta\boldsymbol{U}_{ih}^{m} = \boldsymbol{U}_{ih}^{m+1} - \boldsymbol{U}_{ih}^{m}$. Приращения искомых функций будем искать в том же пространстве базисных функций, что и сами функции: $\Delta\boldsymbol{U}_{ih}^{m} = \sum_{k=0}^{N} \Delta\boldsymbol{U}_{ik}^{m} \varphi_{ik}$. В итоге записываем систему в «дельта-форме»:

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\Delta\boldsymbol{U}_{ik}^{m}}{\Delta t} \int\limits_{K_i} \varphi_{ik}\varphi_{il} dS + \sum_{j} \oint\limits_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{A}^{+} \sum_{k=0}^{N} \Delta\boldsymbol{U}_{ik}^{m} \varphi_{ik}\varphi_{il} dl + \sum_{j} \oint\limits_{\Gamma_{ij}} \boldsymbol{A}^{-} \sum_{k=0}^{N} \Delta\boldsymbol{U}_{jk}^{m} \varphi_{jk}\varphi_{il} dl +$$

$$+ \int\limits_{K_i} \left(\boldsymbol{A}^{(1)} \sum_{k=0}^{N} \Delta\boldsymbol{U}_{ik}^{m} \varphi_{ik} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \boldsymbol{A}^{(2)} \sum_{k=0}^{N} \Delta\boldsymbol{U}_{ik}^{m} \varphi_{ik} \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS =$$

$$= \int\limits_{K_i} \left(\boldsymbol{F}^{(1)}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1}\right) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial x} + \boldsymbol{F}^{(2)}\left(\boldsymbol{U}_{ih}^{m+1}\right) \frac{\partial \varphi_{il}}{\partial y} \right) dS - \oint\limits_{\partial K_i} \left(\widehat{\boldsymbol{F}}_n^{\sigma}\right)^{m} \varphi_{il} dl.$$

Полученную СЛАУ решаем с использованием решателей из библиотеки NVIDIA AmgX.

3. Энтропийный ограничитель наклонов

Согласно современным представлениям, реалистичная модель газодинамического течения должна в обобщенном смысле удовлетворять энтропийному неравенству [4]:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \geq 0, \qquad (7)$$

где $s = ln\frac{p}{p_*} - \gamma ln\frac{\rho}{\rho_*}$, p_*, ρ_* - любые постоянные положительные величины, имеющие размерности давления и плотности.

С использованием обозначений $S(\boldsymbol{U}) = \rho s, H_x(\boldsymbol{U}) = \rho s u, H_y(\boldsymbol{U}) = \rho s v$, дискретный аналог энтропийного неравенства (7) для ячейки K_i можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\int S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t)\big)\,dS + \oint \left(H_x\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t)\right)n_x + H_y\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t)\right)n_y\right)dl \geq 0, \tag{8}$$

где $\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t)$ соответствует решениям задачи распада разрыва.

Проинтегрируем (8) по временному промежутку $[t, t+\tau]$ и разделим результат на τ:

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{K_i}\left[S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t+\tau)\big) - S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t)\big)\right]dS +$$

$$+\int\limits_{t}^{t+\tau}\left[\oint\limits_{\partial K_i}\left(H_x\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_x + H_y\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_y\right)dl\right]dt' \geq 0. \tag{9}$$

Полученная интегральная форма (9) дискретного аналога энтропийного неравенства можно переписать в виде: $\int_{K_i} S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t+\tau)\big)\,dS \geq C_s$.

$$C_s = \int\limits_{K_i} S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t)\big)\,dS + \int\limits_{t}^{t+\tau}\left[\oint\limits_{\partial K_i}\left(H_x\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_x + H_y\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_y\right)dl\right]dt'. \tag{10}$$

Второй интеграл в правой части (10) будем аппроксимировать с использованием схемы Эйлера. В результате получаем следующее выражение для определения C_s:

$$C_s = \int\limits_{K_i} S\big(\boldsymbol{U}(x,y,t)\big)\,dS + \tau\oint\limits_{\partial K_i}\left(H_x\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_x + H_y\left(\widehat{\boldsymbol{U}}(x,y,t')\right)n_y\right)dl.$$

Рассмотрим одну ячейку K_i и сохраним обозначения $\boldsymbol{U}_{i0}, \boldsymbol{U}_{i1}$ и $\boldsymbol{U}_{i2}$ для значений коэффициентов разрывного метода Галеркина [7]. Вычислим значение четырех функций

$$\Phi_{ij}(\lambda) = p\left(\boldsymbol{U}_{i0}\varphi_{i0}(x,y,t) + (-1)^i\lambda\boldsymbol{U}_{i1}\varphi_{i1}(x,y,t) + (-1)^j\lambda\boldsymbol{U}_{i2}\varphi_{i2}(x,y,t)\right), i,j = 0{,}1,$$

где $p = (\gamma-1)\left(E - \frac{(\rho u)^2+(\rho v)^2}{2\rho}\right)$ – давление в консервативных переменных. Если $min\big[\Phi_{ij}(1)\big] \geq p_{min}, i,j = 0{,}1$, ($p_{min}$ – заранее выбранное малое положительное число), то полагаем $\lambda_p = 1$. В противном случае принимаем в качестве λ_p ближайший к 1 слева и снизу корень уравнения

$$min\big[\Phi_{ij}(\lambda)\big] = p_{min}. \tag{11}$$

Далее вычисляем функцию $\Psi(\mu) = \int_{K_i} S\left(\boldsymbol{U}_{i0}\varphi_{i0}(x,y,t) + \lambda_p\mu\boldsymbol{U}_{i1}\varphi_{i1}(x,y,t) + \lambda_p\mu\boldsymbol{U}_{i2}\varphi_{i2}(x,y,t)\right)dS$ при значении $\mu = 1$. Если $\Psi(1) \geq C_s$, то полагаем $\mu_s = 1$. В противном случае принимаем в качестве μ_s ближайший к 1 слева и снизу корень уравнения

$$\Psi(\mu) = C_s. \tag{12}$$

После определения значений числовых параметров λ_p и μ_s описанным выше способом полагаем значения коэффициентов разрывного метода Галеркина в ячейке K_i равными: $\boldsymbol{U}_{i0}^* = \boldsymbol{U}_{i0}, \boldsymbol{U}_{i1}^* = \lambda_p\mu_s\boldsymbol{U}_{i1}, \boldsymbol{U}_{i2}^* = \lambda_p\mu_s\boldsymbol{U}_{i2}$.

Данная процедура обеспечивает выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства в консервативной форме [5]. Благодаря выпуклости вверх функций $\Phi_{ij}(\lambda), i,j = 0{,}1$ и $\Psi(\mu)$ решение уравнений (11) и (12) искалось с помощью метода Ньютона, выбирая начальное значение аргумента равным 1.

4. Результаты расчетов

4.1. Используемые вычислительные средства и библиотеки

Для проведения вычислительных экспериментов использовался компьютер с процессором Intel Core i5-8265U и видеокартой NVIDIA GeForce MX250. Ниже представлены результаты, полученные с использованием решателя PBICGSTAB из библиотеки AmgX версии 2.1.0.131-opensource.

4.2. Течение невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином

Был выполнен расчет течения невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином при $\mathrm{M} = 2$ и числом Куранта, равным 5. Угол клина в канале равен 10°. Моделировалась конфигурации системы скачков уплотнения возникающих при обтекании начального клина и многократного отражения начального скачка от стенок канала при условиях: $p_{\infty} = 10^5$ Па, $T_{\infty} = 300$ К, $c_v = 724.4$ Дж/(кг К) [6]. Расчетная сетка состояла из 17096 ячеек. На рис. 1 представлены картины распределения полного давления в расчетной области при использовании различных лимитеров. На рис. 2 представлена зависимость полного давления, отнесенного к полному давлению невозмущенного потока, от координаты x вдоль сечения $y = 850$.

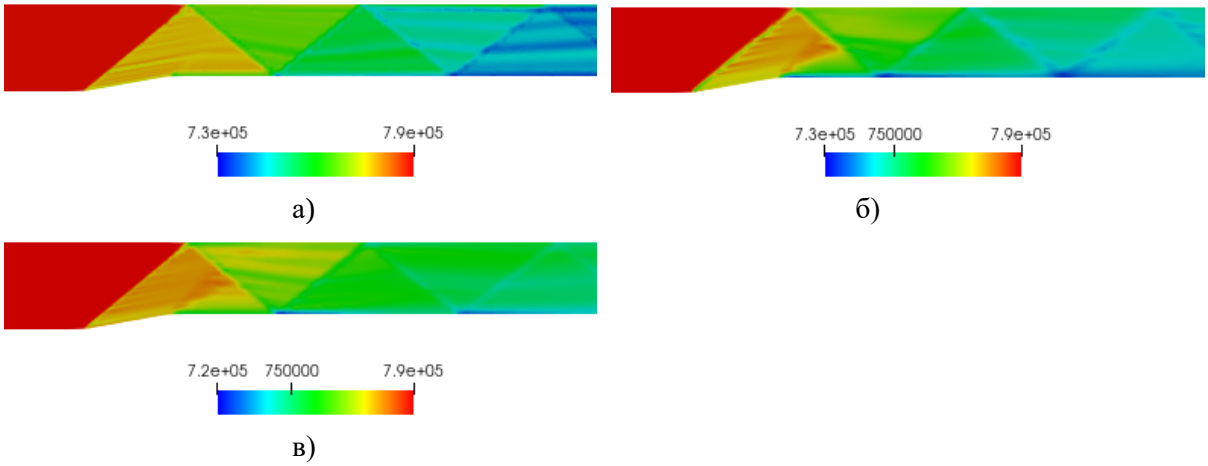


Рис. 1. Распределение полного давления: (а) энтропийный лимитер, (б) лимитер Кокбурна, (в) лимитер Барта-Йесперсена

Результаты хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием метода конечных объемов на блочно-структурированных [6] и неструктурированных сетках [7]. При этом видно, что энтропийный лимитер лучше воспроизводит структуру течения. Численное решение с энтропийным лимитером сошлось за 4000 шагов по времени, с лимитером Кокбурна – за 4500, с лимитером Барта-Йесперсена – за 5000.

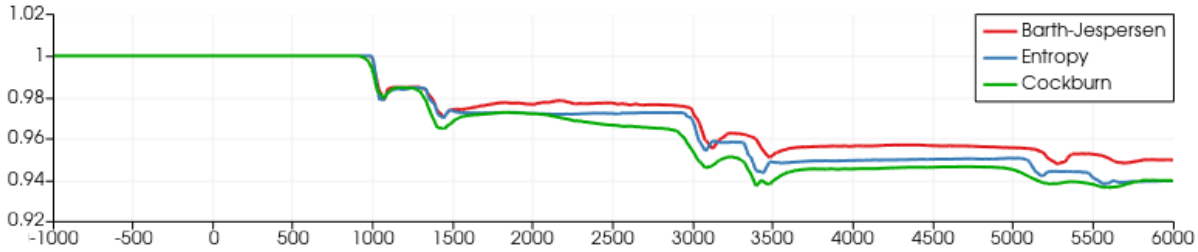


Рис. 2. Зависимость полного давления, отнесенного к полному давлению невозмущенного потока, от координаты x на боковой стенке в сечении $y = 850$

Таблица 1. Среднее время выполнения одного шага по времени

Лимитер	Среднее время выполнения одного шага по времени, с
Энтропийный	2,99
Кокбурн	2,93
Барт-Йесперсен	3,74

Заключение

В результате была создана численная методика на основе неявной схемы метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики с использова-

нием библиотеки NVIDIA AmgX. Полученные численные результаты показывают возможность применения численной схемы и энтропийного лимитера для решения уравнений газовой динамики. Исследование эффективности применения решателей библиотеки NVIDIA AmgX остается за рамками данной работы.

Литература

1. Краснов М.М. и др. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 2. С. 3–22.
2. Simoncini V., Szvld D.B. Flexible inner-outer Krylov subspace methods // SIAM J. Numer. Anal. 2003. Vol. 40, No. 6. P. 2219–2239. DOI: 10.1137/S0036142902401074.
3. Naumov M. et al. AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // SIAM J. Sci. Comput. 2015. Vol. 37, No. 5. P. 602–626. DOI: 10.1137/140980260.
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. № 051. 22 с.
6. Жалнин Р.В. и др. Пакет программ ЛОГОС. методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329.
7. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н. и др. Реализация параллельных вычислений на графических процессорах в пакете вычислительной газовой динамики ЛОГОС // Выч. мет. программирование. 2013. Т. 14, № 3. С. 334–342.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МОДЕЛИРОВАНИИ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

И.Г. Милешин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается итерационный метод решения задач об определении электрического потенциала глобальной электрической цепи в атмосфере Земли, основанный на методе ортогонального проектирования. Приводится обоснование метода и обсуждаются основные аспекты его численной реализации.

Ключевые слова: Система уравнений Максвелла, глобальная электрическая цепь, метод ортогонального проектирования.

При моделировании квазистационарных электромагнитных процессов в атмосфере Земли часто используется система уравнений Максвелла в нерелятивистском электрическом приближении [1]-[4]. В этом приближении предполагается, что электрическое поле потенциально, то есть

$$\vec{E}(x,t) = -\nabla\phi(\mathrm{x,t}). \tag{1}$$

В этом случае из системы уравнений Максвелла следует, что

$$\frac{\partial\nabla\phi(x,t)}{\partial t} + 4\pi\sigma\nabla\phi(x,t) = 4\pi J^{ext}(x,t) - c\cdot rot\left(\vec{H}(x,t)\right), \tag{2}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, Ω – открытое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^3$, гомеоморфное шаровому слою с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \emptyset$, где Γ_1 – поверхность Земли, Γ_2 - условная граница, разделяющая атмосферу и ионосферу. Уравнение (2) дополняется начальными и граничными условиями

$$\phi(x,t) = 0, x \in \Gamma_1, \phi(x,t) = c(t), x \in \Gamma_2, \tag{3}$$

$$\phi(x,t)|_{t=0} = \phi_0(\mathrm{x}). \tag{4}$$

В (3) c(t) – неизвестная функция, зависящая только от времени t>0.

Определим следующие функциональные пространства

$$H^1(\Omega) = \{\phi \in L_2(\Omega), \frac{\partial\phi}{\partial x_i}, i = 1,2,3\}, \tag{5}$$

$$V(\Omega) = \{\phi(\mathrm{x}) \in H^1(\Omega): \phi(x) = 0, x \in \Gamma_1, \phi(x) = const, x \in \Gamma_2\}, \tag{6}$$

$$H(rot,\Omega) = \{\vec{\mathrm{u}} \in \{\mathrm{L}_2(\Omega)\}^3 : rot(\vec{u})\} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \tag{7}$$

где $\{L_2(\Omega)\}^3$ – пространство вектор-функций, суммируемых с квадратом.

Решением задачи являются функции $\phi(x,t) \in V(\Omega), rot\left(\vec{H}(x,t)\right) \in L_2(\Omega), \vec{H} \in H(rot,\Omega)$. Исследование корректности задачи (2)-(4) выполнено в работах [2], [5], [6].

Справедливо ортогональное разложение пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$

$$\{L_2(\Omega)\}^3 = \mathcal{H}(rot,\Omega) \oplus \mathcal{H}(grad,\Omega), \tag{8}$$

где $\mathcal{H}(rot,\Omega)$ – пространство роторов функций из $H(rot,\Omega)$, $\mathcal{H}(grad,\Omega)$ – пространство градиентов функций из $V(\Omega)$.

Пусть P – оператор ортогонального проектирования пространства $\{L_2(\Omega)\}^3$ на $\mathcal{H}(grad,\Omega)$. Применяя оператор к уравнению (2) можно получить

$$\frac{\partial\nabla\phi(x,t)}{\partial t} + 4\pi P(\sigma\nabla\phi(x,t)) = 4\pi P(J^{ext}(x,t)) \tag{9}$$

В работе проводится теоретическое исследование дифференциального операторного уравнения (9) и обсуждаются вопросы численной реализации соответствующей задачи. В частности, формулируется и обосновывается итерационный метод решения задачи (9).

$$\frac{\partial\nabla\phi^{j+1}(x,t)}{\partial t} + 4\pi P(\sigma\nabla\phi^{j}(x,t)) = 4\pi P(J^{ext}(x,t)) \tag{10}$$

Литература

1. Толмачев В.В., Головин А.М., Потапов В.С. Термодинамика и электродинамика сплошной среды, издательство МГУ 1988, 233 с.
2. Жидков А.А., Калинин А.В. Корректность одной математической задачи атмосферного электричества // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 123-129.
3. Мареев Е.А. Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. № 5. С. 527-534.
4. Boström R., Fahleson U. Vertical propagation of time-dependent electric fields in the atmosphere and ionosphere // in H.Dolezalek, R.Reiter (Eds.), Electrical Processes in Atmospheres, Steinkopff, 1977. P. 529-535.
5. Калинин А.В., Слюняев Н.Н., Мареев Е.А., Жидков А.А. Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 3. С. 314-322.
6. Kalinin A.V., Slyunyaev N.N. Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. Vol. 450. No. 1. P. 112-136.

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ТРИАДНОГО ЗАМЫКАНИЯ[1*]

С.В. Миронов, С.П. Сидоров

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В работе рассматривается модификация известной модели триадного замыкания, предложенной П. Холмом и Б.Дж. Кимом. В отличие от этой модели, на этапе формирования триады новое ребро проводится с использованием механизма предпочтительного присоединения по отношению к соседям узла, выбранного на предыдущем шаге (который выбирается с помощью механизма предпочтительного присоединения по отношению ко всем возможным узлам сети). Мы исследуем геометрические свойства сетей, генерируемых этой моделью, и показываем, что динамика средней величины степени вершины является степенной функцией числа итераций, а закон распределения степеней является степенным.

Ключевые слова: случайные графы, модель Барабаши-Альберт, модель триадного замыкания, сложные сети.

1. Введение

Так называемая модель триадного замыкания была разработана в работе [1] и является расширением модели Барабаши-Альберт, которая использует механизм предпочтительного присоединения [2]. Обе модели создают сети с безмасштабной структурой и степенным законом распределения степеней. Однако модель триадного замыкания порождает сети с более высокой кластеризацией, чем модель Барабаши-Альберт, и поэтому сети, полученные с использованием модели триадного замыкания, в этом смысле больше похожи на реальные социальные сети.

В этой модели, когда новый узел добавляется в сеть, он формирует связь с существующим узлом в сети, выбранным с вероятностью, пропорциональной его степени (т.е. используется механизм так называемого предпочтительного присоединения). Второе ребро, выходящее из нового узла, присоединяется с вероятностью p к случайно выбранному соседу того узла, который был присоединен с использованием механизма предпочтительного присоединения (формирование триады), тогда как с вероятностью 1-p новый узел связывается с любым существующим узлом сети с использованием механизма предпочтительного присоединения.

Модель триадного замыкания создает сети с различными значениями коэффициентов кластеризации за счет изменения величины p. С другой стороны, распределение степеней сетей, построенных с использованием модели триадного замыкания, является таким же, как и в модели BA, т.е. подчиняется степенному закону с экспонентой 3 для любого p.

Следует заметить, что в базовой модели триадного замыкания, предложенной П. Холмом и Б.Дж. Кимом, на этапе формирования триады новая ссылка прикрепляется к любому случайному соседу (который выбирается равномерно) узла, выбранного в предыдущий шаг (который выбирается с помощью механизма предпочтительного присоединения). Однако, как показывают многочисленные примеры, в ряде сложных сетях вторая ссылка выбирается также с использованием механизма предпочтительного присоединения.

В связи с этим в данной статье мы предлагаем внести коррективы в модель триадного замыкания для случая, когда узлы выбираются с использованием механизма предпочтительного присоединения на этапе формирования триады (а не равномерно, как в базовой модели).

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания (проект № *FSRR-2020-0006*).

Мы эмпирически исследуем геометрические свойства сетей, генерируемых этой моделью, и показываем, что динамика средней величины степени вершины является степенной функцией числа итераций.

2. Модификация модели триадного замыкания

Модель триадного замыкания пытается отразить хорошо известный факт, что многие реальные сети имеют гораздо более высокую вероятность наличия связи между парой узлов с общим соседом по сравнению со случайной нулевой моделью. Эффект особенно очевиден в социальных сетях [3-10], а также широко присутствует в сетях сотрудничества в области знаний, цитирования и исследований, и многих других.

2.1. Эволюция сети

Формирование графа в модели осуществляется итеративно согласно следующим правилам:

1. На каждой итерации t добавляется один узел;

2. На каждой итерации t к графу добавляются два ребра, и каждый новый узел соединяется двумя ребрами с двумя существующими узлами следующим образом:

(a) сначала новый узел связывается с одним из узлов *i* сети с вероятностью, пропорциональной степени этого узла k_i;

(b) новый узел связывается с одним из соседей *j* узла *i*, выбранного на шаге 2(a), с вероятностью, пропорциональной k_j, то есть степени этой вершины.

Описанная выше модель случайного графа может быть легко реализована и применена для генерации графов.

2.2. Динамика степени отдельной вершины

В этом подразделе мы исследуем временную эволюцию сетей, созданных в соответствии с моделью. Начнем с анализа степени зависимости от времени для одного узла.

Обозначим $k_i(t)$ (ожидаемую) степень узла *i* на итерации $t \geq i$. Пусть

$$\gamma_i(t) := \sum_{j=1}^{N(t)} p(i,j) \frac{k_j(t)}{s_j(t)},$$

где $p(i,j)$ есть индикаторная переменная, равная 1, если два узла *I* и *j* соединены ребром, $s_j(t)$ означает сумму степеней всех вершин, соседних с вершиной *j*.

На рисунке 1 показана динамика степени для различных узлов *i* = 2,5,10,50,100 для *t* = 1, …, 100000. Значения степеней не убывают с максимальными значениями $k_2^{\max} = 33223{,}4$, $k_5^{\max} = 6033$, $k_{10}^{\max} = 394{,}4$, $k_{50}^{\max} = 84{,}4$, $k_{50}^{\max} = 26{,}6$, достигается на итерации *t*=100000. Поэтому для представления графиков на рисунке мы нормализовали каждый из них, разделив на максимальную степень для соответствующего узла. Результаты были усреднены для 10 независимых прогонов (все сети имеют размер *N* = 100 000). На рисунке видно, что все узлы имеют разную динамику.

Таким образом, эмпирические результаты показывают, что динамика роста степени каждого узла подчиняется степенному закону. Однако все узлы имеют разные значения показателя (который близок к 1 для начальных узлов, а затем быстро уменьшается до значения 0.25 с увеличением номера узла). Это существенное отличие от модели Барабаши-Альберт или модели триадного присоединения, для которых показатели одинаковы и равны 0,5 для всех узлов, независимо от того, когда появился конкретный узел.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Динамика степени отдельной вершины i имеет вид

$$k_i(t) = c_i t^{0.5} \exp\left(\int \frac{\gamma_i(t)}{4t} dt \right).$$

Результат теоремы предлагает ряд прогнозов:

- Степень узла в сети увеличивается по степенному закону с динамическим показателем. Однако разные узлы подчиняются разному динамическому закону с разным значением динамического показателя.
- Рост степеней является сублинейным. Это является следствием растущего характера предлагаемой модели: каждый новый узел имеет больше узлов для связи, чем предыдущий узел. Следовательно, со временем существующие узлы конкурируют за ссылки с увеличивающимся пулом других узлов.
- Чем раньше был добавлен узел, тем выше его степень и выше показатель степени. Следовательно, хабы больше в этой модели по сравнению с моделью Барабаши-Альберт или моделью триадного замыкания.

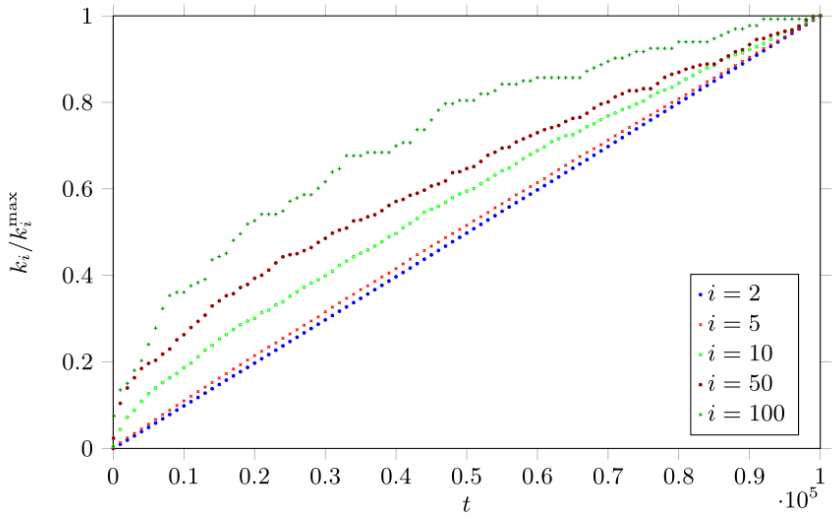


Рис. 1. Степень динамики узлов *i*=2,5,10,50,100. Мы нормализовали каждый из них, разделив на максимальную степень для соответствующего узла. Результаты были усреднены для 10 независимых прогонов (размер всех сетей *N* = 100,00)

2.3. Распределение степеней

Пусть $p_k(t)$ есть вероятность того, что случайно выбранный узел будет иметь степень *k* на итерации *t*. Следующий результат описывает стационарное распределение степеней при росте числа итераций к бесконечности.

Теорема 2. Справедливо соотношение

$$p_k = ck^{-\gamma}, \; 3.5 \le \gamma \le 4.$$

Таким образом, распределение степеней в сетях, сгенерированных с использованием модели, является степенным. Однако показатель степени существенно отличается от показателя степенного закона для сетей, сгенерированных с использованием модели Барабаши-Альберт или модели триадного замыкания.

Отметим также, что для сетей с показателем $\gamma > 3$ как первый, так и второй момент распределения степеней являются конечными. Поэтому такие сети структурно аналогичны случайным графам, соответствующим модели Эрдеша-Реньи.

Будущие исследования могут включать изучение свойств сетей, построенных с использованием аналога данной модели, но с числом добавляемых ребер $m > 2$.

Литература

1. Holme, P., Kim, B.J.: Growing scale-free networks with tunable clustering. Phys. Rev. E 65, 026107.
2. Barabási, A.L., Albert, R.: Emergence of scaling in random networks. Science 286(5439), 509–512 (1999).
3. Bianconi, G., Darst, R., Iacovacci, J., Fortunato, S.: Triadic closure as a basic generating mechanism of communities in complex networks. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics 90(4) (2014).
4. Fang, Z., Tang, J.: Uncovering the formation of triadic closure in social networks. vol. 2015-January, pp. 2062–2068 (2015).
5. Fang, Z., Tang, J.: Uncovering the formation of triadic closure in social networks. In: Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence. p. 2062–2068. IJCAI'15, AAAI Press (2015).
6. Huang, H., Tang, J., Liu, L., Luo, J., Fu, X.: Triadic closure pattern analysis and prediction in social networks. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 27(12), 3374–3389 (2015).
7. Huang, H., Tang, J., Liu, L., Luo, J., Fu, X.: Triadic closure pattern analysis and prediction in social networks. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 27(12), 3374–3389 (2015).
8. Huang, H., Dong, Y., Tang, J., Yang, H., Chawla, N.V., Fu, X.: Will triadic closure strengthen ties in social networks? ACM Trans. Knowl. Discov. Data 12(3) (Jan 2018).
9. Li, M., Zou, H., Guan, S., Gong, X., Li, K., Di, Z., Lai, C.H.: A coevolving model based on preferential triadic closure for social media networks. Scientific Reports 3 (2013).
10. Linyi, Z., Shugang, L.: The node influence for link prediction based on triadic closure structure. In: 2017 IEEE 2nd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC). pp. 761–766 (2017).

ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ АКТОРАМИ НА БАЗЕ ТЕОРИИ ИНТЕРСУБЪЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ: СТРУКТУРИРОВАНИЕ ТЕРМИНОСИСТЕМЫ

Т.В. Моисеева[1], Н.Ю. Поляева[1,2]

[1]Самарский федеральный исследовательский центр РАН, Институт проблем управления сложными системами РАН,
[2]Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Представлен новый подход к управлению – теория интерсубъективного управления. Показана необходимость формализации смыслового поля теории. Предложена методика формализации – от выделения ключевых терминов до построения онтологической модели. Представлены основные термины теории.

Ключевые слова: принятие решений, интерсубъективное управление, актор, терминосистема, понятийная структура.

1. Введение

Современные системы поддержки принятия решений ориентированы на помощь людям, принимающим решения в сложных условиях. Особый интерес представляют системы, применяемые в слабоформализованных областях, к каковым можно отнести проблемные ситуации, возникающие у акторов в жизненном мире. В качестве основы для принятия решений в таких ситуациях самарским ученым В.А. Виттихом была предложена новая теория интерсубъективного управления [1]. Основные элементы интерсубъективного управления описаны в трудах В.А. Витиха, С.В. Смирнова, Т.В. Моисеевой, Ю.В. Мятишкина, Н.Ю. Поляевой и других [2-10].

Разрабатываемая и дополняемая сегодня теория пока не имеет четких рамок и границ, поэтому предлагается начать формализацию нового научного поля со структурирования терминосистемы теории интерсубъективного управления.

2. Структурирование терминосистемы теории интерсубъективного управления

Интерсубъективный подход к управлению относится к новым и малоизученным, отличаясь от традиционных общепринятых подходов к управлению тем, что в его центре находится личность актора и проблемные ситуации, которые возникают у него в повседневности (а не личность менеджера с проблемными ситуациями, которые он вынужден разрешать в рамках своего производственного функционала). Акторы являются главными действующими лицами теории, они самостоятельно ее постигают и разрабатывают в режиме реального времени (индивидуально для каждой отдельной проблемной ситуации). Данный процесс невозможен без взаимодействия акторов, и интуитивно они ощущают необходимость в коммуницировании. В результате возникают неформальные самоорганизованные сообщества – разные для разных проблемных ситуаций. Каждый участник группы стремится к разрешению ситуации и готов приложить максимум усилий и вложить ресурсы, которыми он обладает (материальные, финансовые, физические и др.) в разрешение проблемы. Акторы, осознающие себя в проблемной ситуации, стремятся урегулировать ее, соблюдая достигнутые в ходе коммуникаций договорённости и не прибегая ни к каким насильственным методам (в том числе, к давлению или принуждению).

Сходимость процесса ведения переговоров акторами к принятию общего решения тем выше, чем лучше акторы понимают друг друга. Поэтому одна из задач, которую они решают в ходе коммуникаций – это формирование единого смыслового пространства по данной проблемной ситуации. Методология принятия решений на базе интерсубъективного подхода также должна интерпретироваться акторами в едином ключе. В связи с этим представляется важным

сформировать терминосистему интерсубъективного управления и предложить ее акторам для применения.

Основные этапы разработки понятийно-терминологического аппарата теории интерсубъективного управления представлены на рис. 1.

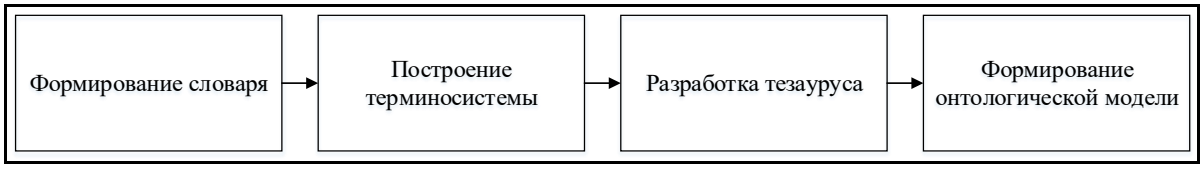


Рис. 1. Взаимодействие основных этапов разработки понятийно-терминологического аппарата теории интерсубъективного управления

Первым этапом разработки понятийно-терминологического аппарата теории интерсубъективного управления является разработка словарной базы, которая включает в себя основные термины теории и их пояснения (определения). После того как описаны все основные понятия целесообразно выстроить терминосистему теории, которая представляется упорядоченной терминологией с зафиксированными между терминами, отражающими отношения между называемыми этими терминами, понятиями. На базе терминосистемы разрабатывается тезаурус теории интерсубъективного управления, который является тематическим понятийно-терминологическим словарем, демонстрирующим взаимосвязи понятий (рис. 2).

Рис. 2. Интеллект- карта «Методика составления и анализа тезауруса»

Методика по разработке и анализу тезауруса состоит из семи последовательных этапов: выбор терминов, их объединение и разработка классов концептов, определение предметных областей и подобластей, разработка классификационной структуры, критический анализ, тестирование и ревизия тезауруса [11]. Тезаурус состоит из набора ментифактов:

- термины и понятия;
- концепты;
- образы, представления, прецедентные феномены;
- фразы, суждения, умозаключения.

В дальнейшем на основании данных тезауруса формулируется и разрабатывается онтологическая модель теории интерсубъективного управления. Модель представляет собой формализованное описание объектов, их свойств и связей (взаимодействия, отношения между объектами).

Методика разработки и анализа терминологической структуры теории интерсубъективного управления на базе методики [11] в общем виде представлена на рис. 3.

Рис. 3. Интеллект- карта «Методика разработки и анализа терминологической структуры теории интерсубъективного управления»

На первоначальном этапе были выделены совокупности основных терминов интерсубъективного управления, а затем проанализированы сети описаний и определений теории. Завершающим этапом стало представление результатов анализа, который заключается в создании гипертекстового «словаря» и визуализации сетей описаний и определений.

Основные термины теории, на базе которых строился весь понятийный аппарат [12], представлены на рис. 4.

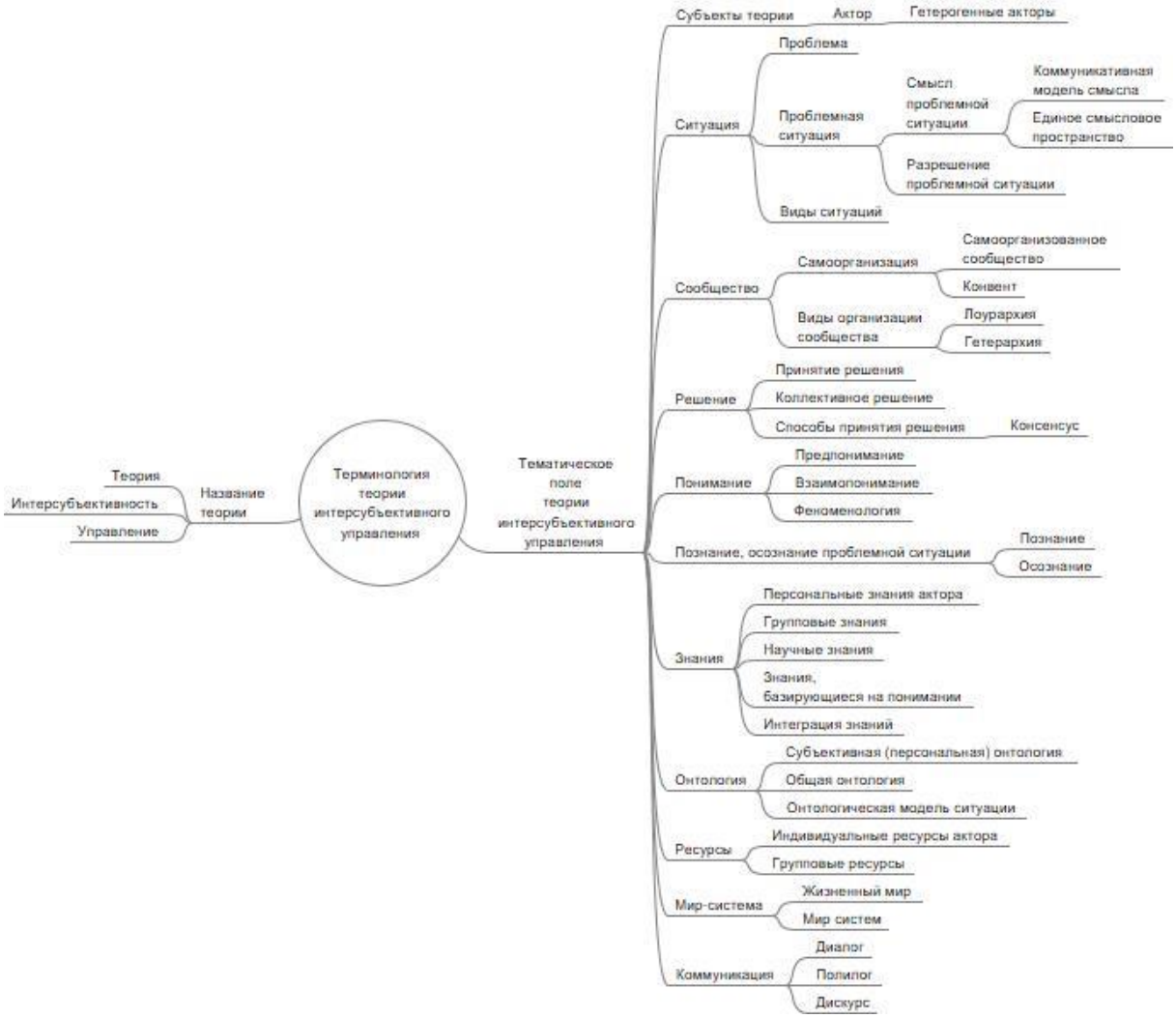


Рис. 4. Интеллект- карта «Основные термины теории интерсубъективного управления»

3. Заключение

Начало формированию терминосистемы положено. В дальнейшем будет построена онтологическая модель теории интерсубъективного управления, отражающая смысл данной предметной области. Это очень важный шаг в развитии нового подхода к управлению, который поможет говорить на одном языке и понимать друг друга и акторам, объединенным проблемныой ситуацией, и исследователям.

Литература

1. Vittikh V.A. Introduction to the theory of intersubjective management // Group Decision and Negotiation. 2015. Issue 1, Vol. 24. P. 67-95.
2. Vittikh V.A. Evergetics: science of intersubjective management processes in everyday life // Int. J. Management Concepts and Philosophy. 2016. Issue 2, Vol. 9. P. 63-72.
3. Vittikh V.A. Heterogeneous Actor and Everyday Life as Key Concepts of Evergetics // Group Decision and Negotiation. 2015. Issue 6, Vol. 24. P. 949-956.
4. Смирнов С.В. Формальный поход к представлению смысла проблемной ситуации в процессах коллективного принятия решений // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления. (16-19 июня 2014 г., Москва, Россия). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 6261-6270.

5. Моисеева Т.В., Поляева Н.Ю. Моделирование проблемной ситуации в теории интерсубъективного управления // Вестник Дагестанского технического университета. Технические науки. 2018. №45(1). С. 160-171.
6. Мятишкин Ю.В. Средства достижения консенсуса в широких группах людей, объединенных общей проблемной ситуацией // В сборнике: Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды XIX Международной конференции. Под редакцией Е.А. Федосова, Н.А. Кузнецова, В.А. Виттиха. 2017. С. 338-345.
7. Моисеева Т.В., Виттих В.А., Смирнов С.В. Социогуманитарные и коммуникационные проблемы интерсубъективного управления инновационными процессами // Коллективная монография. Проблемы социогуманитарного обеспечения инновационных процессов на евразийском пространстве. Под ред. В.Е.Лепского. М.: «Когито-Центр», 2014. С. 214-224.
8. Моисеева Т.В. Инновационное развитие вуза. Интерсубъективное управление обучением в техническом вузе // Инфокоммуникационные технологии. 2016. Том 14, №3. С. 328-336.
9. Moiseeva T.V. Generation of Innovative Ideas: Intersubjective Approach // In: Denis B. Solovev, Viktor V. Savaley, Alexander T. Bekker, Valery I. Petukhov (eds) Proceeding of the International Science and Technology Conference "FarEastCon 2019". P. 267-273.
10. Moiseeva T.V. Intersubjective Management: Model of the Problem Situation // In: S.A. Nikitov, D.E. Bykov, S.Yu. Borovik, Yu.E. Pleshivtseva (eds) PROCEEDINGS 2019 XXI International Conference "Complex Systems: Control and Modeling Problems" (CSCMP), IEEE Xplore. P. 765 – 768.
11. Губанов Д.А., Макаренко А.В., Новиков Д.А. Методы анализа терминологической структуры предметной области (на примере методологии) // Управление большими системами. 2013. Вып. 43. С.5-33.
12. Моисеева Т.В. Формирование понятийно-терминологического аппарата теории интерсубъективного управления // Онтология проектирования. 2020. Т. 10, №3(37). С.351-360.

О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСАХ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, БЛИЗКИХ К ДВУМЕРНЫМ ГАМИЛЬТОНОВЫМ[1*]

К.Е. Морозов, А.Д. Морозов

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

В работе изучается поведение решений системы, близкой к двумерной гамильтоновой, при квазипериодическом по времени возмущении. Исследование проводится в окрестностях резонансных фазовых траекторий невозмущенной системы, близких к вырожденным. Находятся условия существования резонансных квазипериодических решений и изучаются бифуркации в резонансной зоне. Результаты иллюстрируются на примере асимметричного уравнения Дуффинга при двухчастотном возмущении.

Ключевые слова: квазипериодическое возмущение, вырожденный резонанс, немонотонное вращение, уравнение Дуффинга.

1. Введение

Среди неавтономных возмущений двумерных гамильтоновых систем наиболее изученным является случай периодических по времени возмущений. Существует множество работ, посвященных изучению конкретных уравнений и отдельных вопросов, касающихся поведения решений (например, хаотической динамики) в квазипериодическом случае [1,2]. Также недавно появились работы, в которых исследован общий случай малых неконсервативных квазипериодических возмущений [3-5]. В этих работах поведение решений изучается в области, заполненной замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы, также предполагается, что собственная частота является монотонной функцией энергии в этой области. Это приводит к тому, что в системе могут возникать лишь невырожденные резонансы. В данной работе предположим, что собственная частота невозмущенной системы имеет экстремальную точку и изучим поведение решений в окрестности резонансных уровней энергии (резонансных фазовых траекторий), близких к вырожденным конечного порядка вырождения.

Итак, рассматривается система

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \omega_1 t, \dots, \omega_m t),$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \omega_1 t, \dots, \omega_m t)$$

где ε – малый положительный параметр, все функции, входящие в правые части системы, дважды непрерывно-дифференцируемы по фазовым переменным x, y, а функции g, f непрерывны по t равномерно относительно x, y и 2π- периодичны по последним m аргументам, кроме того, частоты $\omega_1, \dots, \omega_m$ предполагаются несоизмеримыми. В этом случае говорят, что функции g, f зависят от t квазипериодическим образом.

Пусть в фазовом пространстве невозмущенной ($\varepsilon = 0$) системы существует кольцевая область D, заполненная замкнутыми фазовыми траекториями и отделенная от состояний равновесия и сепаратрис седел. В этой области от исходных переменных x, y перейдем к переменным действие I-угол θ и рассмотрим систему в расширенном $m + 2$-мерном фазовом пространстве, вводя дополнительные угловые переменные $\theta_1 = \omega_1 t, \ \dots \ , \theta_m = \omega_m t$.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки (проектная часть госзадания, № 0729-2020-0036), Российского фонда фундаментальных исследований (№ 20-31-90039).

2. Вырожденные резонансы

Определение 1. Предположим, что при $I = I_0$ выполнено условие $\omega^{(k)}(I_0) = 0$, *k=1,…,j-1*, $\omega^{(j)}(I_0) \neq 0, j > 1$. Тогда будем говорить, что значение действия $I = I_0$ соответствует вырожденной фазовой кривой с порядком вырождения *j*.

Определение 2. Замкнутую фазовую кривую невозмущенного уравнения, соответствующую значению действия $I = I_{n\boldsymbol{k}}$ называют резонансной, если выполнено соотношение $n\omega(I_{n\boldsymbol{k}}) = (\boldsymbol{k}, \Omega)$, $\boldsymbol{k}=(k_1, \ldots, k_m)$, $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$, числа $n, k_1, \ldots, k_m$ – целые.

В случае немонотонной собственной частоты, одному набору целых $n, k_1, \ldots, k_m$ может соответствовать несколько резонансных уровней энергии. Если резонансный уровень соответствует стационарной точке собственной частоты, то говорят о вырожденном резонансе. Усредненная система на цилиндре в окрестности такой резонансной замкнутой кривой имеет вид

$$\dot{u} = \varepsilon^{1-s} A(v, I_0) + \varepsilon P(v, I_0) u,$$
$$\dot{v} = \varepsilon^{1-s} b_j u^j + \varepsilon(b_{j+1} u^{j+1} + Q(v, I_0))$$

где $A(v, I_0)$, $P(v, I_0)$, $Q(v, I_0)$ являются $\frac{2\pi}{n}$ –периодическими функциями v, $s = \frac{1}{1+j}$, $b_j \neq 0$. Эта система имеет лишь сложные состояния равновесия и теорема Боголюбова о соответствии решений усредненной и исходной систем не применима. В связи с этим введем в систему расстройку γ, определяющую отклонение резонансного уровня от вырожденного $I_{n\boldsymbol{k}} = I_0 + \varepsilon^s \gamma$ и изучим бифуркации в резонансной зоне при изменении параметра γ. Пусть для определенности $j = 2$. В окрестности резонанса имеем следующую усредненную систему (с точностью до членов более высокого порядка по ε)

$$\dot{u} = \varepsilon^{2/3} A(v, I_0) + \varepsilon P(v, I_0)(u + \gamma),$$
$$\dot{v} = \varepsilon^{2/3} d_2(u^2 + 2\gamma u) + \varepsilon(d_3(u^3 + 3u^2\gamma + 3\gamma^2 u) + Q(v, I_0)).$$

Представим $A(v, I_0)$ в виде $A(v, I_0) = B(I_0) + \tilde{A}(v, I_0)$. На рисунках 1, 2 показаны перестройки фазовых портретов этой системы в случаях $B(I_0) = 0$ и $B(I_0) \neq 0$. Когда $\gamma \neq 0$, состояниям равновесия (устойчивым и седловым) соответствуют резонансные квазипериодические решения (устойчивые и седловые) [3]. Результаты доклада иллюстрируются на примере возмущенного асимметричного уравнения Дуффинга $\ddot{x} + x + \alpha x^2 + x^3 = \varepsilon(\beta \sin t \sin\sqrt{5}t + \delta\dot{x})$, где $\alpha \in (0; 2), \beta, \delta > 0$ – параметры, $0 < \varepsilon \ll 1$.

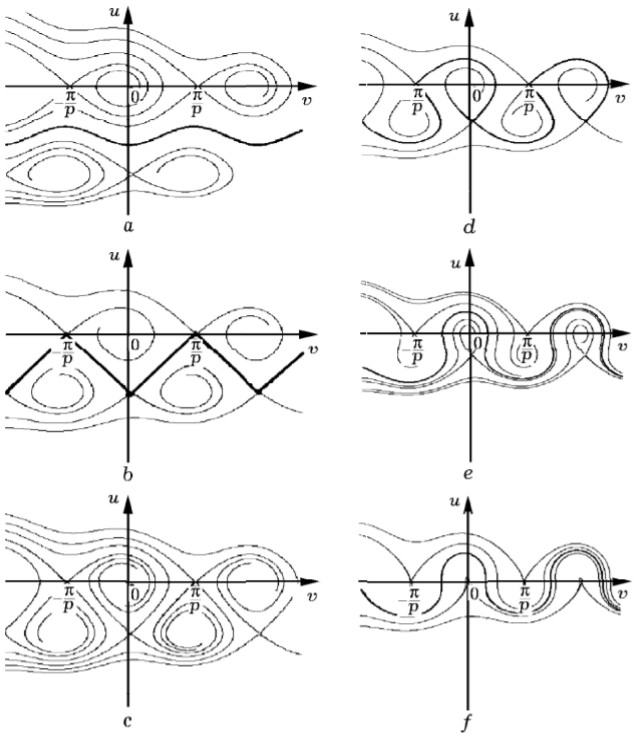


Рис.1. $B(I_0) = 0$

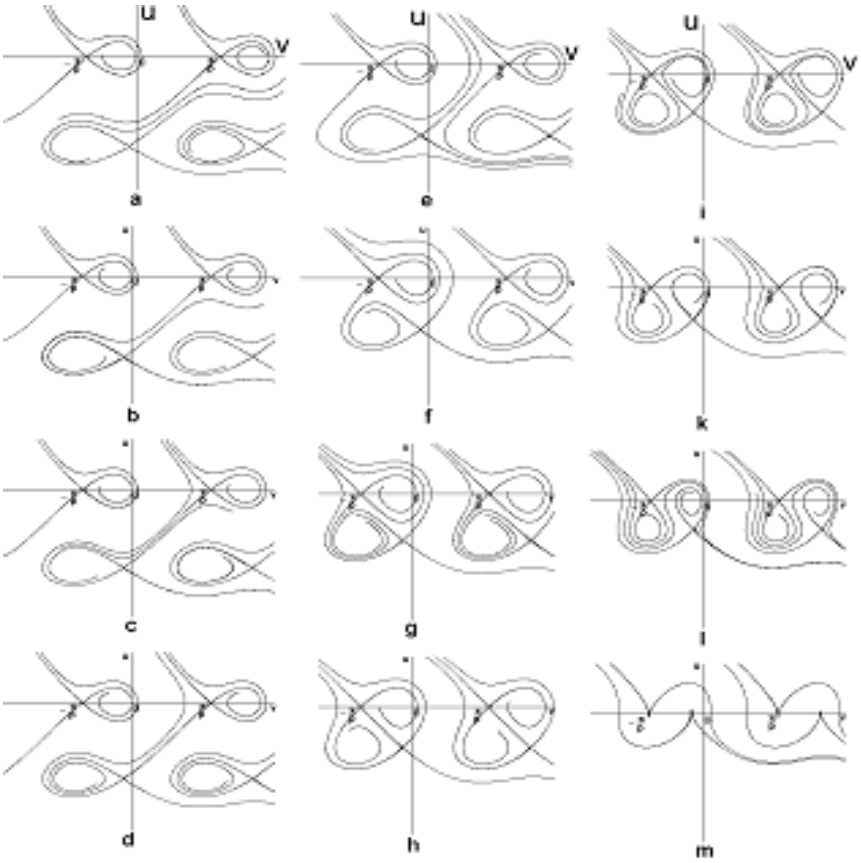


Рис.2. $B(I_0) \neq 0$

Литература

1. Berger M.S., Chen Y.Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equation //Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applicalions, 1992, vol. 19, no. 3, pp. 249-257.
2. Zhujun Jing, Jicai Huang, Jin Deng Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings, // Chaos, Solitons and Fractals, 2007, vol.33, no.3, pp. 795- 812.
3. Morozov A.D., Morozov K.E. Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems// Differential Equations, 2017, vol. 53, no. 12, pp. 1607-1615.
4. Morozov A.D., Morozov K.E. On Synchronization of Quasiperiodic Oscillations// Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2018, vol. 14, no. 3, pp. 367-376.
5. Morozov A.D., Morozov K.E. Global Dynamics of Systems Close to Hamiltonian Ones Under Nonconservative Quasi-periodic Perturbations//Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2019, vol. 15, no. 2, pp. 187-198.

АДАПТИВНАЯ МАРШРУТИЗАЦИЯ В ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ СЕТИ АНГАРА ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ

А.В. Мукосей[1], А.А. Третьяков[1,2], А.С. Семенов[1], Д.В. Макагон[1]

[1]АО «НИЦЭВТ»,

[2]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В работе описывается детерминированная и адаптивная маршрутизация в высокоскоростной сети Ангара второго поколения, демонстрируется преимущество адаптивной маршрутизации над детерминированной на вычислительном кластере с макетными сетевыми адаптерами на базе ПЛИС.

Ключевые слова: адаптивная маршрутизация, коммуникационная сеть, Ангара.

В АО «НИЦЭВТ» разработана высокоскоростная коммуникационная сеть Ангара первого поколения (Ангара-1) [1]. Маршрутизатор на базе СБИС обеспечивает поддержку топологии 4D-тор. В настоящее время в различных организациях установлено и функционируют шесть высокопроизводительных вычислительных систем на базе сети Ангара-1, две из которых – в ОИВТ РАН [2].

В настоящее время разрабатывается СБИС маршрутизатора высокоскоростной сети Ангара второго поколения (Ангара-2), которая поддерживает топологию 6D-тор, пропускная способность линка составит 200 Гбит/с. В сети Ангара-2 введено ряд усовершенствований архитектуры по сравнению с Ангара-1, в том числе введены новые методы детерминированной и адаптивной маршрутизации.

Цель данной работы – представление и демонстрация работоспособности адаптивной маршрутизации сети Ангара второго поколения, постановка задачи для дальнейших исследований.

Алгоритмы маршрутизации можно разделить на детерминированные и адаптивные. В детерминированной маршрутизации путь между двумя заданными узлами всегда один и тот же. Адаптивная маршрутизация учитывает состояние сети и позволяет обходить узкие места, однако может приводить к дедлокам.

В сети Ангара-2 в качестве алгоритма детерминированной маршрутизации разработан алгоритм delta routing, который реализует правило порядка направлений (в одном измерении тора два направления) для обеспечения отсутствия дедлоков между измерениями тора. В алгоритме delta routing в заголовке сетевого пакета для каждого направления тора хранится количество шагов, которое необходимо совершить по данному направлению. Детерминированная маршрутизация применяется к сетевым пакетам, передаваемым по трем независимым подсетям, которые образуют виртуальные каналы VCD0, VCD1, VCD2.

В сети Ангара-1 при движении пакета с использованием адаптивной маршрутизации в случае возникновения каких-либо проблем, например, слишком долгого ожидания пакетом соединения, происходил переход пакета в детерминированную подсеть, причем обратно к использованию адаптивной маршрутизации перейти было нельзя. В сети Ангара-2 введена зональная адаптивная маршрутизация, которая позволяет задать, в каких направлениях тора пакет может передаваться с использованием адаптивного алгоритма, а в каких – с использованием детерминированного. Адаптивная маршрутизация применяется к пакетам, передаваемым по виртуальным каналам VCA и VCD0 при условии выставленного бита ADAPT в заголовочном флите пакета.

В каждом маршрутизаторе хранится таблица адаптивных зон, которую можно задавать при старте задачи. Выбор нужной зоны осуществляется путем выставления в пакете соответствующего бита AZONE. Каждая строка таблицы состоит из маски направлений, для которых разрешена или запрещена адаптивная маршрутизация.

При выставленном бите ADAPT и соответствующей адаптивной зоны маршрут пакета будет следующим:

- для направлений, для которых в маске запрещено движение адаптивно, движение осуществляется согласно детерминированной маршрутизации,
- для направлений, для которых подряд относительно порядка направлений разрешено движение адаптивно, будет выбрано наименее загруженное направление (наравне рассматриваются виртуальные каналы VCD0 и VCA) из всех подходящих, для которых имеются ненулевые шаги.

Отработка заложенных архитектурных решений сети Ангара-2 осуществляется на 12-узловом кластере с макетными образцами сетевых адаптеров на базе ПЛИС Virtex7 vx690tffg, в составе каждого вычислительного узла 2 процессора Intel Xeon CPU E5-2630 v3 2.40 ГГц, 32 ГБ памяти. Макетные образцы выполнены в форм-факторе полноформатной платы расширения PCI Express с 8 портами. Из-за технических ограничений ПЛИС в качестве интерфейса с процессором использовался PCI Express 2.0 x8, но таких интерфейса 2, инжекция пакетов осуществляется через 4 независимых инжекционных конвейера в каждом интерфейсе. Частота сетевого адаптера в макете – 167 МГц. Узлы объединены в топологию двумерная решетка.

Для демонстрации работоспособности адаптивной маршрутизации используется тест GUPS, который равномерно-случайно рассылает пакеты от каждого узла каждому. На рис. 1 представлено сравнение времени работы теста в зависимости от размера сообщения в байтах с использованием адаптивной маршрутизации и без ее использования для четырех узлов макета, количество посылок от каждого узла – 50 млн. Сравнение показывает незначительный выигрыш при использовании адаптивной маршрутизации. Выигрыш показывает, что адаптивная передача позволяет оптимальнее использовать каналы связи, используя информацию о нагрузке. Необходимо заметить, что узлы в настоящий момент объединены по топологии двумерная решетка, то есть отсутствуют кольца тора, которые добавляют возможность выбора свободных каналов связи.

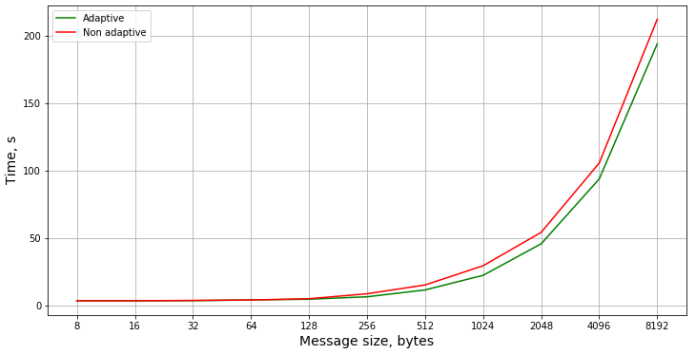


Рис. 1. Время работы теста GUPS при использовании адаптивной и детерминированной маршрутизации

Продемонстрированный в данной работе выигрыш в производительности в сети Ангара-2 при использовании адаптивной маршрутизации по сравнению с детерминированной позволяет ставить задачи дальнейших работ по исследованию адаптивной маршрутизации: исследование с использованием большего количества узлов кластера и торовых топологий, которые увеличивают вариативность путей; анализ загруженности виртуальных каналов и возможностей управления адаптивной маршрутизацией; рассмотрение различных паттернов сетевого трафика; исследование потенциала адаптивных зон.

Литература

1. Симонов А.С., Макагон Д.В., Жабин И.А., Щербак А.Н., Сыромятников Е.Л., Поляков Д.А. Первое поколение высокоскоростной коммуникационной сети Ангара // Наукоемкие технологии. 2014. №1, Т. 15. С. 21–28.
2. Stegailov V. et al. Angara interconnect makes GPU-based Desmos supercomputer an efficient tool for molecular dynamics calculations // The International Journal of High Performance Computing Applications. 2019. Vol 3, No 33, P. 507–521. DOI: 10.1177/1094342019826667.

СИНХРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В АНСАМБЛЯХ ГЛОБАЛЬНО СВЯЗАННЫХ ФАЗОВЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ИНЕРЦИЕЙ И ШУМОМ[1*]

В.О. Муняев[1], Л.А. Смирнов[1,2], В.А. Костин[1,2], Г.В. Осипов[1], А.С. Пиковский[3,1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
[2]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия,
[3]Institute for Physics and Astronomy, University of Potsdam, Potsdam-Golm, Germany

Изучается процесс синхронизации в ансамблях глобально связанных ротаторов с шумом. Разработан аналитический подход, описывающий синхронные состояния с постоянным параметром порядка для случая ротаторов с малой инерцией. Подход предоставляет аналитический критерий, позволяющий различать суперкритический и субкритический переход к синхронизации. Все полученные аналитические результаты подтверждаются численным моделированием.

Ключевые слова: связанные ротаторы, синхронизация, гистерезис, модель Курамото, системы с шумом.

1. Введение

Важным обобщением модели Курамото является ансамбль глобально связанных ротаторов. Это особенно актуально для моделирования электросетей [1]. Особенности синхронизации глобально связанных ротаторов, как детерминированных, так и при наличии шума, были широко изучены; в частности, в работах [2,3] был разработан подход, аналогичный аналитическому описанию [4]. Однако на данный момент стационарные распределения для связанных ротаторов с шумом найдены только численно. Так же, отсутствует аналитика, описывающая параметр порядка как функцию параметров модели Курамото с шумом.

2. Связанные ротаторы с шумом

Система представляет собой ансамбль N глобально связанных ротаторов, характеризующихся своими фазами φ_n и мгновенными скоростями $\dot{\varphi}_n$ $(n = 1,2,\dots,N)$. Ротаторы связаны через комплексное среднее поле и подчиняются уравнениям движения

$$R \equiv re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i\varphi_n}, \qquad \mu\ddot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_n = \omega_n + \varepsilon r\sin(\psi - \varphi_n) + \sigma\xi_n(t). \tag{1}$$

Параметр μ представляет собой массу ротаторов. Параметр ε определяет силу связи между элементами ансамбля. Параметры ω_n описывают вращательные моменты, действующие на ротаторы; предполагается, что их распределение задается плотностью $g(\omega)$. На ротаторы действуют независимые источники белого гауссовского шума $\sigma\xi_n(t)$ с равными амплитудами σ, нулевым средним $\langle\xi_n(t)\rangle = 0$, и автокорреляторами $\langle\xi_n(t_1)\xi_{n'}(t_2)\rangle = 2\delta_{nn'}\delta(t_1 - t_2)$.

3. Стационарное распределение фаз в пределе малой массы

Для решения уравнений (1) в термодинамическом пределе ($N \to \infty$) применялся метод непрерывных матричных дробей. Основным результатом является замкнутая аналитическая формула для параметра порядка подгруппы $a_{0,1}(\nu, A)$, вычисленная до первого порядка по параметру инерции μ для случая распределений $g(\omega)$, симметричных относительно некоторой частоты ω_0,

[1*] Работа поддержана грантами РНФ № 17-12-01534, РНФ № 19-12-00367, РФФИ № 19-52-12053.

$$a_{0,1}(\nu, A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{I_{1+i\nu/\sigma^2}(A/\sigma^2)}{I_{i\nu/\sigma^2}(A/\sigma^2)} \left(1 - \mu \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\sin(i\pi\nu/\sigma^2)}{I_{-i\nu/\sigma^2}(A/\sigma^2) I_{i\nu/\sigma^2}(A/\sigma^2)}\right) + o(\mu). \quad 2)$$

Общее параметрическое представление параметра порядка как функции константы силы связи имеет вид,

$$r = \sqrt{2\pi} \int d\nu g(\omega_0 + \nu) a^*_{0,1}(\nu, A), \qquad \varepsilon = A/r. \quad 3)$$

Нетривиальная ветвь решения $r(\varepsilon)$ начинается при $\varepsilon_c^{(1)} = 1/C_0$, где

$$C_0 = \frac{1}{2} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{1+y^2} (1 - \mu\sigma^2 y^2). \quad 4)$$

Характер перехода к синхронности зависит от знака коэффициента C_1,

$$C_1 = -\frac{1}{8\sigma^4} \int dy \frac{g(\omega_0 + \sigma^2 y)}{(1+y^2)^2(4+y^2)} \left(2(1 - 2y^2) - \mu\sigma^2 y^2 (13 + y^2)\right). \quad 5)$$

а. Суперкритический переход происходит при $C_1 < 0$. Здесь наблюдается непрерывный переход (второго рода) с ветвью решения, существующей при $\varepsilon > \varepsilon_c^{(1)}$,

$$r = C_0^2 \sqrt{\left(\varepsilon_c^{(1)} - \varepsilon\right)/C_1}. \quad 6)$$

б. Субкритический переход происходит при $C_1 > 0$. Здесь ветвь решения существует при $\varepsilon < \varepsilon_c^{(1)}$.

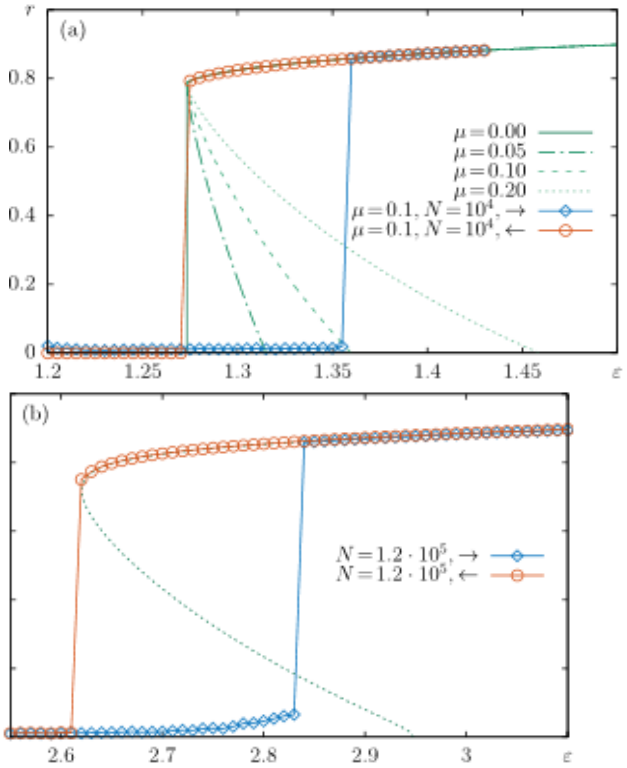


Рис. 1. (a) Кривые: ветви стационарных решений $\boldsymbol{r(\varepsilon)}$ для различных $\boldsymbol{\mu}$ в бесшумовом случае, полученные аналитически из (2) и (3) для прямоугольного распределения $\boldsymbol{g(\omega)}$ шириной $\boldsymbol{\gamma = 1}$. Связанные маркеры: ветви, полученные в результате прямого численного моделирования ансамбля $\boldsymbol{N = 10000}$ ротаторов при $\boldsymbol{\mu = 0.1}$ в условиях, когда параметр связи $\boldsymbol{\varepsilon}$ постепенно увеличивается (метка '→', маркеры ромба и квадрата) или уменьшается (метка '←' круглые и треугольные маркеры). На фрагменте (b) представлены результаты аналогичных численных расчетов для ротаторов с массами $\boldsymbol{\mu = 0.1}$, амплитудой шума $\boldsymbol{\sigma = 0.2}$ и шириной распределения $\boldsymbol{\gamma = 2}$. Сравнение с теоретическими предсказаниями (пунктирные линии) показывает особенно сильное влияние флуктуаций конечного размера на скачкообразный переход «асинхронность → синхронность”; обратный переход близок к точке, предсказанной теорией, даже для не слишком больших популяций

Литература

1. Grzybowski J.M.V., Macau E.E.N., Yoneyama T. On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators // Chaos. 2016. Vol. 26. P. 113113.
2. Komarov M., Gupta S., Pikovsky A. Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results // EPL. 2014. Vol. 106. P. 40003.
3. Gupta S., Campa A., Ruffo S. Kuramoto model of synchronization: equilibrium and nonequilibrium aspects // J. Stat. Mech.: Theory Exp. 2014. Vol. 8. P. R08001.
4. Omel'chenko O.E., Wolfrum M. Nonuniversal transitions to synchrony in the Sakaguchi–Kuramoto model // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 109. P. 164101.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ РОТОРА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА С ПОМОЩЬЮ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ TAKAGI-SUGENO

А.В. Мухин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Представлены результаты решения задачи построения регуляторов по измеряемому выходу для ротора в электромагнитном подвесе на основе применения нечетких моделей Takagi-Sugeno. Рассмотрены два подхода: построение стабилизирующего регулятора и построение регулятора по квадратичному критерию качества. Для вычисления параметров регуляторов использовался аппарат линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, магнитная левитация, нелинейный объект, ротор, стабилизация, нечеткие модели Takagi-Sugeno, линейные матричные неравенства.

1. Введение

Принцип действия электромагнитного подвеса основан на явлении магнитной левитации, благодаря которой осуществляется бесконтактное вывешивание ротора в системе магнитных подшипников. Практическое применение последних охватывает целый спектр самых разных областей промышленности и техники, а также некоторых областей медицины [1-4].

Вследствие привлекательности электромагнитных подшипников для решения целого ряда задач, управление ротором в электромагнитном подвесе представляет важную и актуальную задачу. Реализация управления осуществляется, как правило, путем изменения величины магнитного поля, создаваемого электромагнитом при подаче на его обмотки переменного напряжения. Решению задачи управления посвящено немалое количество работ, например, [5-9]. В большинстве из этих работ рассматриваются линеаризованные системы, очевидным недостатком которых является их ограниченная применимость.

В настоящей статье представлены результаты синтеза законов управления для системы электромагнитного подвеса на основе применения непрерывных нечетких моделей Takagi-Sugeno [10]. Рассматривались задачи синтеза по измеряемому выходу в предположении, что измеряемой переменной является вертикальное смещение ротора. В качестве метода построения законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11, 12].

2. Нечеткая математическая модель

Ротор в электромагнитном подвесе находится в поле действия двух сил: силы тяжести и силы магнитного притяжения [5]. Согласно второму закону Ньютона при равенстве этих сил тело будет находиться в неподвижном состоянии. Динамика ротора в подвесе описывается следующей системой уравнений [5]

$$\begin{gathered} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x_3)^2}{(1-x_1)^2} - 1\right], \\ \dot{x_3} = -\frac{(1+x_3)}{(1-x_1)}x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u \end{gathered} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^{n_x}$ – вектор состояния системы; $u \in R^{n_u}$ – управление; a – постоянная величина ($a = 7{,}5$).

Безразмерная переменная x_1 соответствует вертикальному перемещению ротора, x_2 соответствует скорости перемещения, а x_3 описывает ток в цепи электромагнита. Неустойчивым положением равновесия системы является точка $x = 0$.

Для вывода нечеткой модели Takagi-Sugeno приведем объект (1) к следующему виду

$$\dot{x} = F(\sigma)x + B(\sigma)u,\ x(0) = x_0 \tag{2}$$

где $F(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$; $B(\sigma) \in R^{n_x \times n_u}$; $\sigma = \sigma(x) \in R^{n_\sigma}$.

Элементами матриц $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ должны быть непрерывные функции $\sigma_i(x)$. Для преобразования объекта (1) к виду (2) введем новую фазовую переменную

$$x_4 = \frac{1+x_3}{1-x_1}. \tag{3}$$

Продифференцировав выражение (3), получим следующее линейное уравнение

$$\dot{x_4} = \frac{\dot{x_3}+x_4x_2}{1-x_1} = -ax_3 + u. \tag{4}$$

Таким образом, после такого преобразования система уравнений, описывающих электромагнитный подвес, примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \frac{1}{2}[{x_4}^2 - 1], \\ \dot{x_3} &= -x_4x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u, \\ \dot{x_4} &= -ax_3 + u, \end{aligned} \tag{5}$$

где $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^{n_{x^*}}$ – состояние системы; $u \in R^{n_u}$ – управление.

Переход от (1) к (5) означает отображение вида $R^{n_x} \longmapsto R^{n_{x^*}}$. Существует и обратное отображение вида $R^{n_{x^*}} \longmapsto R^{n_x}$. Теперь приведем систему (5) к виду (2). Матрицы $F(\sigma)$ и $B(\sigma)$ примут вид

$$F(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, B(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

где $\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{x_4})$; $\sigma_2 = ax_3$; $\sigma_3 = -x_4$; $\sigma_4 = a(x_1 - 1)$; $\sigma_5 = -x_2$; $\sigma_6 = 1 - x_1$.

Зададим подмножество $\Omega = \{a_{i1} \le x_i < a_{i2},\ i = \overline{1, n_{x^*}}\}$, в котором будем рассматривать нелинейный объект (5). Для того чтобы обеспечить непрерывность функции σ_1, сделаем следующую замену во втором уравнении системы (5)

$$\dot{x_2} = \frac{1}{2}[{x_4}^2 - 1] = \frac{1}{2}(x_4 - 1)(x_4 + 1) = \frac{1}{2}{x_4}^*({x_4}^* + 2) \tag{7}$$

Тогда опустив звездочку в новой переменной ${x_4}^*$, система примет следующий эквивалентный вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \frac{1}{2}x_4(x_4 + 2), \\ \dot{x_3} &= -(x_4 + 1)x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u, \\ \dot{x_4} &= -ax_3 + u, \end{aligned} \tag{8}$$

Для каждого значения σ_i определим функции принадлежности треугольного вида

$$M_{i1,2} = \frac{\pm\sigma_i \mp \sigma_i^{min,max}}{\sigma_i^{max} - \sigma_i^{min}}, i = \overline{1, n_\sigma} \tag{9}$$

Область значений каждой функции принадлежности образует свое нормированное нечеткое множество. Сформируем базу нечетких правил для исследуемого объекта

$$\begin{aligned} &R^i: IF\ \sigma_1\ is\ M_{11}\ and\ \dots and\ \sigma_{n_\sigma}\ is\ M_{n_\sigma 1}, \\ &THEN\ \dot{x} = A_ix + B_iu, \end{aligned} \tag{10}$$

где R^i – нечеткое правило ($i = \overline{1, r}$), $r = 2^{n_\sigma}$– количество правил;

Нечеткая модель нелинейной системы (8) представляется как взвешенная сумма всех линейных подсистем

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} h_i(\sigma)[A_ix + B_iu] \tag{11}$$

где $h_i(\sigma) = \prod_{j=1}^{n_\sigma} M_{i1,2}^j(\sigma_j)$ – произведение функций принадлежности.

Таким образом, полученная непрерывная нечеткая модель (11) представляет нелинейный объект (8) на рассматриваемом подмножестве $\Omega \in R^{n_{x^*}}$.

Прежде чем переходить к постановке задачи, несколько упростим модель (8). Наибольшее количество нелинейных функций сосредоточено в третьем уравнении системы (8). Линеаризация этого уравнения позволит существенно сократить количество правил и тем самым, упро-

стить весь дельнейший анализ. После линеаризации этого уравнения в окрестности положения равновесия, система (8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= \frac{1}{2}x_4(x_4+2), \\ \dot{x_3} &= -x_2 - ax_3 + u, \\ \dot{x_4} &= -ax_3 + u. \end{aligned} \tag{12}$$

Единственная нелинейная функция σ_1 запишется как

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4+2). \tag{13}$$

Окончательная нечеткая модель нелинейной системы (12) запишется в следующем виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} M_i A_i x + B u. \tag{14}$$

3. Постановка задачи управления

Рассмотрим две задачи управления по измеряемому выходу: первая задача – построение стабилизирующего регулятора, вторая – регулятора с квадратичным критерием качества. В качестве измеряемой переменной будем считать вертикальное перемещение ротора. Соответствующее матричное уравнение измеряемого выхода

$$y = C_2 x, \tag{15}$$

где $y \in R^{n_y}$ – измеряемый выход; $C_2 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

Закон управления линейной системой по измеряемому выходу в форме линейного динамического регулятора имеет следующий вид [11]

$$\begin{aligned} \dot{x_r} &= A_r x_r + B_r y \\ u &= C_r x_r + D_r y \end{aligned} \tag{16}$$

где $x_r \in R^{n_x^*}$ – состояние регулятора.

В случае нечеткой системы исходный объект представляется, собой по существу, в виде совокупности линейных подсистем, каждая из которых характеризуется своими матрицами. По аналогии с (16) введем уравнения динамического регулятора для нечеткой системы (14)

$$\begin{aligned} \dot{x_r} &= \sum_{i=1}^{r} M_i\, A_r^i x_r + \sum_{i=1}^{r} M_i\, B_r^i y, \\ u &= \sum_{i=1}^{r} M_i\, C_r^i x_r + \sum_{i=1}^{r} M_i\, D_r^i y. \end{aligned} \tag{16}$$

Для второй задачи введем в рассмотрение уравнение целевого выхода $z(t) \in R^{n_z}$

$$z = Cx + Du \tag{18}$$

В качестве квадратичного критерия будем рассматривать следующий функционал

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty \left(\sum_{i=2}^{n_x^*} x_i^2 + u^2 \right) dt. \tag{19}$$

Таким образом, требуется вычислить два регулятора по измеряемому выходу: регулятор стабилизирующего типа и регулятор, доставляющий минимум функционалу (19).

4. Синтез законов управления

Комбинация нечеткой системы (14) с нечетким регулятором (17) даст следующую замкнутую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^{r} M_i (A_i + BD_r^i C_2) x + \sum_{i=1}^{r} M_i\, B\, C_r^i x_r \\ \dot{x_r} &= \sum_{i=1}^{r} M_i B_r^i C_2 x + \sum_{i=1}^{r} M_i\, A_r^i x_r \end{aligned} \tag{20}$$

Матрицы замкнутых подсистем запишутся в следующем виде

$$A_c{}^i = \begin{pmatrix} A_i + BD_r^i C_2 & BC_r^i \\ B_r^i C_2 & A_r^i \end{pmatrix} \tag{21}$$

где $A_c{}^i \in R^{2n_x^* \times 2n_x^*}$.

4.1. Синтез стабилизирующих регуляторов

Для того чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы (20) с матрицами (21), необходимо и достаточно найти такую общую матрицу квадратичной функции $X = X^T > 0$, которая удовлетворяет следующим неравенствам

$$\left(A_c{}^i\right)^T X + X A_c{}^i < 0, i = \overline{1,r}. \tag{22}$$

Введем параметры регуляторов Θ_i и представим матрицы замкнутых подсистем в следующем виде

$$A_c{}^i = A_0{}^i + B_0 \Theta_i C_0. \tag{23}$$

Подставим (23) в (22) и запишем полученное соотношение в виде

$$\left(A_0{}^i\right)^T X + X A_0{}^i + C_0^T \Theta_i{}^T B_0^T X + X B_0 \Theta_i C_0 < 0. \tag{24}$$

Далее приведем неравенства (24) к набору матричных неравенств вида [11]

$$\Psi_i + P^T \Theta_i{}^T Q + Q^T \Theta_i P < 0,\ i = \overline{1,r}. \tag{25}$$

В [11] показано, что выполнение неравенств (25) эквивалентно выполнению следующих неравенств

$$\begin{gathered} W_C^T (A_i{}^T X_{11} + X_{11} A_i) W_C < 0,\ X_{11} = X_{11}^T > 0 \\ W_{B^T}^T (Y_{11} A_i{}^T + A_i Y_{11}) W_{B^T} < 0,\ Y_{11} = Y_{11}^T > 0, \end{gathered} \tag{26}$$

где W_C и W_{B^T} образуют базисы ядер матриц C и B^T, соответственно; X_{11} и Y_{11} – верхние левые блоки двух взаимообратных матриц X и Y.

Для того чтобы выполнялось условие $XY = I$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенство

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0 \tag{27}$$

Если матрицы X_{11} и Y_{11}, удовлетворяющие (26) и (27) найдены, то общая матрица квадратичной формы X может быть вычислена по формуле [11]

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11} - Y_{11}{}^{-1} \\ X_{11} - Y_{11}{}^{-1} & X_{11} - Y_{11}{}^{-1} \end{pmatrix} \tag{28}$$

После того, как матрица X найдена, матрицы параметров регуляторов Θ_i вычисляются из неравенств (25) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

4.2. Синтез регуляторов с квадратичным критерием качества

Задача управления по квадратичному критерию качества состоит в вычислении такого регулятора, который обеспечивает выполнение условия

$$\|z\|^2 < \gamma^2 |x_0|^2 \quad \forall x_0 \neq 0 \tag{29}$$

Для этого необходимо, чтобы существовали две положительно определенные симметрические матрицы X_{11} и Y_{11}, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам [11]

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i{}^T X_{11} + X_{11} A_i & C^T \\ C & -\gamma I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{C_2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \\ N^T \begin{pmatrix} Y_{11} A_i{}^T + A_i{}^T Y_{11} & Y_{11} C^T \\ C Y_{11} & -\gamma I \end{pmatrix} N < 0, \\ \begin{pmatrix} Y_{11} & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0, \end{gathered} \tag{30}$$

где $i = \overline{1,r}$.

Параметры регуляторов Θ_i для замкнутых подсистем вычисляются из (25) и затем подставляются в нечеткий динамический регулятор (17).

5. Численные результаты

Вычисленные регуляторы поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект (1), замкнутый нечетким регулятором (17). Графики переходных процессов в системе с регулятором стабилизирующего типа представлены на рисунке 1.

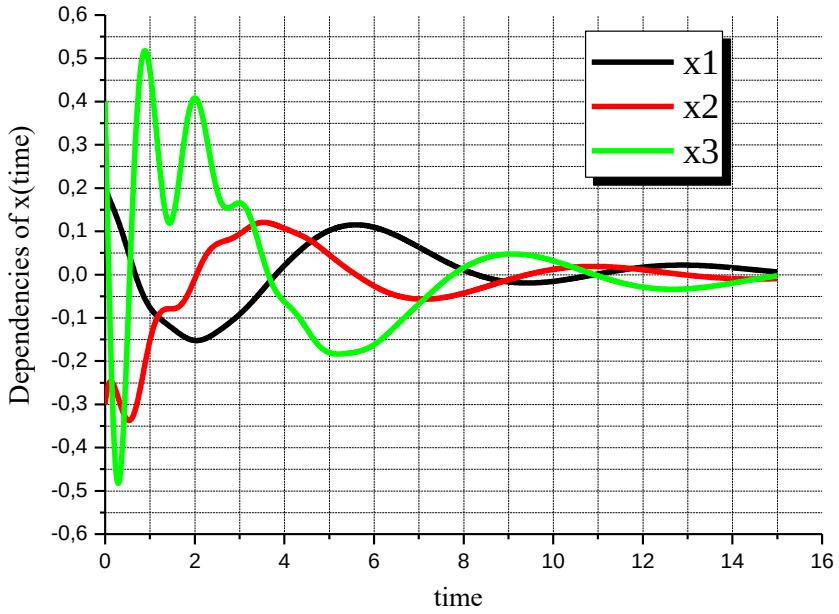


Рис. 1. Переходные процессы в замкнутой системе с регулятором стабилизирующего типа

Графики переходных процессов в системе с регулятором по квадратичному критерию качества показаны на рисунке 2.

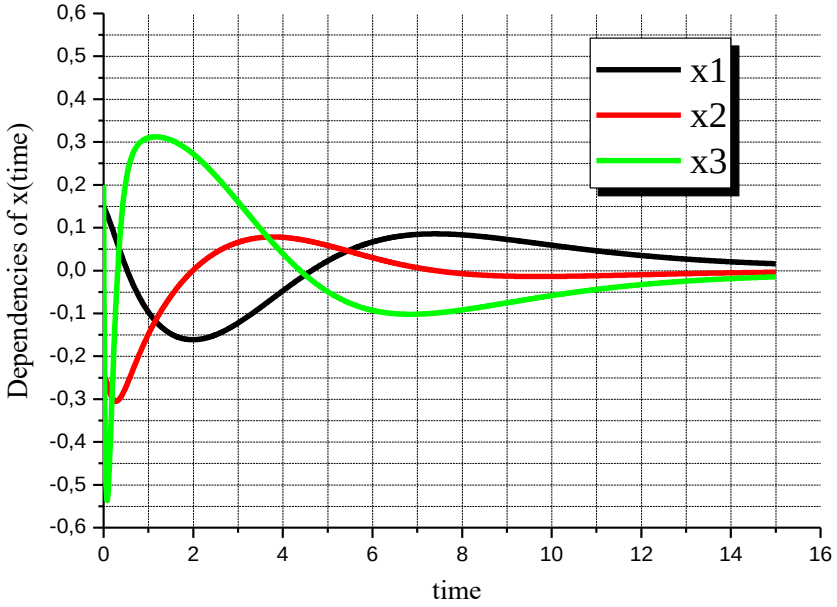


Рис. 2. Переходные процессы в замкнутой системе с регулятором по квадратичному критерию

Представленные выше зависимости свидетельствуют о том, что найденные нечеткие регуляторы стабилизируют исходный нелинейный объект в достаточно большом диапазоне начальных отклонений, несмотря на то, что вычисления выполнялись для упрощенной системы. Таким образом, введенное упрощение модели объекта позволило существенно упростить вычисления регуляторов, без заметного снижения качества стабилизации. Исходя из сравнительного

анализа графиков переходных процессов, можно заключить, что регулятор с квадратичным критерием качества обеспечивает лучшее качество переходных процессов.

6. Заключение

В статье представлены результаты численных расчетов нечеткого динамического регулятора по выходу для системы электромагнитного подвеса. Выведена нечеткая модель объекта и управления, представляющая собой набор динамических регуляторов для каждой из подсистем объекта. Результаты показали, что измеряя только перемещение ротора, можно построить как стабилизирующий регулятор, так и регулятор по квадратичному критерию качества. Найденные регуляторы стабилизируют исходный нелинейный объект вплоть до максимально возможных начальных отклонений. Таким образом, представленные модели, в отличие от линейных моделей, позволяют в полной мере описывать динамику исследуемого нелинейного объекта.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Д. В. Баландина за консультацию, а также за ценные и полезные замечания.

Литература

1 Zhuravlev Yu.N. Active Magnetic Bearings. Theory, Calculation, Application. SPb.: Politechnica, 2003.
2 Schweitzer G., and Maslen E. Magnetic Bearings.Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer, 2009.
3 Гринвальд В.М., Кузьмин Г.С., Маслобоев Ю.П., Селищев С.В., Телышев Д.В. Первый отечественный аппарат вспомогательного кровообращения АВК-Н "СПУТНИК" на основе имплантируемого насоса крови // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2015. Т. 20, № 5. С. 516–521.
4 Masuzawa T., Osa M., Mapley M. Ch. 11: Motor design and impeller suspension // Mechanical Circulatory and Respiratory Support. Elsevier, 2017. P. 335–377.
5 Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М., Федюков А.А. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 3. С. 12–24.
6 Gruber W., Pichler M., Rothbock M., Amrhein W. Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation // Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology. Wellington, New Zealand, 2013. P. 591–595.
7 Gluck T., Kemmetmuller W., Tump C., Kugi A. Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems // Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems. Boston, USA, 2010. P. 32–37.
8 Kumar V., Jerome J. LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System // Procedia Engineering. 2013. V. 64. P. 254–264.
9 Yang Yifei, Zhu Huangqiu. Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation // J. Networks. 2013. V. 8. P. 1624–1631.
10 Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 1985. – Vol.15. – № 116. – P. 116–132.
11 Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
12 Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User’s Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
13 Tanaka K., Wang H.O. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.

УМНАЯ ЭНЕРГЕТИКА В МОДЕЛИРОВАНИИ УЧЕБНОГО КЛАССА

В.В. Назаров, И.А. Исаев, И.Г. Лебедев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В работе рассматриваются результаты разработки программы моделирования задач интернета вещей, на примере моделирование одного из компьютерных классов университета, с целью уменьшения энергопотребления. Основным элементом данной системы является модуль дискретно-событийного моделирования, позволяющий с некоторым шагом симулировать работу как набора умных вещей, так и «управляющую программу», осуществляющую сбор данных и управление имеющимися объектами.

Ключевые слова: интернет вещей, умная энергетика, дискретно-событийное моделирование, умные вещи.

1. Введение

Интернет вещей (Internet of Things, IoT) – это сеть из физических объектов – «вещей» – оснащённая сенсорами, программным обеспечением и другими технологиями с целью поддержки соединения и обмена данными между другими устройствами и системами, исключая необходимость участия человека.

«Умная энергетика» делает возможным более эффективное использование электричества, контролирование каждого ватта электропитания в жилом доме или офисном здании [1, 2, 3, 7]. Появилась возможность принимать решения по потреблению энергии в реальном времени на основании сиюминутного знания нагрузочной способности сети и расценок. Датчики отдают команды светильникам понизить яркость или включиться и выключиться. Энергетические сети могут включать в себя такие элементы, как программное обеспечение, которое анализирует потребление энергии по отдельным зонам, устройствам и применениям. Такие программы помогают определить, нужно ли заменить оборудование с более низким энергопотреблением или рассмотреть более эффективный режим работы устройств.

2. Описание реализации

В результате нашей работы была спроектирована и разработана программа, поддерживающая дискретно-событийное моделирование [4]. Основными элементами программы являются:

1. Модуль моделирования - основной элемент программы позволяет в дискретном времени осуществлять моделирование имеющегося набора объектов, включая как умные вещи, так и обычные элементы окружения. Кроме того, в процессе симуляции происходит выполнение управляющей программы, которая руководит работой умных вещей.
2. Модуль подключения объектов и сами моделируемые объекты - моделируемые объекты представляют из себя набор динамических библиотек и текстовых файлов с описанием геометрии и материала объекта. Модуль осуществляет динамическое подключение и создание объектов.
3. Модуль визуализации - в результате работы был разработан интерфейс для поддержки визуализации. Реализация произведена с помощью библиотеки OpenGL [5, 6].

Программа позволяет моделировать различные прикладные задачи, в данной работе приведены результаты экспериментов при симуляции одной из аудиторий университета.

3. Описание эксперимента

Была проведена симуляция работы одной аудитории, содержащей 12 компьютеров (моноблоков) в течение месяца и в течение одного семестра. Каждый компьютер потребляет ~100 Вт/ч во время работы и ~10 Вт/ч в режиме ожидания. Компьютеры используются во время регулярных занятий, согласно расписанию занятий.

Эксперименты проводились на компьютере под управлением ОС Windows 10, процессор Intel(R) Core i5-7300HQ 2.50 GHz, 16 ГБ ОЗУ, IDE Visual Studio 2019.

В обычном режиме работы компьютеры не отключаются на ночь, а переходят в режим ожидания. В автоматическом режиме программа выключает компьютер через пол часа после перехода в спящий режим.

В таблице 1. приведены результаты работы программы за 1 месяц и за целый семестр, приведено количество потребленного электричества и время работы.

Таблица. 1. Результаты работы программы

	Обычный режим, 1 месяц	Автоматический режим, 1 месяц	Обычный режим, 1 семестр	Автоматический режим, 1 семестр
Потребление, кВт/ч	475	434	1901	1737
Время работы, сек	9	6	40	31

На рисунке 1. приведен пример 3D визуализации моделируемого класса. Сцена состоит из статичных объектов (класс, столы), а также из непосредственно объектов наблюдения – моноблоков. Изображение на моноблоке изменятся в зависимости от состояния: выключен, режим ожидания, включен.

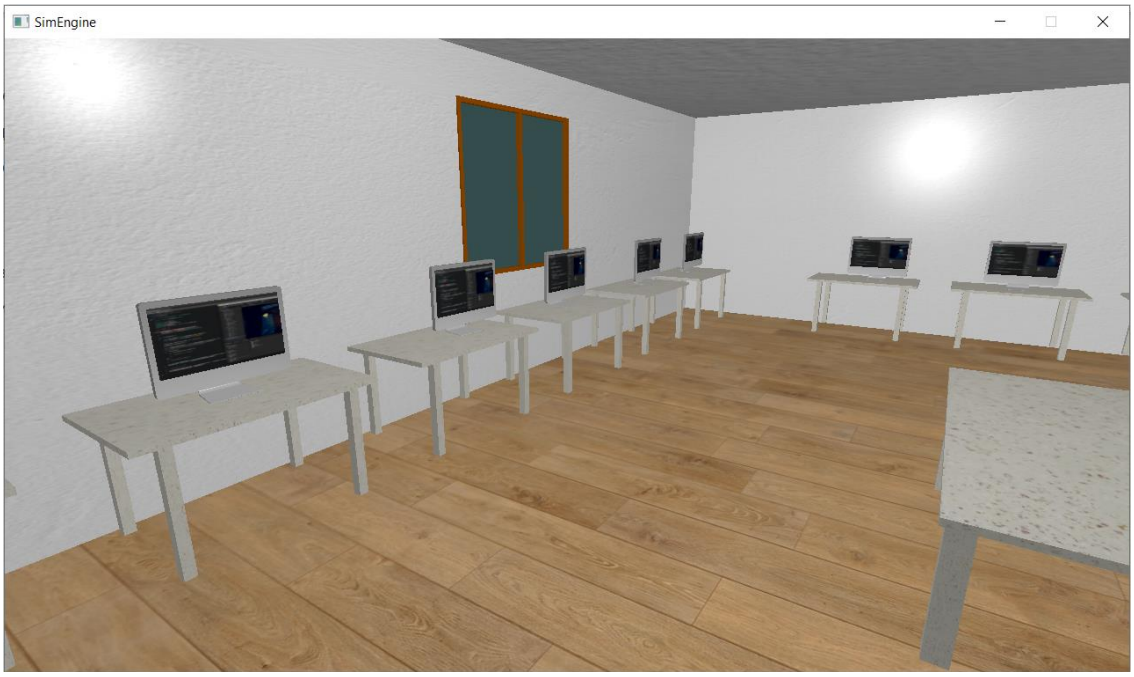


Рис. 2. Визуализация класса

4. Заключение

По результатам эксперимента можно сделать вывод, что при использовании автоматического режима, за счет отключения оборудования можно сократить расходы за электричество на 10 процентов.

Литература

1. Умные электросети. – Режим доступа: https://iot.ru/wiki/umnye-elektroseti.
2. Telegestore project. – Режим доступа: https://www.smart-energy.com/regional-news/europe-uk/enel-telegestore-project-is-on-track/.
3. Home I/O. – Режим доступа: https://realgames.co/home-io/.
4. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. – М.: Высшая школа, 2007, 343 с.
5. Raymond C. H. Lo, William C. Y. Lo. OpenGL Data Visualization Cookbook, 2015.
6. Sumanta Guha. Computer Graphics Through OpenGL: From Theory to Experiments 3rd Edition, 2019.
7. Нгуен Суан Мань. Алгоритм управления подсистемой отопления, вентиляции и кондиционирования в составе интеллектуального управления зданием. Инженерный вестник Дона, №3 (2015).

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕНОСИМОСТИ И ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ МУЛЬТИПЛАТФОРМЕННЫХ МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ГПУ[1*]

В.П. Никольский[1,2], В.В. Стегайлов[1,2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
[2]Объединенный институт высоких температур РАН

В современных МД пакетах LAMMPS, GROMACS и OpenMM предоставляется поддержка технологий CUDA и OpenCL, что обеспечивает высокую переносимость. Для достижения высокой производительности на новом оборудовании от AMD пакет LAMMPS был портирован на ROCm HIP. В этой работе обсуждаются проблемы производительности этих пакетов на различных ГПУ платформах. Обнаружены особенности, относящиеся к аппаратному обеспечению, драйверам и самим прикладным программам. В LAMMPS был выявлен и исправлен ряд проблем, препятствующих высокой производительности и переносимости пакета.

Ключевые слова: ROCm HIP, CUDA, OpenCL, бенчмарк, LAMMPS, GROMACS, OpenMM

Молекулярная динамика является мощным инструментом, востребованным во многих областях современной науки, включая физику и материаловедение, биологию, химию. Для построения достаточно сложных моделей и получения новых результатов при помощи этого метода требуются колоссальные вычислительные мощности, и развитие молекулярной динамики во многом полагается на достижения суперкомпьютерной индустрии.

В современных суперкомпьютерах максимальная производительность зачастую достигается с использованием графических ускорителей, среди которых нет единого стандарта программирования. Многие молекулярно-динамические модели и методы имеют реализации для расчетов на графических ускорителях, в том числе в составе популярных вычислительных пакетов. Авторы таких пакетов прикладывают усилия, чтобы обеспечить максимальную доступность и универсальность.

В докладе рассматриваются пакеты LAMMPS [1], GROMACS [2] и OpenMM [3], используемые большим сообществом исследователей. В них предоставляется поддержка технологий CUDA и OpenCL. Кроме того в докладе обсуждается поддержка новой технологии Radeon Open Compute Heterogeneous-Compute Interface for Portability (ROCm HIP), которая обеспечивает максимальную производительность на новых ускорителях от AMD и в тоже время может быть запущена на ускорителях от Nvidia в виде тонкой прослойки над CUDA с минимальными накладными расходами. В нашей недавней работе [4] бэкенд для ROCm HIP был добавлена в LAMMPS, таким образом в пакете есть поддержка CUDA, OpenCL и ROCm HIP.

CUDA является зрелой технологией с развитым набором инструментов и библиотек. Это стандартный выбор для ускорителей Nvidia, но технология является закрытой и не переносится на оборудование других производителей.

OpenCL напротив является открытым стандартом для ускорения вычислений, Он имеет поддержку Nvidia, AMD, Intel и других, и продолжает развитие - последняя версия стандарта OpenCL 3.0 была представлена в апреле 2020 года. Драйвер AMD ROCm включает поддержку OpenCL 2.0, при этом развитие OpenCL для оборудования CUDA остановилось на версии OpenCL 1.2. В новейших ускорителях Intel Xe предоставляется поддержка OpenCL 3.0. Таким образом, OpenCL одновременно имеет и большие перспективы развития, и ограничения переносимости между производителями.

Платформы демонстрируют различную производительность при решении практических задач при выполнении на аппаратном обеспечении с близкими заявленными характеристиками.

[1*] The work was prepared within the framework of the HSE University Basic Research Program and funded by the Russian Academic Excellence Project '5-100'.

Первый уровень - это самый низкий уровень. В докладе обсуждаются микробенчмарки [5], которые выявляют различия в устройстве иерархии кешей в системах Nvidia и AMD.

На более высоком уровне компиляторы, драйверы и программная среда влияют на управление нагрузкой. В докладе публикуются результаты профилирования пакета LAMMPS, которые демонстрируют, что диспетчеризация ядер (kernel) драйвером ROCm не является оптимальной и приводит к снижению скорости вычислений на 20-30% по сравнению с аналогичным запуском тестовой задачи (LJ жидкость, 2 миллиона атомов, 1 ГПУ) на CUDA.

Третий уровень относится непосредственно к программному коду вычислительных пакетов.

Во-первых, работоспособность заявленных функций может быть в той или иной степени нарушена для отдельных платформ. В рамках публикуемой работы удалось обнаружить и исправить такие платформозависимые ошибки исходном коде пакета LAMMPS.

В-вторых, код модуля ГПУ в LAMMPS не включает для OpenCL бэкенда полностью ускоренный алгоритм построения списка соседей, а часть вычислений производит на ЦПУ [6]. Для большинства потенциалов это не приводит к значительной потере производительности или другим проблемам. Было обнаружено, что при использовании потенциала Tersoff с OpenCL происходит значительный рост потребления памяти, что очень сильно ограничивает доступный размер систем. Для решения этой проблемы в этой работе была создана кроссплатформенная реализация алгоритма поразрядной сортировки для ГПУ, что позволило полностью перенести расчет списка соседей на ГПУ, в том числе и для OpenCL. Это сократило потребление памяти моделью Tersoff примерно в шесть раз.

В-третьих, этот код устаревает и теряет поддержку. Модуль GPU в LAMMPS был изначально разработан в 2011-2013 годы. За прошедшее время сменилось много поколений CUDA, и часть используемых в LAMMPS функций в новейшем релизе CUDA была объявлена устаревшей и требующей замены [7], таким образом эта часть кода требует обновления. Кроме того, оригинальный OpenCL бэкенд написан для старых компиляторов, и новые, более строгие к соблюдению стандарта компиляторы не могут его скомпилировать. Для того, чтобы обеспечить возможность компиляции OpenCL бэкенда на современных ускорителях от AMD с драйверами платформы ROCm, в этой работе были сделаны исправления для улучшения соответствия стандарту OpenCL 2.0. Эти изменения затрагивают все потенциалы в модуле GPU пакета LAMMPS.

Литература

1. Plimpton S. Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics. J Comput Phys 1995; 117(1): 1–19. DOI:10.1006/jcph.1995.1039.
2. Abraham MJ, Murtola T, Schulz R et al. Gromacs: High performance molecular simulations through multi-level parallelism from laptops to supercomputers. Software X 2015;1-2: 19 – 25. DOI:10.1016/j.softx.2015.06.001
3. Eastman P, Swails J, Chodera JD et al. Openmm 7: Rapid development of high performance algorithms for molecular dynamics. PLOS Comput Biology 2017; 13: 1–17. DOI:10.1371/journal.pcbi.1005659.
4. Kuznetsov E, Kondratyuk N, Logunov M et al. Performance and portability of state-of-art molecular dynamics software on modern gpus. In Wyrzykowski R, Deelman E, Dongarra J et al.(eds.) Parallel Processing and Applied Mathematics. Cham:Springer International Publishing. ISBN 978-3-030-43229-4, pp. 324–334.
5. Mei X and Chu X.Dissecting GPU memory hierarchy through microbenchmarking. IEEE Transactions on Paralleland Distributed Systems2017; 28(1): 72–86.
6. Brown WM, Wang P, Plimpton SJ et al. Implementing molecular dynamics on hybrid high performance computers –short range forces.Computer Physics Communications 2011;182(4): 898 – 911. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.12.021.
7. https://github.com/lammps/lammps/issues/2355.

МЕТОДЫ ФЛУКТУАЦИОННОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИЯХ ЭЭГ[1*]

А.Н. Павлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Флуктуационный анализ (DFA) широко используется при изучении дальних корреляций в сигналах различной природы. Для количественного описания неоднородных процессов предложен расширенный флуктуационный анализ (EDFA), на основе которого анализируются сигналы электроэнцефалограмм (ЭЭГ) крыс. Проиллюстрирована возможность использования показателей скейлинга EDFA в качестве диагностических маркеров изменения состояния организма.

Ключевые слова: дальние корреляции, электроэнцефалограмма, флуктуационный анализ, скейлинг, диагностические маркеры.

1. Введение

Исследование дальних корреляций является одним из стандартных методов анализа динамики систем различной природы по экспериментальным данным. Основные ограничения такого анализа при использовании автокорреляционной функции (АКФ) состоят в следующем. Во-первых, изучение степенных закономерностей спада корреляций сопряжено со значительными ошибками вычислений, когда огибающая АКФ принимает значения вблизи нуля, и наличие измерительного шума оказывает существенное влияние на проводимые расчеты. Во-вторых, присутствие нестационарности (в простейшем случае, в виде низкочастотного тренда) приводит к зависимости результатов от выбора начала отсчета времени. Эти обстоятельства привели к разработке альтернативного подхода на основе флуктуационного анализа (*detrended fluctuation analysis, DFA*) [1, 2], предусматривающего переход от быстро спадающей АКФ к возрастающей функции (профилю сигнала), для которого проще изучать степенные закономерности поведения в области дальних корреляций [3–5].

Метод DFA включает деление профиля сигнала на неперекрывающиеся сегменты, в пределах каждого из которых проводится аппроксимация тренда, после чего вычисляется среднеквадратичное отклонение профиля от аппроксимирующей (чаще всего, кусочно-линейной) функции и анализируется степенная зависимость среднеквадратичного отклонения от длины сегмента. Такой подход применим для сравнительно однородных временных рядов, характеристики которых незначительно меняются вдоль сигнала. Если же экспериментальные данные включают переходные процессы или различные артефакты, то среднеквадратичные отклонения для разных сегментов будут сильно отличаться – появляются сегменты с сильно нестационарным поведением, которые будут вносить доминирующий вклад в оценку показателя скейлинга.

Для учета отмеченных особенностей метода DFA в случае неоднородных процессов была предложена модификация метода – расширенный флуктуационный анализ (*extended detrended fluctuation analysis, EDFA*), который осуществляет расчет дополнительного показателя скейлинга, описывающего эффекты нестационарности [6]. Этот метод был протестирован на ряде процессов с известными статистическими характеристиками, после чего применен к анализу физиологических сигналов [7]. В данной работе рассматривается алгоритм метода EDFA и обсуждается его применение к анализу сигналов электрической активности головного мозга по записям электроэнцефалограмм. На примере сигналов ЭЭГ крыс продемонстрированы возможности использования показателей скейлинга метода EDFA в качестве диагностических маркеров изменений функционального состояния организма, вызванных стрессом, а также изменений динамики мозга во время фазы медленного сна.

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (соглашение 19-12-00037) и математического центра СГУ.

2. Метод EDFA

DFA представляет собой вариант среднеквадратичного анализа случайных блужданий, предусматривающий процедуру аппроксимации и удаления локального тренда [2]. Алгоритм включает приведение сигнала $x(i)$ длины N к нулевому среднему значению и построение профиля

$$y(k) = \sum_{i=1}^{k} [x(i) - \langle x \rangle]. \quad (1)$$

Вычисленный профиль $y(k)$ разбивается на сегменты длины n, и в каждом сегменте проводится линейная аппроксимация профиля $y_n(k)$. Затем вычисляется среднеквадратичное отклонение $F(n)$ и оценивается показатель скейлинга α

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} [y(k) - y_n(k)]^2} \sim n^{\alpha}. \quad (2)$$

Применительно к неоднородным процессам, в работе [6] предложено вычислять разность между максимальным и минимальным значением локальных среднеквадратичных отклонений F_{loc}

$$dF(n) = \max[F_{loc}(n)] - \min[F_{loc}(n)], \quad (3)$$

которая характеризует эффекты нестационарности. Степенная зависимость функции (3) от размера сегмента описывается другим показателем скейлинга

$$dF(n) \sim n^{\beta}, \quad (4)$$

для которого справедливо неравенство $\beta < \alpha$, и в отличие от α, показатель β может принимать отрицательные значения.

3. Анализ ЭЭГ

Расширенный метод DFA был применен к двухканальным записям ЭЭГ 9 крыс в различных состояниях. Были проанализированы бодрствующие животные в покое (контрольное состояние), бодрствующие животные после воздействия громкого звука (100 дБ, 370 Гц) в течение 2-х часов в соответствии с протоколом 1 минута звук и 1 минута пауза, приводящего к временной проницаемости гематоэнцефалического барьера (ГЭБ) [8, 9], а также крысы во время фазы медленного сна. Измерения проводились с частотой 2 кГц. До проведения анализа осуществлялась предварительная обработка сигналов (удаление артефактов, фильтрация).

Перед выполнением статистического анализа различий в электрической активности головного мозга в разных состояниях, исследовались характеристики ЭЭГ в зависимости от позиции электрода. Это исследование показало, что вычисляемые зависимости $F(n)$ и $dF(n)$ в двойном логарифмическом масштабе демонстрируют похожее поведение для обоих каналов записи ЭЭГ. По этой причине для каждой крысы анализировались усредненные зависимости. Диапазон масштабов для сравнения состояний был выбран $\lg n > 3.3$, что соответствует диапазону медленных волн с частотами менее 1 Гц.

Далее были проанализированы эффекты звукового воздействия, приводящие к кратковременной проницаемости ГЭБ (примерно через 1 час после завершения воздействия). В соответствии с рис. 1, в этом случае происходит уменьшение показателей скейлинга метода EDFA, причем это уменьшение наблюдается с увеличением масштаба – в диапазоне $\lg n < 3.3$ достоверных изменений не было выявлено. В связи с этим далее был рассмотрен частотный диапазон ниже 1 Гц, где значения показателя α уменьшались от 0.65 ± 0.04 до 0.47 ± 0.06. Показатель скейлинга β расширенного метода DFA демонстрирует более сильные изменения, состоящие в уменьшении значений от 0.41 ± 0.05 до 0.07 ± 0.10, и может принимать как положительные, так и отрицательные значения при временно открытом ГЭБ. Появление отрицательных значений показателя скейлинга β наблюдалось у нескольких животных и не является общей законо-

мерностью, однако уменьшение этого показателя по сравнению с состоянием покоя диагностируется на основе статистического анализа экспериментальных данных по всей группе.

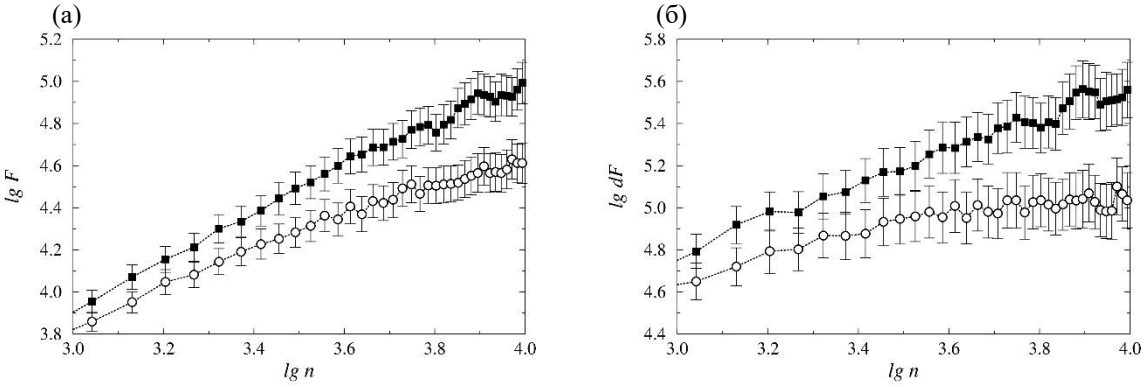


Рис. 1. Уменьшение показателей скейлинга α (а) и β (б) сигналов ЭЭГ бодрствующих крыс при вызванной сильным звуком временной проницаемости ГЭБ по сравнению с контрольным состоянием (средние значения ± стандартная ошибка среднего). Квадратами отмечены результаты в контрольном состоянии, кругами – через 1 час после завершения звукового воздействия

Похожие изменения, состоящие в уменьшении показателей скейлинга, наблюдались по время медленного сна. На рис. 2 показаны различия между характеристиками ЭЭГ сигналов в контрольном состоянии (бодрствующие крысы, повторные записи перед сном) и во время 10-минутных участков сна, выбранных с условием однородности сигналов (минимального искажения данных артефактами и т.п.). В приведенном примере значения показателя β уменьшаются примерно в 3 раза, что свидетельствует о сильных отличиях. Они подтверждают, что сон может также приводить к изменению дальних корреляций в структуре экспериментальных данных, возможно связанных с активацией лимфатической дренажной функции, и эти результаты соответствует физиологическим предположениям.

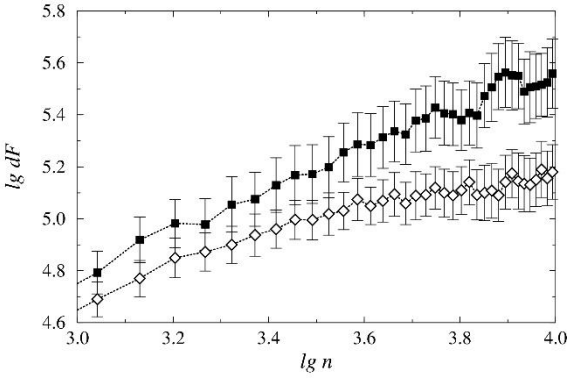


Рис. 2. Уменьшение показателя скейлинга β во время фазы медленного сна (ромбы) по сравнению с контрольным состоянием (квадраты)

4. Заключение

В данной работе рассмотрены возможности методов флуктуационного анализа в изучении эффектов дальних корреляций в сигналах электрической активности мозга крыс. В отличие от традиционно используемого алгоритма, расширенный метод DFA предусматривает расчет дополнительной характеристики – показателя скейлинга β, который отражает неоднородность сигналов. В работе рассмотрен медленно-волновой диапазон (до 1 Гц), то есть область частот ниже традиционно исследуемых ритмов ЭЭГ. Выбраны два примера – воздействие сильным звуком и медленный сон. В первом случае наблюдается существенное уменьшение обоих показателей скейлинга, и их одновременный учет позволяет улучшить диагностику состояний. Несмотря на то, что анализ только ЭЭГ не позволяет судить о причинах изменений, в частности, о проницаемости ГЭБ, об этом свидетельствуют данные дополнительных исследований с исполь-

зованием методов оптической визуализации. Таким образом, анализ ЭЭГ может позволить предложить дополнительные маркеры диагностики временной проницаемости ГЭБ и активации функции лимфодренажа во время сна. Дальнейшие исследования в этой области могут расширить существующие знания о доступных механизмах передачи в мозг лекарственных препаратов.

Литература

1. Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., et al. Mosaic organization of DNA nucleotides // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 49. P. 1685–1689. DOI: 10.1103/PhysRevE.49.1685.
2. Peng C.-K., Havlin S., Stanley H.E., et al. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // Chaos. 1995. Vol. 5. P. 82–87. DOI: 10.1063/1.166141.
3. Bryce R.M., Sprague K.B. Revisiting detrended fluctuation analysis // Sci. Rep. 2012. Vol. 2. P. 315. DOI: 10.1038/srep00315.
4. Shao Y.H., Gu G.F., Jiang Z.Q., et al. Comparing the performance of FA, DFA and DMA using different synthetic long-range correlated time series // Sci. Rep. 2012. Vol. 2. P. 835. DOI: 10.1038/srep00835.
5. Frolov N.S., Grubov V.V., Maksimenko V.A., et al. Statistical properties and predictability of extreme epileptic events // Sci. Rep. 2019. Vol. 9. P. 7243. DOI: 10.1038/s41598-019-43619-3.
6. Pavlov A.N., Abdurashitov A.S., Koronovskii Jr. A.A., et al. Detrended fluctuation analysis of cerebrovascular responses to abrupt changes in peripheral arterial pressure in rats // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. Vol. 85. P. 105232. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105232.
7. Pavlov A.N., Dubrovsky A.I., Koronovskii Jr. A.A., et al. Extended detrended fluctuation analysis of electroencephalograms signals during sleep and the opening of the blood–brain barrier // Chaos. 2020. Vol. 30. P. 073138. DOI: 10.1063/5.0011823.
8. Semyachkina-Glushkovskaya O., Abdurashitov A., Dubrovsky A., et al. Application of optical coherence tomography for in vivo monitoring of the meningeal lymphatic vessels during opening of blood-brain barrier: Mechanisms of brain clearing // J. Biomed. Opt. 2017. Vol. 22. P. 121719. DOI: 10.1117/1.JBO.22.12.121719.
9. Semyachkina-Glushkovskaya O., Chehonin V., Borisova E., et al. Photodynamic opening of the blood-brain barrier and pathways of brain clearing // J. Biophotonics. 2018. Vol. 11. P. e201700287. DOI: 10.1002/jbio.201700287.

ОПТИМИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОСТРОЙ ФОКУСИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИМПУЛЬСА[1*]

Е.А. Панова[1], В.Д. Волокитин[1], Е.С. Ефименко[2], И.Б. Мееров[1], А.А. Гоносков[3,1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
[2]Институт прикладной физики РАН
[3]Университет Гетеборга

При резкой фокусировке предельно короткого электромагнитного импульса в области фокуса формируется сложная структура электромагнитного поля, которая может быть численно рассчитана с использованием спектральных решателей поля. Ранее для быстрого решения этой задачи была предложена процедура, основанная на отображении сферически искривленной удаленной области на периодическое пространство [1]. В данной работе представлена эффективная параллельная реализация предложенного метода для систем с общей памятью, оптимизированная с учетом архитектуры с неравномерным доступом к памяти (NUMA). В экспериментах была достигнута эффективность масштабируемости спектрального решателя 90%.

Ключевые слова: острая фокусировка лазерного импульса, спектральные решатели поля, параллельные вычисления, высокопроизводительные вычисления, неравномерный доступ к памяти, NUMA.

1. Введение

При решении ряда задач, например, при исследовании взаимодействия высокоинтенсивного электромагнитного излучения с веществом [2, 3], необходимо работать с одним или несколькими остросфокусированными лазерными импульсами. Организация такой фокусировки в эксперименте позволила бы существенно увеличить пиковую интенсивность излучения, однако осуществить это довольно сложно из-за высоких требований к точности формы фокусирующего зеркала. Для того чтобы определить качество фокусировки по вторичной информации, полученной в эксперименте, а также чтобы понять, какие физические явления могут быть достигнуты и как это можно использовать, необходимы либо приемлемые аналитические модели, либо способ провести моделирование численно с высокой степенью точности.

У существующих на данный момент аналитических моделей [4-6] есть некоторые недостатки. В частности, параксиальные модели имеет смысл применять только в случае малых дифракционных углов, что вносит свои ограничения на максимальную интенсивность излучения. Также для задач с предельно короткими лазерными импульсами (2-3 периода лазерного поля) не подходят модели, рассматривающие исходное излучение как монохроматическое. Таким образом, неточности, связанные с исходными предположениями, характерными для конкретных аналитических моделей, а также отсутствие гибкости по отношению к заданию начальных условий являются предпосылками к использованию численного моделирования.

Для численных методов в задаче острой фокусировки могут ставиться достаточно высокие требования к точности результата. Методы конечных разностей решения уравнений Максвелла на сетке (FDTD, [7]) обладают численной дисперсией, которую нельзя устранить сразу по всем направлениям, что может существенно повлиять на высокочастотные компоненты импульса. В этом плане наиболее выгодными представляются спектральные методы [8, 9], свободные от численной дисперсии и ограничения на временной шаг. Однако спектральные методы приводят к росту вычислительных затрат, среди которых расходы на выполнение БПФ, а также отсутствие возможности обновлять поля только в определенной области пространства, что особенно важно для задачи острой фокусировки, где в большей области пространства значения полей пренебрежимо малы. В одной из предыдущих работ [1] мы представили метод, позволяющий уменьшить вычислительные затраты для задачи острой фокусировки. Это достигается за счет

[1*] Работа поддержана ННГУ им. Н. И. Лобачевского в рамках программы 5-100.

отображения исходного трехмерного пространства в периодическое, что позволяет производить вычисления в узкой вдоль направления распространения полосе. В данной работе приводится краткое описание предложенного метода, а также некоторые аспекты его эффективной параллельной реализации для последующего моделирования на системах с общей памятью.

Программная реализация была выполнена в рамках проекта Hi-Chi – набора высокопроизводительных инструментов с открытым исходным кодом для моделирования задач в области физики плазмы, объединяющего удобный интерфейс Python с эффективностью вычислений на уровне C++ [10]. В работе представлены результаты производительности для систем с неравномерным доступом к памяти (NUMA) в задаче острой фокусировки, а также способ оптимизации параллельного кода для данной архитектуры за счет обеспечения локального размещения исходных данных в памяти, что позволило достичь 90% эффективности масштабируемости спектрального решателя поля в системах с общей памятью.

2. Постановка задачи

Мы предполагаем, что в начальный момент времени исходный импульс располагается внутри сферического сектора в дальней зоне $x < 0$, т.е. расстояние R_0 от центра сферы до импульса намного больше длины волны λ. Сферический сектор имеет радиус R_0 и ограничен углом раствора θ, значение которого может быть близко к $\pi/2$. Импульс может иметь произвольную форму в продольном (вдоль направления распространения) и поперечном (вдоль волнового фронта) направлениях, однако предполагается, что излучение распространяется преимущественно к геометрическому центру сферического сектора.

Для определенности мы рассматриваем короткий импульс практически прямоугольной вдоль волнового фронта формы u_{ts} со сглаживанием по краям на малый угол ε (рис. 1а). Вдоль продольного направления импульс имеет длину L и форму u_l с огибающей пропорциональной $\cos^2$ (рис. 1б). Начальная амплитуда вычисляется на основе фиксированной входной мощности P_0. Таким образом, форма исходного импульса u может быть задана согласно следующим формулам (далее c – скорость света, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

$$u(x,y,z) = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4P_0}{c(1-\cos\theta)}}\, u_l(R - R_0) \cdot u_{ts}\left(\arcsin\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{R}\right) \tag{1}$$

$$u_l(x) = \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos^2\frac{\pi x}{L} \cdot rect\left(x, -\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \tag{2}$$

$$u_{ts}(\alpha) = rect\left(\alpha, 0, \theta - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \cos^2\frac{\pi\left(\alpha - \theta + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\varepsilon} \cdot rect\left(\alpha, \theta - \frac{\varepsilon}{2}, \theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3}$$

$$rect(x, x_{min}, x_{max}) = \begin{cases} 1, & x_{min} \le x \le x_{max} \\ 0, & x > x_{max}, x < x_{min} \end{cases} \tag{4}$$

Более подробное описание постановки задачи, а также возможная экспериментальная реализация, приводящая к начальной конфигурации поля вида (1)-(4) и связанные с этим физические аспекты рассмотрены в [1].

3. Описание метода

К начальной конфигурации, представленной в разделе 2, может быть применен спектральный решатель электромагнитного поля, позволяющий с высокой степенью точности численно интегрировать уравнения Максвелла в линейных средах. Рассматриваемый метод, в отличие от распространенных в области физики плазмы методов конечных разностей, не обладает численной дисперсией и ограничением на параметр Куранта. Таким образом, в задаче острой фокусировки распределение поля в области фокуса может быть получено за одну итерацию без потери точности. Поля в момент времени, соответствующий итерации $\boldsymbol{n+1}$, могут быть вычислены следующим образом ($\boldsymbol{E^n}$, $\boldsymbol{B^n}$ – Фурье-образ электрического и магнитного полей в предыдущий

момент времени, соответствующий итерации $\boldsymbol{n}$, $\widehat{\boldsymbol{k}}$ – нормированный волновой вектор, $\boldsymbol{k}$ – норма волнового вектора, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{kc\Delta t})$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{kc\Delta t})$, $\boldsymbol{i}$ – мнимая единица):

$$\boldsymbol{E}^{n+1} = C\left(\boldsymbol{E}^{n} - \widehat{\boldsymbol{k}}\left(\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E}^{n}\right)\right) + iS\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{B}^{n} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{B}^{n+1} = C\boldsymbol{B}^{n} - iS\widehat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}^{n} \quad (6)$$

В формулах (5)-(6) также включена поправка, учитывающая уравнение Пуассона $\widehat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, которое не выполняется для представленной в разделе 2 начальной конфигурации, что может привести к появлению нежелательных статических полей в процессе расчета. Результат моделирования задачи острой фокусировки с помощью спектрального решателя представлен на рис. 1.

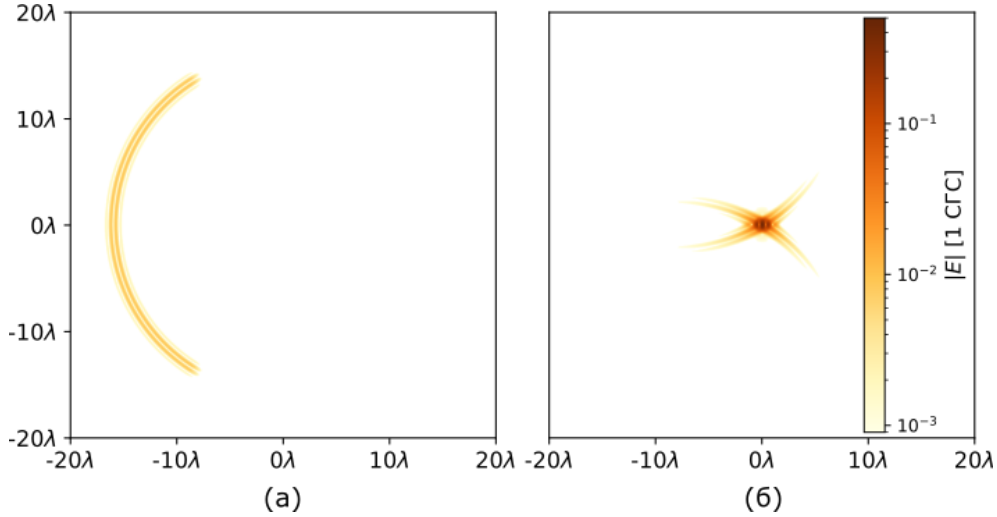


Рис. 1. Конфигурация полей в задаче острой фокусировки (а) в начальный момент времени и (б) в момент достижения наибольшей пиковой интенсивности излучения. Вычислительная сетка размером 256^3, $\lambda = 1$ мк, $\theta = 1$ рад, $R_0 = 16\lambda$, $L = 2\lambda$, $\varepsilon = 0.1$ рад, $P_0 = 1$ В. Адаптировано из [1].

Очевидно, что в задаче острой фокусировки приходится делать вычисления, в том числе в областях с нулевыми или очень малыми значениями полей (рис. 1). Следующий метод позволяет сократить размер таких областей и, следовательно, уменьшить количество вычислений. Предлагается продублировать исходный импульс вдоль оси $\boldsymbol{x}$ бесконечное число раз так, чтобы расстояние между двумя соседними импульсами было постоянно и равно $\boldsymbol{D}$. При этом $\boldsymbol{D}$ ограничено снизу правой частью неравенства (7) из геометрических соображений (импульсы не должны накладываться друг на друга).

$$D \geq -R_{min}\cos\theta + \sqrt{R_{\max}^2 - R_{min}^2\sin^2\theta} \quad (7)$$

$$R_{min} = R_0 - \frac{L}{2},\ R_{max} = R_0 + \frac{L}{2} \quad (8)$$

В результате данного преобразования пространство становится периодическим, что позволяет проводить моделирование только в узкой полосе шириной D вдоль оси x с использованием периодических граничных условий. Однако у такого отображения не существует обратного, что создает некоторые проблемы при определении конфигурации поля в исходном пространстве. Тем не менее, за счет того, что известна приблизительная структура поля (т.е. область пространства, в которой находится импульс в текущий момент времени), можно с некоторой степенью точности «отбросить» вторичные импульсы и тем самым получить картину поля, близкую к искомой. За счет того, что вторичные импульсы могут давать небольшое излучение, распространяющееся в направлении от геометрического центра, данный метод вносит в расчеты некоторую ошибку. Однако она, как правило, не превосходит 1% относительно пикового значения поля и уменьшается с ростом ширины полосы D. Подробное описание данного метода, а также анализ вносимой им ошибки представлен в [1].

4. Реализация и анализ производительности

4.1. Проект hi-χ

Метод, описанный в разделе 3, реализован как часть инфраструктуры Hi-Chi. Проект Hi-Chi, (hi-χ, High-Intensity Collisions and Interactions) – это набор программных инструментов с открытым исходным кодом для моделирования и анализа данных в области физики плазмы [10]. Данный комплекс представляет собой пакет Python, который под управлением среды Python позволяет создавать различные конфигурации вычислительных экспериментов с использованием набора компонуемых элементов. При этом достигается высокая производительность за счет эффективной реализации базовых компонент на языке C++. В результате проект объединяет гибкость Python и эффективность ресурсоемких вычислений на уровне C++, что дает возможность расширить круг пользователей за счет устранения ряда трудностей, связанных с привязкой к определенному языку программирования, ограничениями на входные или выходные данные и т.д. Более того, шаблон проектирования C++ проекта позволяет легко дополнять или модифицировать набор инструментов пакета, а также создавать и тестировать новые конфигурации в среде Python, а затем переносить ресурсоемкие вычисления на уровень C++.

На данный момент Hi-Chi поддерживает только параллелизм на общей памяти с помощью технологии OpenMP, схема распараллеливания для систем с распределенной памятью находится в разработке. Тем не менее, в рамках одного вычислительного узла код показывает высокую скорость работы и близкую к линейной эффективность масштабируемости за счет рационального использования кэшей, поддержки векторных вычислений и размещения данных с учетом требований архитектуры NUMA (Non-Uniform Memory Access, [11]). Так спектральный решатель (5)-(6) показывает эффективность масштабируемости на общей памяти 90% без учета выполнения быстрого преобразования Фурье. Анализ производительности приведен в разделе 4.3.

4.2. Программно-аппаратное окружение

Описанные в разделе 4.3 эксперименты проводились на суперкомпьютере МВС-10П Объединенного суперкомпьютерного центра Российской академии наук. Каждый вычислительный узел кластера содержал два 18-ядерных процессора Intel Xeon Gold 6154 (3,0 ГГц) и 192 ГБ оперативной памяти. Код был создан с использованием Intel C ++ Compiler 17.0.4 и Intel Math Kernel Library 2017 (MKL) из пакета Intel Parallel Studio XE. Мы использовали высокопроизводительную многопоточную реализацию быстрого преобразования Фурье из MKL для повышения производительности и эффективности масштабирования кода, но Hi-Chi также предоставляет возможность использовать реализацию fftw с открытым исходным кодом.

4.3. Анализ производительности

Расчет задачи острой фокусировки состоит из четырех этапов: инициализации сетки начальными значениями, выполнения прямого быстрого преобразования Фурье (БПФ), расчета эволюции значений поля во времени с использованием одной или нескольких итераций решателя поля и выполнения обратного БПФ. Этапы рассматриваются по отдельности, поскольку при моделировании часто встречается ситуация, когда нужно произвести несколько итераций по времени, при этом прямое и обратное БПФ может выполняться как по одному разу в начале и в конце моделирования, так и каждую итерацию. Алгоритм быстрого преобразования Фурье имеет теоретическую вычислительную сложность $O(n \log n)$, где n – общее количество узлов трехмерной сетки, а обновление значений полей имеет сложность $O(n)$. Это подтверждается и в вычислительных экспериментах: при увеличении ширины полосы D, а значит, и размерности сетки вдоль оси x, время расчета масштабируется соответствующим образом для любого количества используемых ядер (рис. 2а).

Для достижения хорошей производительности в рамках узла кластера и высокой эффективности масштабирования на общей памяти код был оптимизирован: данные были размещены удобным для кеширования способом, также были задействованы векторные вычисления. Были

рассмотрены две параллельные версии кода: базовая версия и версия с поддержкой NUMA. В базовой версии было выполнено простое распараллеливание вычислительных циклов на этапах инициализации и решателя поля, при этом мы полагались на внутренний параллелизм MKL FFT при выполнении БПФ. Эксперименты показали (рис. 2б), что для такой «наивной» реализации резко падает эффективность масштабируемости при использовании более 18 ядер, т.е. при использовании обоих процессоров двухпроцессорной системы (описание аппаратного окружения см п. 4.2). Причина такого поведения заключается в том, что базовая реализация не очень хорошо сочетается с дизайном памяти с неравномерным доступом (NUMA), которая обычно используется в современных процессорах. Чтобы добиться хорошей производительности и эффективности масштабирования, многопоточное программное обеспечение должно быть реализовано с учетом требований NUMA. В связи с этим мы выполняем соответствующую инициализацию структур данных в параллельных циклах, когда каждый поток инициализирует те же данные, которые он будет обрабатывать позже во время вычислений (first-touch policy, «политика первого касания») [11]. Показано, что избежание удаленного доступа к памяти (т.е. к памяти другого процессора) может значительно снизить накладные расходы на загрузку данных.

При хранении данных в стиле массива C их легко оптимально с точки зрения NUMA разместить в памяти, для этого достаточно соответствующим образом распараллелить циклы инициализации. Однако если используется класс std::vector из стандартной библиотеки шаблонов (STL), то в этом случае необходимо реализовывать свой распределитель памяти (Allocator), иначе при создании вектора память будет проинициализирована нулями в одном потоке с помощью функции std::memset(), что в дальнейшем приведет к локализации данных в памяти одного из процессоров. Для решения этой проблемы мы используем класс NUMA_Allocator из [11].

На рис. 2а показано, как изменяется время расчета четырех этапов вычислительного цикла при увеличении ширины полосы D. Результаты представлены для двух реализаций: базовой и с поддержкой NUMA. Можно видеть, что версия кода, совместимая с NUMA, демонстрирует заметное преимущество с точки зрения времени вычислений, в то время как большая часть программного времени тратится на выполнение прямого и обратного БПФ. Рис. 2б показывает, насколько сильно повышается эффективность масштабирования при использовании «политики первого касания» (до 90% для нашего кода и до 50% для MKL FFT против соответствующих 55% и 30% в базовой версии).

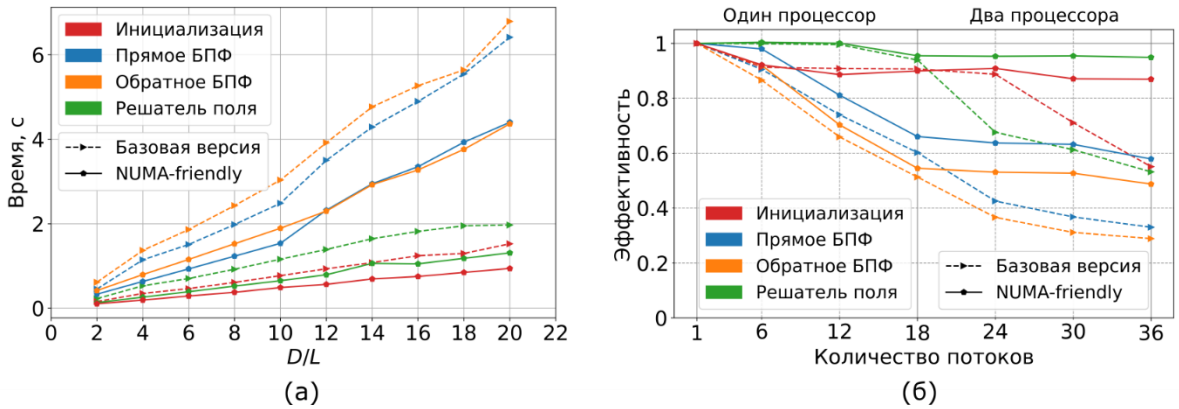


Рис. 2. Результаты экспериментов с использованием «политики первого касания» (версия с поддержкой NUMA, NUMA-friendly, сплошная линия) и без нее (базовая версия, пунктирная линия). (а) Время вычисления одной итерации метода, включая четыре этапа: инициализацию сетки, прямое БПФ, решатель поля, обратное БПФ. Размер сетки 56 D/L × 896 × 896, D/L варьируется, количество ядер – 36 (2 процессора по 18 ядер в каждом). (б) Эффективность масштабируемости кода на сетке 560 × 896 × 896

5. Заключение

В работе была представлена эффективная параллельная реализация на общей памяти спектрального метода расчета электромагнитного поля применительно к задаче острой фокусиров-

ки. За счет размещения данных в локальной памяти процессора согласно «политике первого касания» удалось достигнуть 90% эффективности масштабируемости спектрального решателя поля на 36 физических ядрах (двухпроцессорная система по 18 ядер в каждом) и 50% эффективности масштабируемости для реализации БПФ из библиотеки Intel MKL. Открытый исходный код и удобный Python интерфейс проекта Hi-Chi, в рамках которого была выполнена реализация поставленной задачи, позволяет легко с высокой степенью точности выполнять моделирование задачи острой фокусировки, как на пользовательских персональных компьютерах, так и на узлах суперкомпьютера с большим числом физических ядер.

Литература

1. Panova E., Volokitin V., Efimenko E., Blackburn T., Marklund M., Meyerov I., Gonoskov A. Optimized computation of tight focusing of short pulses using mapping to periodic space //arXiv preprint arXiv:2010.00409. – 2020.
2. Mourou G. A., Tajima T., Bulanov S. V. Optics in the relativistic regime //Reviews of modern physics. – 2006. – Т. 78. – №. 2. – С. 309.
3. Marklund M., Shukla P. K. Nonlinear collective effects in photon-photon and photon-plasma interactions //Reviews of modern physics. – 2006. – Т. 78. – №. 2. – С. 591.
4. Davis L. W. Theory of electromagnetic beams //Physical Review A. – 1979. – Т. 19. – №. 3. – С. 1177.
5. Sheppard C. J. R., Saghafi S. Electromagnetic Gaussian beams beyond the paraxial approximation //JOSA A. – 1999. – Т. 16. – №. 6. – С. 1381-1386.
6. Couture M., Belanger P. A. From Gaussian beam to complex-source-point spherical wave //Physical Review A. – 1981. – Т. 24. – №. 1. – С. 355.
7. Taflove A., Hagness S. C. Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method. – Artech house, 2005.
8. Haber I. et al. Advances in electromagnetic simulation techniques //Proc. Sixth Conf. Num. Sim. Plasmas, Berkeley, CA. – 1973. – С. 46-48.
9. Vay J. L., Haber I., Godfrey B. B. A domain decomposition method for pseudo-spectral electromagnetic simulations of plasmas //Journal of Computational Physics. – 2013. – Т. 243. – С. 260-268.
10. Hi-Chi project. URL: https://github.com/hi-chi (2020).
11. Hager G., Wellein G. Introduction to high performance computing for scientists and engineers. – CRC Press, 2010.

МЕТОДЫ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МОРСКОГО ЛЬДА С ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

***С.С. Петров*[1,2]**

[1]*Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН*
[2]*Московский центр фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН*

Данная работа может быть поделена на две части. В первой части приводится подробное описание процесса построения треугольной нерегулярной сетки Арктического региона со сгущением в области высокой потенциальной сплоченности льда, описание программного комплетса INMOST для массивно параллельных вычислений и особенности его применения для задачи моделирования динамики морского льда. Во второй части работы описана технология ускорения классического метода численного интегрирования уравнения динамики морского льда с вязко-пластичной реологией и приведены результаты численных тестов в квадратной расчетной области с искусственным внешним форсингом.

Ключевые слова: динамика морского льда, вязко-пластичная реология, INMOST, Ani-2D, Ani-3D.

1. Введение

Модели льда играют важную роль в прогностических системах и климатических моделях. Потоки тепла, которые поступают в океан взаимодействуют со льдом и значительно изменяются. Также практический интерес представляет непосредственно динамика льда для проектирования сооружений добычи шельфовых углеводородов и для прогнозирования маршрутов Арктических экспедиций. Активное развитие моделей льда началось после разработки уравнений динамики с вязко-пластичной реологией [1]. Впоследствие было предложено множество методов численного интегрирования этой системы уравнений [2-4]. В данной работе представлен нестационарный метод, основанный на классическом mEVP-подходе и идее локального убывания квадрата нормы невязки линеаризованного функционала, увеличивающий его скорость сходимости. Данный метод может быть применен для оптимизации вычислений в блоках динамики морского льда. Главным достоинством конечно-элементного подхода для моделирования морского льда является возможность точного учета неоднородности береговой линии, возможность сгущения сетки в области особенностей решения и районы, представляющие интерес для пользователя. Физическая постановка данной задачи приводит к плохо обусловленным дискретным операторам, что сказывается на вычислительной сложности решения, поэтому оптимизации методов типа mEVP нуждаются в разработке для эффективного и экономичного использования моделей льда в связке с моделями океана.

2. Построение расчетной сетки

В качетве расчетной области выбран Арктический регион, находящийся выше 45 широты. Контуры берегов взяты из открытой базы данных GSHHG [5] береговой линии, с помощью пакета GMT [6]. В качестве отправной точки используется самое грубое доступное разрешение. Несмотря на это, как показала практика, в представленных контурах берега присутствуют несогласованности, выражающиеся в самопересечения отрезков границы берегов, поэтому для корректировки применялись некоторые искусственные методики сглаживания (удаление вершин слишком маленьких углов, удаление частей ломанных, образующих достаточно узкие заливы и явные самопересечения). Также на начальном этапе построения сетки были удалены устья рек, а расчетная область замыкалась по водной границе, проходящей вдоль 45 широты. Аналогичные процедуры применялись и для корректировки островов. После описанных модификаций,

данные ломанных береговой линии подавались на вход процедуре построения регулярной триангуляции пакета Ani-2D AFT [7], разработанного в ИВМ РАН. Регулярная триангуляция имеет явный недостаток – в низких широтах льда практически не бывает, соответственно избыточное количество узлов в таких местах приводит к лишним вычислениям. Поэтому была предложена технология сгущения сетки в области с потенциально высокой сплоченностью льда. Для этого использовались данные по спутниковым измерениям за последние 10 лет [8] и специальный функционал пакета Ani-2D AFT, позволяющий задать желаемый локальный размер треугольника. Граница льда с высокой и низкой сплоченностью является довольно резкой, поэтому было принято решение задавать минимальный размер треугольника в 5 раз меньше максимального, чтобы избежать узлов, из которых выходит большое количество отрезков сетки. Результаты построенной регулярной триангуляции и триангуляции со сгущением представлены соответственно на рис.1 и рис.2. В результате построения треангуляции со сгущением получаетсся около 330’000 узлов и 640’000 треугольников. Численное решение задачи подобной размерности необходимо проектировать используя параллельную архитектуру компьютера.

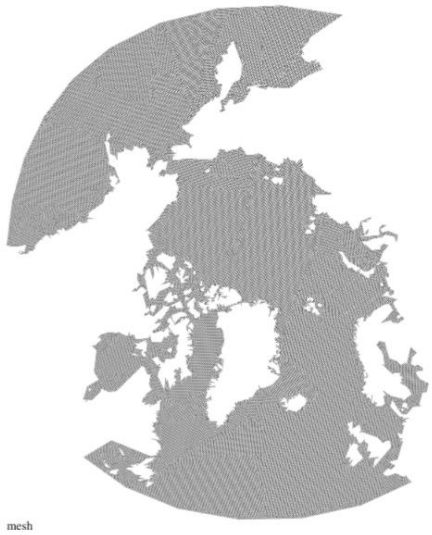


Рис.1. Регулярная триангуляция Арктического региона

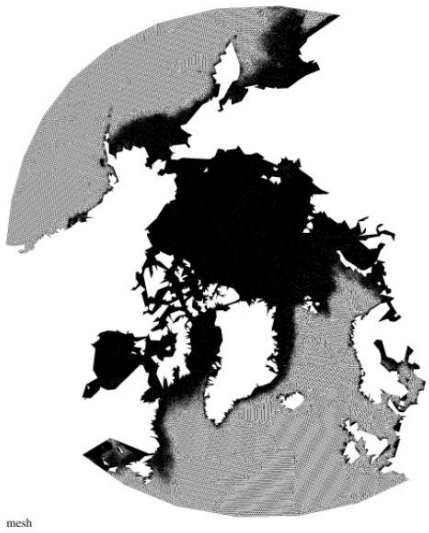


Рис.2. Триангуляция Арктического региона со сгущением сетки в области высокой сплоченнсти льда

Также стоит отметить, что модельные координаты отличаются от географических (долгота/широта) поворотом Северного полюса на экватор на углы Эйлера (-30°, -90°, 0°), дабы избежать особенности на Северном полюсе.

2. Особенности использования пакета INMOST для массивно-параллельного моделирования динамики морского льда

Программный комплекс INMOST [9] разрабатывается и поддерживается в ИВМ РАН. Данный пакет предназначен для массивно-параллельного моделирования на сетках произвольной структуры, как в двухмерном, так и в трехмерном пространстве. Данный пакет хорошо оптимизирован для использования конечно-элементных и конечно-объемных аппроксимаций. Для построения эффективного параллельного разделения расчетной области на подобласти соответстующие разным процессам, минимизирующего количество обменов, в данной модели используется библиотека ParMETIS [10], интегрированная в INMOST. Для параллельного решения систем линейных уравнений используется библиотека PETSc [11], также интегрированная в INMOST. Сеточные данные хранятся в некотором упорядоченном формате, что позволяет использовать оптимальные алгоритмы поиска. На (Рис.3) представлено разбиение нерегулярной расчетной сетки по 20 процессам.

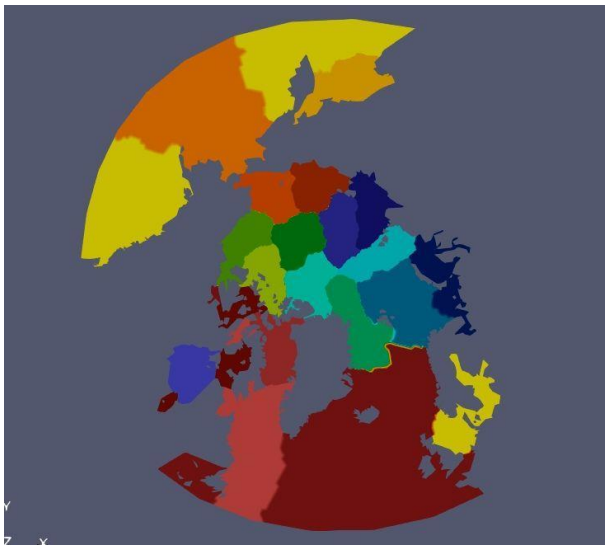


Рис.3. Разбиение расчетной области (Рис.2) на 20 подобластей

Используя разбиение, представленное на рис.3 на данный момент ведется разработка параллельной интерполяции физических полей таких как высота, сплоченность, скорость льда на расчетную сетку и с расчетной сетки на прямоугольную. Самым распространенным форматом физических полей является NetCDF, для параллельного чтения и записи в файлы этого формата используется библиотека PNetCDF.

3. Оптимизированный метод численного интегрирования уравнения динамики морского льда с вязко-пластичной реологией

В динамических блоках современных глобальных моделей морского льда с вязко-пластичной реологией используются различные численные методы интегрирования. Наиболее распространены следующие два: **mEVP** [4], **VP-Picard** [2]. В данной работе проведено сравнение этих методов:качественное и по норме невязки в квадратной модельной области размера 1000 км. с искуственным периодичным по времени и пространству внешним форсингом (ветра и течения воды). Также, предложен альтернативный ускоренный метод **mEVP-opt**, основанный на классическом **mEVP** методе и идее локального убывания квадрата нормы невязки линеаризованного оператора.

Система двумерной динамики морского льда с вязко-пластичной реологией представляет из себя закон баланса импульса и два уравнения переноса – сплоченности и массы льда [1].

$$\begin{cases} \boldsymbol{m\left(\partial_t + f\,\vec{k}\times\right)\vec{u} = a\,C_a\rho_a|\overrightarrow{u_a}|\overrightarrow{u_a} - a\,C_w\rho_w|\vec{u} - \overrightarrow{u_w}|(\vec{u} - \overrightarrow{u_w}) + \vec{F} - mg\,\nabla H;} \\ \boldsymbol{F_i = \partial_j\sigma_{ij};} \\ \boldsymbol{\sigma_{ij} = 2\,\eta\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{kk}\right) + \xi\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}P;} \\ \boldsymbol{\xi = \frac{P_0}{2(\Delta + \Delta_{\min})};\ \eta = \frac{\xi}{e^2};} \\ \boldsymbol{\Delta = \left[\left(\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2\right)\left(1 + \frac{1}{e^2}\right) + \frac{4}{e^2}\dot{\varepsilon}_{12}^2 + 2\dot{\varepsilon}_{11}^2\dot{\varepsilon}_{22}^2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)\right]^{0.5};} \\ \boldsymbol{P_0 = p^* h\,e^{-C(1-a)};\ P = \frac{P_0\Delta}{\Delta + \Delta_{\min}};} \\ \boldsymbol{\partial_t a + \nabla\cdot(\vec{u}a) = 0;\ \partial_t m + \nabla\cdot(\vec{u}m) = 0;} \\ \boldsymbol{m = \rho_i a h,} \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{k}$ – единичный вектор нормали к поверхности,f– параметр Кориолиса,m– масса,a– сплоченность, $\vec{u}, \overrightarrow{u_w}, \overrightarrow{u_a}$– скорости льда, воды и воздуха,h– высота, ρ, ρ_w, ρ_i– плотности воздуха, воды и льда, σ_{ij}– компоненты тензора напряжений,$\dot{\varepsilon}_{ij}$–компоненты тензора скоростей деформации, $e = 2$ параметр эллиптичности, ξ, η– объемные и сдвиговые вязкости, P-давление, H– уровень океана.

Уравнения переноса решаются с помощью консервативной конечно-элементной схемы Тейлора-Галеркина с применением технологии коррекции потоков [11].

Суть mEVP-подхода для решения уравнений динамики состоит в псевдоитерировании отдельно по главным компонентам тензора напряжений и скоростям [4]:

$$\begin{cases} \alpha\left(\sigma_1^{p+1} - \sigma_1^p\right) = \dfrac{P_0}{\Delta^p + \Delta_{min}}\left(\dot{\varepsilon}_1^p - \Delta^p\right) - \sigma_1^p; \\ \alpha\left(\sigma_2^{p+1} - \sigma_2^p\right) = \dfrac{P_0}{e^2(\Delta^p + \Delta_{\min})}\dot{\varepsilon}_2^p - \sigma_2^p; \\ \alpha\left(\sigma_{12}^{p+1} - \sigma_{12}^p\right) = \dfrac{P_0}{e^2(\Delta^p + \Delta_{\min})}\dot{\varepsilon}_{12}^p - \sigma_{12}^p; \\ \beta(\vec{u}^{p+1} - \vec{u}^p) = -\vec{u}^{p+1} + \vec{u}^n - \Delta t\, f\, \vec{k} \times \vec{u}^{p+1} + \dfrac{\Delta t}{m}\left[\vec{F}^{p+1} + \vec{r}^{p+1}\right] \end{cases} \quad (2)$$

Типичное значение, параметров, которые используются в моделях $\alpha = \beta = 500$ при $N_{mEVP} = 500$ псевдоитерациях. Описанный процесс будет в дальнейшем именоваться как **mEVP-500**. Главное преимущество такого подхода – отсутствие необходимости решать систему линейных уравнений на каждом шаге. Такое свойство получается засчет использования лампированной массовой матрицы.

Второй наиболее популярный подход для решения уравнения импульса - это метод итераций Пикара [2]. Значения объемных и сдвиговых вязкостей берутся с предыдущей псевдоитерации и используются для формирования нового приближения компонент тензора напряжений. Затем, компоненты подставляются непосредственно в уравнение импульса и вычисляются новые значения для компонент скоростей [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^{k+1} = (\xi + \eta)^k \partial_x u^{k+1} + (\xi - \eta)^k \partial_y v^{k+1} - \dfrac{1}{2}P^n; \\ \sigma_{21}^{k+1} = \sigma_{12}^{k+1} = (\xi + \eta)^k \partial_y u^{k+1} + \eta^k \partial_x v^{k+1} - \xi^k \partial_y u^{k+1}; \\ \sigma_{22}^{k+1} = (\xi + \eta)^k \partial_y v^{k+1} + (\xi - \eta)^k \partial_x u^{k+1} - \dfrac{1}{2}P^n; \\ m^n \dfrac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^n}{\Delta t} + m^n \vec{f} \times \vec{u}^{k+1} = \vec{r}^{k+1} + \vec{F}^{k+1} \end{cases} \quad (3)$$

Данная схема интегрирования является полностью неявной, что обеспечивает высокую скорость сходимости, однако она требует решения системы линейных уравнений на каждой псевдоитерации. Метод Пикара с 10-ю псевдоитерациями будет называться **VP-10**.

Идея, **mEVP-opt** метода заключается в том, что дискретизованная система уравнений (2) может быть записана в стандартном виде, который представляет из себя метод простой итерации. Из соображений локального убывания квадрата нормы невязки $\vec{r}\,(\vec{x})$ линеаризованного оператора можно получить оптимальное значение шага α_{opt}[13]:

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k + \frac{1}{\alpha}[\vec{b} - A(\vec{x}^k)\vec{x}^k - \vec{f}(\vec{x}^k)$$
$$\alpha_{opt} = \left[\frac{(\vec{r}(\vec{x}^k),\ A(\vec{x}_k)\,\vec{r}\,(\vec{x}^k))}{||\,A(\vec{x}_k)\,\vec{r}\,(\vec{x}^k)||^2}\right] \quad (4)$$

Далее происходит последовательное приближение текущего значения α в сторону α_{opt}, сохраняющее условие устойчивости mEVP-метода [2]. Такой подход назовём **mEVP-opt**.

На рис. 4 продемонстрирована сходимость нормы невязки **mEVP-500** метода к норме невязки **VP-Picard** метода. Видно, что для сходимости, требуется не менее 1400 итераций **mEVP-500**. На (Рис. 5) показано преимущество **mEVP-opt** метода перед стандартным **mEVP**. Видно, что сходимость достигается примерно за 1000 итераций.

На рис. 6 представлена качественная картина сходимости скоростей **mEVP**-метода к скоростям **VP-Picard**. Можно заключить, что для получения аналогичной качественной картины, необходимо не менее 1000 итераций первого метода.

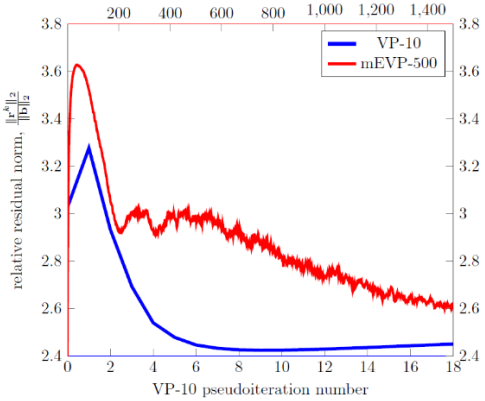


Рис. 4. Относительная норма невязки в зависимости от номера локальной итерации в момент времени $\boldsymbol{t} = \mathbf{7}$ часов. Синяя линия соответствует VP-10 методу, красная линия соответствует mEVP-500

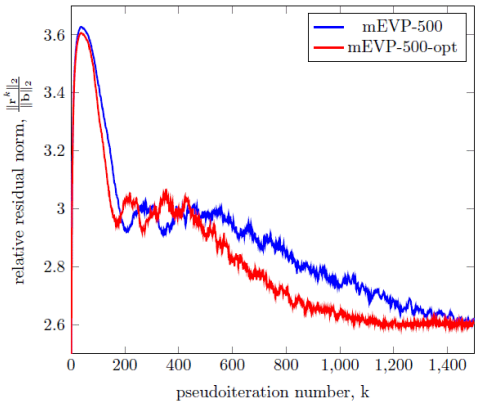


Рис. 5. Относительная норма невязки в зависимости от номера локальной итерации в момент времени $\boldsymbol{t} = \mathbf{7}$ часов. Синяя линия соответствует mEVP-500 методу, красная линия соответствует mEVP-500-opt

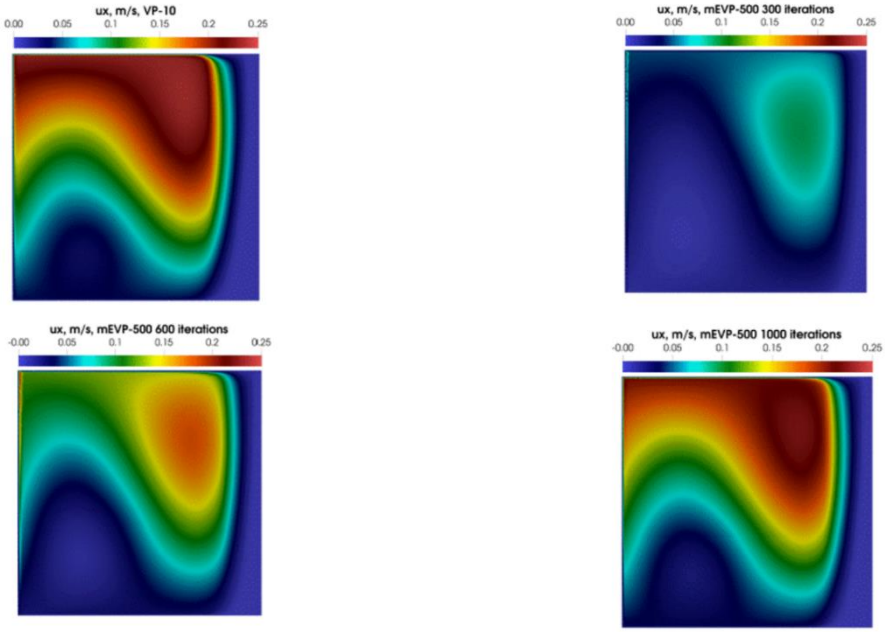


Рис.6. Значения зональной компоненты скорости льда спустя 7 часов после начала моделирования. Верхний левый рисунок – **VP-10**, верхний правый – **mEVP-500** 300 итераций, нижний левый – **mEVP-500** 600 итераций, нижний правый - **mEVP-500** 1000 итераций

3. Благодарности

Работа выполнена в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России №075-15-2019-1624). Автор выражает благодарность Н.Г. Яковлеву за ценные советы, А.А.Данилову за помощь с построением сеток, а также В.К. Крамаренко за помощь с освоением программного комплекса INMOST.

Литература

1. Hibler W.D., 1979. A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model. Journal of Physical Oceanography 9.4: 815-846.
2. Sergey Danilov et al., 2015. Finite-Element Sea Ice Model (FESIM), version 2. Geoscientific Model Development 8: 1747-1761.
3. Hunke E.C. and Dukowicz J.K., 1997. An Elastic-Viscous-Plastic Model for Sea Ice Dynamics. Journal of Physical Ocaenography 27.9: 1849-1867.
4. Sylvain Bouillon et al., 2013. The elastic-viscous-plastic method revisited. Ocean Modelling 71: 2-12.
5. Wessel, P., and W. H. F. Smith, A Global Self-consistent, Hierarchical, High-resolution Shoreline Database, J. Geophys. Res., 101, #B4, pp. 8741-8743, 1996. Roosta S. H. Parallel Processing and Parallel Algorithms: Theory and Computation. Springer, 2000. 566 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-1220-1.
6. Wessel, P., Luis, J. F., Uieda, L., Scharroo, R., Wobbe, F., Smith, W. H. F., & Tian, D. (2019). The Generic Mapping Tools version 6. Geochemistry, Geophysics, Geosystems, 20, 5556–5564.
7. https://sourceforge.net/projects/ani2d/
8. Meier, W. N., F. Fetterer, and A. K. Windnagel. 2017. Near-Real-Time NOAA/NSIDC Climate Data Record of Passive Microwave Sea Ice Concentration, Version 1.
9. http://www.inmost.org/
10. “A Fast and Highly Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs”. George Karypis and Vipin Kumar. SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 20, No. 1, pp. 359–392, 1999
11. Balay, S., et al. PETSc Users Manual. Argonne National Laboratory, 2019.
12. Lohner R. et al., 1987. Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for the euler and Navier-Stokes equations. Journal for Numerical Methods in Fluids 7: 1093-1109.
13. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам, Физматлит 2005.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗРАСТНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ СЛОЖНОСТИ СЕНСОМОТОРНОГО РИТМА ЭЭГ НА ОСНОВЕ РЕКУРРЕНТНОГО АНАЛИЗА[1*]

Е.Н. Пицик

Университет Иннополис, лаборатория нейронауки и конгитивных технологий

Процессы естественного старения в значительной степени затрагивают нейронные механизмы, поддерживающие активность мозга человека во время выполнения когнитивных и двигательных задач. Данные изменения могут быть обнаружены при анализе фоновой активности головного мозга, предшествующей движению. В данной работе применяется метод рекуррентного анализа для выявления особенностей сложности сигналов электроэнцефалограммы, соответствующих временному интервалу между совершаемыми движениями, в двух возрастных группах испытуемых. Предложенный подход продемонстрировал повышенную сложность активности мозга в μ-ритме, предшествующей движению, в группе пожилых испытуемых, что указывает на возрастное снижение функциональности моторной системы мозга.

Ключевые слова: сложность сигнала, ЭЭГ, рекуррентный анализ, возрастные изменения.

1. Введение

Изучение процессов естественного старения является задачей высокой социальной значимости. В последнее время наблюдается повышенный интерес применению методов математического анализа для выделения динамических характеристик сигналов активности кортикальной сети головного мозга [1,2]. В частности, существует большой опыт применения методов на основе энтропии для оценки сложности сигналов активности мозга различной модальности [3-5]. Известно, что сниженная сложность фоновой активности электроэнцефалограммы (ЭЭГ) характерна для естественного старения [6,7]. В работе [8] отмечается, что снижение сложности ЭЭГ у пожилых испытуемых является следствием разрушения связей в структуре кортикальной сети.

В данной работе предлагается подход к анализу ЭЭГ в период перед движением на основе рекуррентного анализа. Рекуррентный анализ (recurrence quantification analysis, RQA) применяется для оценки сложности временных рядов путём анализа рекуррентных, или повторяющихся, состояний. Меры RQA находили широкое применения для анализа нейрофизиологических данных, в том числе для детектирования ранних признаков расстройств аутистического спектра [9], рассеянного склероза [10], классификации различных фаз сна [11]. В нашей предыдущей работе, меры RQA были успешно применены для анализа ЭЭГ во время двигательной активности человека и классификации различных типов движений [12].

Таким образом, в данной работе исследована взаимосвязь между сложностью ЭЭГ-сигналов, записанных в период перед движением, и возрастом испытуемых. Результаты показали, что сложность сигналов ЭЭГ, оценённая с помощью мер RQA, увеличивается с возрастом. При этом значимые различия между группами испытуемых сосредоточены в сенсомоторном кортексе.

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-52-55001).

2. Методы

2.1. Дизайн эксперимента

В экспериментальной работе принимали участие 20 волонтёров из двух возрастных групп (10 здоровых пожилых испытуемых возрастом 65±5.7 лет, и контрольная группа из 10 молодых испытуемых возрастом 26.1±5.2 лет). Каждая экспериментальная сессия начиналась с 5-минутной записи фоновой ЭЭГ с открытыми глазами. После этого, участники выполняли двигательные задания в соответствии со звуковой инструкцией. После длинной или короткой звуковой команды (750 мс или 250 мс для правой и левой руки, соответственно), участники сжимали соответствующую руку в кулак и разжимали её после второй звуковой команды. Между командами участнику давалась пауза длиной 6-8 секунд. За одну экспериментальную сессию каждый участник совершал 60 движений руками (30 движений каждой рукой)

2.2. Предобработка ЭЭГ

Запись ЭЭГ производилась с помощью электроэнцефалографа Энцефалан-ЭЭГР-19/26 (Медиком МТД, Россия) с частотой дискретизации 250 Гц с использованием 31 электрода Ag/AgCl, расположенными в соответствии с международной системой расстановки электродов “10-10”. Полученные ЭЭГ-сигналы были обработаны режекторным фильтром с частотой отсечки 50 Гц для устранения наводки от линий электропередач. Далее, к сигналам был применён полосовой фильтр Баттерворта 5-го порядка в диапазоне 8-14 Гц, соответствующему диапазону α/μ-ритма. Глазодвигательные артефакты были устранены с помощью метода анализа независимых компонент. Из полученного набора данных для последующего анализа были выбраны фрагменты длиной 2 секунды, соответствующие периоду времени перед звуковой командой.

2.3. Рекуррентный анализ

Для корректной оценки сложности ЭЭГ-сигналов с помощью рекуррентного анализа, необходимо рассматривать восстановленную фазовую траекторию временного ряда. В данной работе для расчёта параметров вложения были применены метод взаимной информации (временная задержка τ = 5) и метод ложных ближайших соседей (размерность вложения m = 3).

В восстановленной фазовой траектории, два состояния системы считаются соседствующими, если они входят в ε-окрестность друг друга, где ε - рекуррентный порог [13]. Рекуррентная матрица может быть построена путём оценки всех таких состояний:

$$\boldsymbol{R_{i,j}(\epsilon) = \Theta(\epsilon - ||x_k(t_i) - x_k(t_j)||)}$$

где $i,j = 1,...,T - 2\tau$, Θ - функция Хевисайда, $||\cdot||$ - норма. Визуализацией рекуррентной матрицы является рекуррентная диаграмма (РД), показывающая рекуррентные и нерекуррентные состояния системы в виде чёрных и белых точек, соответственно. Предметом рекуррентного анализа является количественная оценка структур, образованных этими точками. К примеру, мера детерминизма (DET) оценивает “чёрные” диагональные линии, означающие, что два сегмента фазовой траектории двигались параллельно в течение времени, соответствующего длине линии l_{min}:

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^{N} lP(l)}{\sum_{l=1}^{N} lP(l)},$$

Другой мерой, отображающей переходы системы из хаотического в регулярное состояние и наоборот, является энтропия рекуррентного времени на основе оценки вертикальных “белых” линий:

$$RTE = \frac{1}{lnT_{max}} \sum_{t_w=1}^{T_{max}} p(t_w) ln\, p(t_w),$$

где $p(t_w)$- вероятность рекуррентного времени t_w, и T_{max}- наибольшее рекуррентное время.

Меры DET и RTE были применены к каждому из 31 канала и усреднены по эпохам.

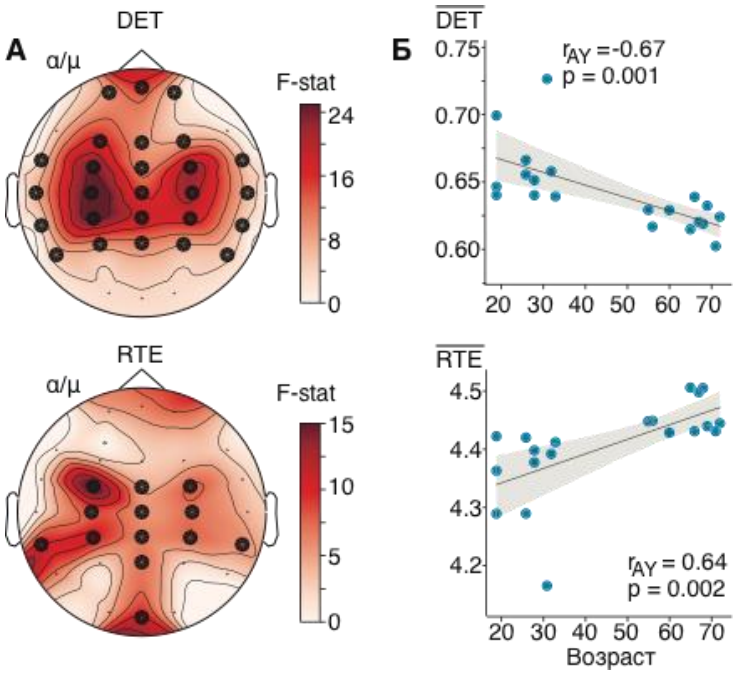


Рис. 1. А – различия между мерами сложности в двух возрастных группах, вычисленные с помощью непараметрического статистического теста на основе случайных перестановок. Чёрным выделены каналы ЭЭГ, входящие в значимые кластеры. Б – Корреляции между возрастом и мерами сложности, усреднёнными по значимому кластеру. Чёрной линией показана линейная регрессия с доверительным интервалом 95%.

3. Результаты

Рисунок 1А показывает результаты статистического сравнения сложности ЭЭГ между группами испытуемых. Обе применённые меры показали присутствие значимых кластеров (26 каналов для DET, 13 каналов для RTE). Эти различия, выявленные с помощью непараметрического теста на основе случайных перестановок могут быть проинтерпретированы как повышенная сложность сигналов ЭЭГ в период перед движениями у пожилых испытуемых, проявляющаяся по всей поверхности кортекса. В частности, наиболее выраженные различия проявляются в сенсомоторной области.

Следующим этапом, меры DET и RTE были усреднены по значимым каналам для каждого испытуемого. На рисунке 1Б показана корреляция между мерами и возрастом испытуемых. Видно, что группа пожилых испытуемых показала сниженное значение $\underline{DET}$в сравнении с молодыми (коэффициент Пирсона r = -0.63, p < 0.01). В то же время, мера $\underline{RTE}$ показала положительную корреляцию с возрастом (коэффициент Пирсона r = 0.64, p < 0.01). Данные зависимости были аппроксимированны общей линейной моделью регрессии с R^2= 0.453 для $\underline{DET}$ и R^2= 0.403 для $\underline{RTE}$. Отрицательная зависимость меры $\underline{DET}$ от возраста означает сниженную способность генерировать устойчивый α/μ-ритм у пожилых испытуемых. Также, положительная корреляция $\underline{RTE}$ говорит о более устойчивых колебаниях ЭЭГ в α/μ-ритме у контрольной группы.

4. Заключение

Рекуррентный анализ был применён для оценки возрастных различий в сигналах ЭЭГ, записанных в период перед совершаемым движением. Меры рекуррентного анализа показали присутствие значимой корреляции сложности ЭЭГ-сигналов с возрастом. В частности, полученные меры продемонстрировали увеличение сложности ЭЭГ-сигналов у пожилых испытуемых, на что указывала отрицательная корреляция $\underline{DET}$ и положительная корреляция $\underline{RTE}$ возрастом испытуемых. Данный результат подтверждает гипотезу о том, что возрастные измене-

ния структуры кортикальной сети головного мозга ведут к нарушению формирования устойчивого паттерна движений у пожилых испытуемых.

Литература

1. Liu J. et al. Measuring EEG complexity for studying the state of mental load // Journal of biomedical engineering. 1997. Vol. 14. No. 1. P. 33.
2. Cao, Z., Lin, C. T. Inherent fuzzy entropy for the improvement of EEG complexity evaluation // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2017. Vol. 26. No. 2, P. 1032-1035.
3. Sun J. et al. Complexity Analysis of EEG, MEG, and fMRI in Mild Cognitive Impairment and Alzheimer's Disease: A Review // Entropy. 2020. Vol. 22. No. 2. P. 239. DOI: 10.3390/e22020239.
4. Jia Y., Gu H., Luo Q. Sample entropy reveals an age-related reduction in the complexity of dynamic brain // Scientific reports. 2017. Vol. 7. No. 1. P. 1-10. DOI:10.1038/s41598-017-08565-y.
5. Li X. et al. Decreased resting-state brain signal complexity in patients with mild cognitive impairment and Alzheimer's disease: a multi-scale entropy analysis // Biomedical optics express. 2018. Vol. 9. No. 4. P. 1916-1929. DOI: 10.1364/BOE.9.001916.
6. Smits F. M. et al. Electroencephalographic fractal dimension in healthy ageing and Alzheimer's disease // PloS one. 2016. Vol. 11. No. 2. P. e0149587. DOI:10.1371/journal.pone.0149587.
7. Ishii R. et al. Healthy and pathological brain aging: from the perspective of oscillations, functional connectivity, and signal complexity // Neuropsychobiology. 2017. Vol. 75. No. 4. – P. 151-161. DOI:10.1159/000486870.
8. Barry R. J. et al. EEG differences in children between eyes-closed and eyes-open resting conditions // Clinical Neurophysiology. 2009. Vol. 120. No. 10. P. 1806-1811. DOI:10.1016/j.clinph.2009.08.006.
9. Bosl W. J., Tager-Flusberg H., Nelson C. A. EEG analytics for early detection of autism spectrum disorder: a data-driven approach // Scientific reports. 2018. Vol. 8. No. 1. P. 1-20. DOI:10.1038/s41598-018-24318-x.
10. Carrubba S. et al. Increased determinism in brain electrical activity occurs in association with multiple sclerosis // Neurological Research. 2012. Vol. 34. No. 3. P. 286-290. DOI:10.1179/1743132812Y.0000000010.
11. Rolink J. et al. Recurrence quantification analysis across sleep stages //Biomedical Signal Processing and Control. 2015. Vol. 20. P. 107-116. DOI:10.1016/j.bspc.2015.04.006
12. Pitsik E. et al. Motor execution reduces EEG signals complexity: Recurrence quantification analysis study //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30. No. 2. P. 023111. DOI:10.1063/1.5136246.
13. Kraemer K. H. et al. Recurrence threshold selection for obtaining robust recurrence characteristics in different embedding dimensions //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018. Vol. 28. No. 8. P. 085720. DOI:10.1063/1.5024914.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЫ ДЕЛЬТА-РОБОТА ДЛЯ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА

Ю.С. Половинкина, И.Ю. Шаршов

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

В статье рассмотрена проблема вычислительной сложности существующих математических моделей обратной кинематики дельта-робота для перемещения подвижной платформы. Авторы приводят математическую модель дельта-робота, которая позволяет уменьшить требуемое процессорное время для ее решения на 15% с сохранением точности позиционирования.

Ключевые слова: дельта-робот, обратная кинематика, математическая модель, численные методы, позиционирование.

В современном мире применяется большое количество дельта-роботов для различных прикладных задач. Поэтому механика дельта-робота изучена довольно хорошо и включает себя исследования различных аспектов, некоторые из которых все еще активно изучаются. Существуют различные математические модели, решающие задачу прямой кинематики дельта-робота. Одним направлений исследований здесь является расчет прямой кинематики с использованием соединений типа сфера-сфера [1]. По результатам исследований моделей прямой кинематики созданы различные модели, направленные на изучение рабочего объема таких роботов, а также их различных кинематических характеристик [2, 3].

Для решения задачи передвижения робота рассматривается задача обратной кинематики, которая позволяет определить геометрию рычагов дельта-робота для позиционирования подвижной платформы [4-6]. Полученные в результате математические модели используют требовательные к ресурсам вычисления, которые сложно применять на микроконтроллерах для точного позиционирования подвижной платформы робота в реальном времени. В связи с этим необходимо разработать модель, не имеющую таких ограничений по вычислительным ресурсам.

Для начала рассмотрим конструктив дельта-робота (рис. 1) [7]. Основанием робота можно считать верхнюю платформу (1), на которой крепятся моторы (3), приводящие рычаги в движение. Каждый рычаг состоит из верхнего (4) и нижнего (5) плеча. Верхнее плечо жестко закреплено на оси мотора, в то время как нижнее плечо имеет шарнирное соединение с верхним плечом (6), позволяющее ему вращаться вокруг последнего. Также к нижнему плечу на шарнирное соединение (7) крепится подвижная платформа (8), которая в данном случае всегда параллельна верхней платформе.

В процессе движения подвижной платформы происходит изменение геометрии рычагов, при этом нижнее плечо меняет свое положение в зависимости от подвижной платформы и крепления к верхнему плечу, которое совершает вращательное перемещение вокруг неподвижной оси мотора. Изменения углов верхних плеч рычагов можно рассматривать как независимые друг от друга.

Представим рычаг в виде набора отрезков, а каждую платформу в виде треугольника с вершинами в точках крепления рычагов к соответствующей платформе, и поместим в декартову систему координат с центром в геометрическом центре неподвижной платформы (рисунок 2).В данной системе координат перемещение подвижной платформы можно представить как разность между начальной и конечной точкой траектории (предполагается прямолинейное движение с постоянной скоростью), при этом изменение координат происходит линейно. В то же время существует еще одна система координат, в которой положение подвижной платформы определяется тремя углами между плоскостью верхней платформы и верхними плечами рычагов. При прямолинейном движении в декартовой системе, координаты в угловой системе изменяются нелинейно, что затрудняет процесс управления.

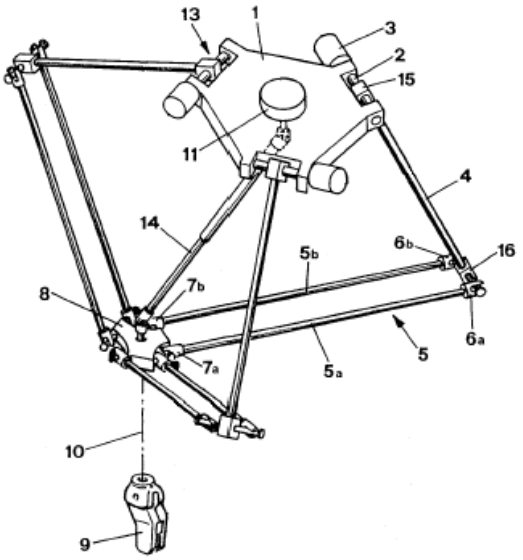


Рис. 1. Конструктив дельта-робота с 4-мя степенями свободы рабочего инструмента

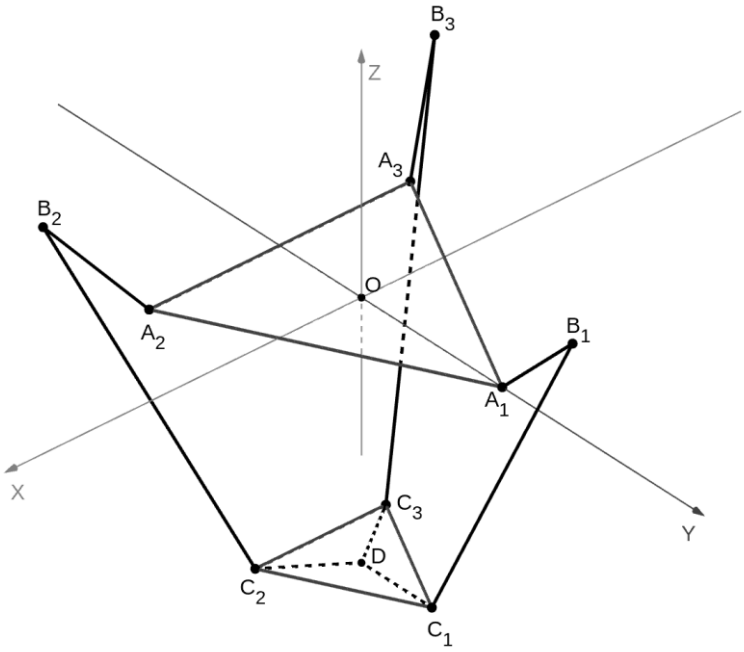


Рис. 2. Упрощенная модель дельта-робота

Проблема нелинейности приращения угла вращения мотора решается численными методами: ошибкой позиционирования подвижной платформы можно пренебречь, если в угловых координатах делать линейное приращение между заранее просчитанными контрольными точками.

Ранее в работе [8] для снижения ошибки позиционирования разработан алгоритм управления ускорением перемещаемой платформы, который позволил снизить погрешность позиционирования при движении в 2 раза. Данный алгоритм генерирует массив промежуточных точек в декартовой системе координат для численного расчета скоростей, который можно использовать как множество контрольных точек в данной задаче, однако их координаты надо перевести в угловую систему координат дельта-робота.

Рассмотрим процесс расчета угла для одного из рычагов (рисунок 3). Здесь OA – расстояние от оси мотора до центра робота, AB – верхнее плечо рычага, BC – нижнее плечо рычага, CD – расстояние от крепления нижнего плеча до центра подвижной платформы. Построим проекции точек D и C на плоскость OYZ (рисунок 3), D' и C' соответственно, и найдем их координаты

в системе координат рычага согласно уравнениям (1) – (3). Для упрощения описания для значений координат точек использованы индексы x, y, z.

$$C'_x = D'_x = 0, \quad (1)$$

$$C'_y = DC + D_y, \quad (2)$$

$$C'_z = D_z. \quad (3)$$

Однако данные координаты находятся в локальной системе координат, которая совпадает с системой координат робота. Так как каждый рычаг повернут на определенный угол α, то необходимо произвести вращение системы координат, чтобы отобразить центр платформы в системе координат рычага. Для этого необходимо выполнить шаги в соответствии с уравнениями (4) – (5).

$$D_x = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \sin\alpha, \quad (4)$$

$$D_y = Y \cdot \cos\alpha - X \cdot \sin\alpha, \quad (5)$$

где X и Y – соответствующие координаты центра платформы после движения.

Определим длину отрезка $C'B$, являющегося проекцией CB на OYZ, из прямоугольного треугольника $CC'B$

$$C'B^2 = BC^2 - C_x^2 = BC^2 - D_x^2. \quad (6)$$

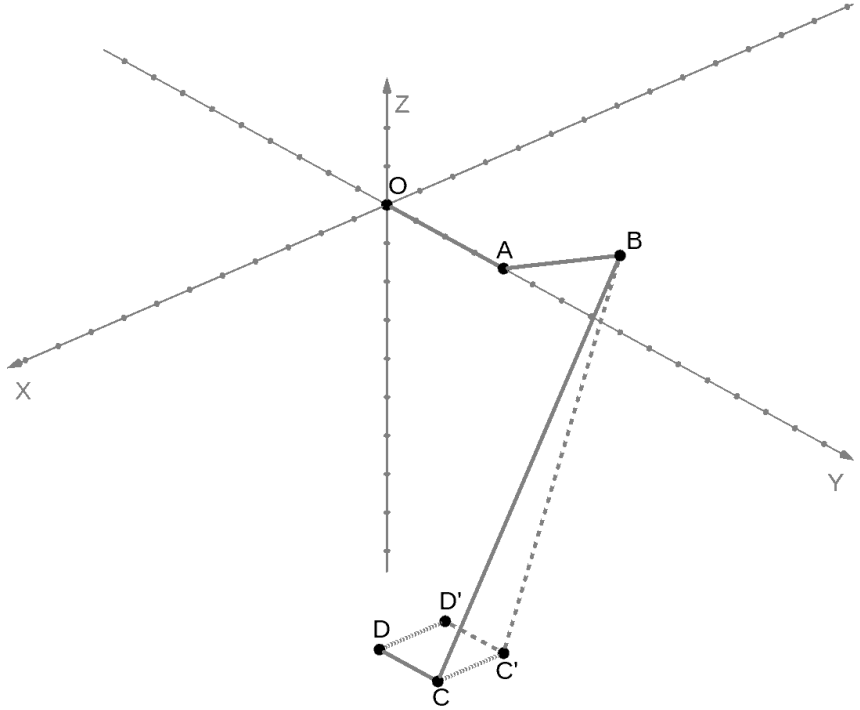


Рис. 3. Построение проекции точек D и C на плоскость OYZ

Угол OAB можно вычислить, зная координату точки B, которая является одной из точек пересечения сферы (C, BC) и окружности (A, AB, OYZ). Однако ее также можно найти путем пересечения двух окружностей $(C', C'B, OYZ)$ и (A, AB, OYZ). Для этого строится треугольник $C'AB$ и точка F на его высоте AC' (рисунок 4). Координаты точки B вычисляются согласно формулам (7) – (14), угол AOB определяется согласно формулам (15) – (16).

$$AC^2 = (A_x - C'_x)^2 + (A_y - C'_y)^2, \quad (7)$$

$$AF = \frac{AB^2 + AC^2 - C'B^2}{2AC^2}, \quad (8)$$

$$FB = \sqrt{AB^2 - AF^2}, \quad (9)$$

$$F_y = A_y + AF \cdot \cos(\sphericalangle(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{FA})), \quad (10)$$

$$F_z = A_z + AF \cdot \sin(\sphericalangle(\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{FA})), \quad (11)$$

$$\sphericalangle(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{FB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{FA}) + \frac{\pi}{2}, \quad (12)$$

$$B_y = E_y + FB \cdot \cos(\sphericalangle(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{DB})) = E_y + FB \cdot \sin(\sphericalangle(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{FA})), \quad (13)$$

$$B_z = E_z + FB \cdot \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{DB}\right)\right) = E_z + FB \cdot -\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{OZ},\overrightarrow{FA})), \quad (14)$$

$$tg(\sphericalangle OAB) = \frac{B_z}{B_y - A_y} = \frac{B_z}{B_y - OA}, \quad (15)$$

$$\sphericalangle OAB = arctg(\frac{B_z}{B_y - OA}). \quad (16)$$

Для вычисления углов остальных верхних плеч достаточно изменить значение угла α, который равен углу между плоскостями (OA_xB_x), (OYZ), где x – порядковый номер рычага.

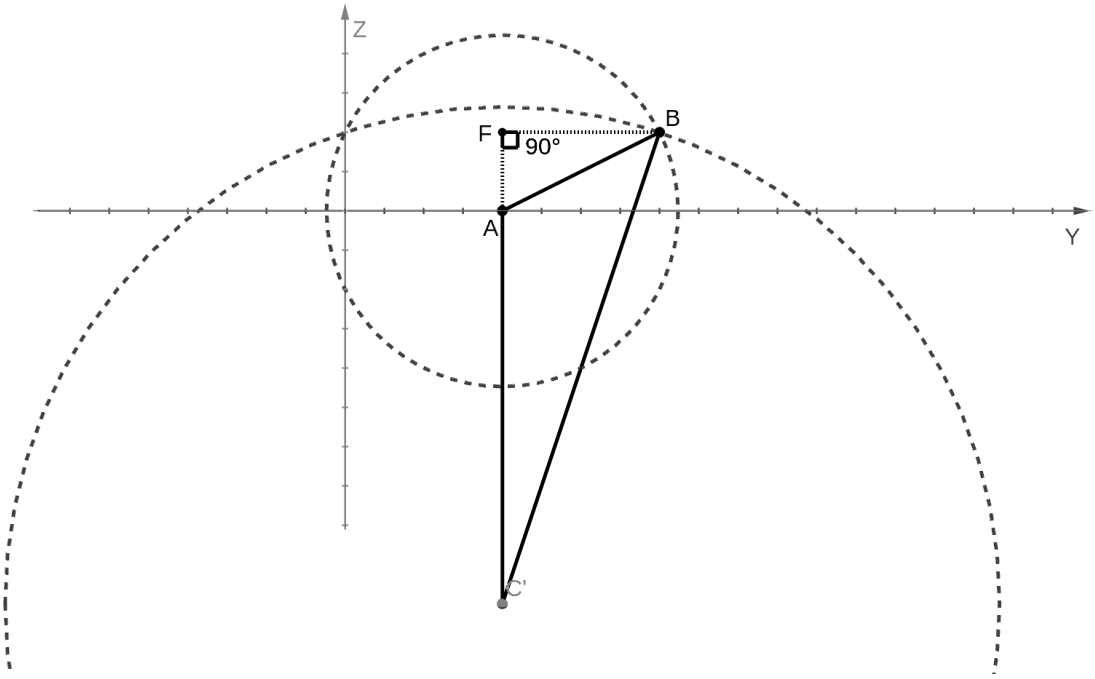


Рис. 4. Построение треугольника ABC' и точки F

Разработанная математическая модель верифицирована в САПР Компас-3D 17.1, в которой была построена соответствующая каркасная модель (рисунок 5). Данная модель имеет следующие параметры: угол между плоскостями верхних плеч равен 120°, OA – 100 мм, AB – 170 мм, BC – 277 мм, CD – 20.5 мм.

Рис. 5. Каркасная модель дельта-робота в САПР

При проверке случайных точек (таблица 1) среднее отклонение позиционирования составило 0.08°. Кроме того, произведена проверка производительности реализации по сравнению с оптимизированными реализациями в других исследованиях [6]. Построенная модель показала 15% прирост скорости вычисления при компиляции обеих реализаций с помощью gcc 9.3.0 и флагами оптимизации -O2 -march=x86-64.

Таблица 1. Верификации математической модели в САПР

Положение подвижной платформы, мм			Значение ∢AOB в САПР, °			Значение ∢AOB в мат. модели, °			Макс. отклонение, °
X	Y	Z	-120°	0°	120°	-120°	0°	120°	
16	-57	-236	-25,98	-46,72	-16,68	-25,93	-46,74	-16,63	0,05
-68	-45	-362	-42,17	-71,55	-69,85	-42,22	-71,47	-69,78	0,08
-3	29	-236	-32,48	-19,24	-34,01	-32,44	-19,30	-34,00	0,06
34	37	-229	-42,62	-16,00	-24,91	-42,70	-15,93	-24,88	0,08
-1	63	-358	-65,66	-44,08	-65,90	-65,62	-44,01	-65,97	0,07
-29	-52	-372	-50,96	-73,48	-62,84	-51,00	-73,52	-62,75	0,09
-66	-76	-293	-20,21	-64,12	-51,66	-20,12	-64,05	-51,72	0,09
-3	-88	-228	-16,08	-55,72	-17,93	-16,08	-55,79	-17,93	0,07
94	100	-214	-70,06	-0,22	-26,58	-70,02	-0,14	-26,66	0,08
-18	-41	-250	-21,32	-43,84	-30,96	-21,32	-43,88	-31,04	0,08

Исходя проведенных тестов делаем вывод о том, что модель обладает достаточной точностью и простотой вычислений для использования ее реализаций в алгоритмах управления дельта-роботом на микроконтроллерах.

Литература

1. Mahfuzah M., Rosita M., Hamdan D. Forward Kinematics of 3 Degree of Freedom Delta Robot //The 5th Student Conference on Research and Development – SCOReD 2007. 2007. DOI: 10.1109/SCORED.2007.4451401.
2. Закиров Р. И, Алиев М. И., Морозов А. И. Определение кинематических характеристик дель-та-робота по заданным параметрам рабочей области // Электронные и информационные комплексы. 2018. DOI: 10.17122/1999-5458-2018-14-4-11-16.
3. Lopez M., Castillo E. Delta robot: inverse, direct, and intermediate Jacobians // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2006. DOI: 10.1243/095440606X78263.
4. Staicu St. , Carp-Ciocardia D. C. Dynamic analysis of Clavel's Delta parallel robot // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA'2003. 2003. DOI: 10.1109/ROBOT.2003.1242230.
5. P.J. Zsombor-Murray. Descriptive Geometric Kinematic Analysisof Clavel's "Delta" Robot, 2004. 15 p. URL: https://www.cim.mcgill.ca/~paul/clavdelt.pdf (дата обращения: 14.09.2020).
6. Robert L. Williams II The Delta Parallel Robot: Kinematics Solutions // Ogio University.2016. URL: https://www.ohio.edu/mechanical-faculty/williams/html/pdf/DeltaKin.pdf (дата обращения: 16.09.2020).
7. Reymond C., Sogeva Sa Patent US4976582A, Device for the movement and positioning of an element in space; applicant and patentee C. Reymond; stated: 10.10.1990; published: 04.08.1992.
8. Шаршов И.Ю. Построение модели управления скоростью перемещения с использованием кривых Безье // Ломоносовские чтения студентов, аспирантов и молодых ученых – 2020. 2020. Том 2. С. 556–560.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРЯЩИХ ЧАСТИЦ[1*]

С.А. Проханов[1], М.В. Агафонцев[1,2], Д.П. Касымов[1,2], А.И. Фильков[3], В.В. Рейно[2], К.Е. Орлов[1]

[1]Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия
[2]Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск, Россия
[3]Университет Мельбурна, Факультет Науки, Австралия

Для улучшения программного комплекса по детектированию и трекингу горящих частиц проведена серия лабораторных и полунатурных экспериментов на установке «Огненный Дракон». В качестве частиц использованы частицы природного происхождения (кора и веточки сосны), а также древесные пеллеты (древесные топливные гранулы). Для обнаружения горящих частиц на термограммах был протестирован алгоритм YOLOv4, основанный на нейросетях, и проведено сравнение с Лапласиан Гауссиана (LoG) и Разность Гауссианов (DoG). Для оценки точности работы детекторов применялась метрика F-мера. Анализ сравнения показал, что алгоритм с применением нейросети глубого обучения YOLOv4 позволяют получить лучшую точность для детектирования частиц.

Ключевые слова: программный комплекс, анализ и распознавание изображений, нейронная сеть, моделирование.

1. Введение

На текущий момент не существует универсального метода компьютерного зрения, подходящего для отслеживания траектории движения горящих частиц в последовательности кадров. Все существующие алгоритмы требуют адаптации.

Как правило, для анализа видеопотока используются алгоритмы для детектирования объектов и их трекинга. Основной проблемой детектирования частиц является отсутствие данных необходимых для тренировки нейросетей. Все модели глубокого обучения для своей работы требуют огромные массивы входных данных для обучения. В настоящее время в публичном доступе отсутствуют наборы тестовых данных подходящего объема. Единственное решение состоит в создании уникального набора обучающих данных. Для этого требуется применение ручной маркировки изображений, т.е. необходимо набрать большой набор видеороликов и проаннотировать его. Однако, это длительный и сложный процесс. Сложностями также является детектирование объектов на загроможденном фоне и обнаружение небольших объектов, так как большинство детекторов основанных на сверточных нейронных сетях плохо работают на мелких объектах.

2. Детектор

Для обнаружения и классификации объектов на изображениях в последнее время широко применяются методы, основанные на применении сверточных нейронных сетей [1]. Свёрточная нейронная сеть представляет собой специальную архитектуру нейронных сетей, которая изначально нацелена на эффективное распознавание объектов на изображении. Сверточные нейронные сети работают на основе фильтров, которые занимаются распознаванием определенных характеристик изображения. Фильтр представляет собой матрицу весов (чисел), которые подстраиваются под поиск определенных характеристик на изображениях. Для определения искомой характеристики на изображении применяется операция свертки. Свертка пред-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00548).

ставляет собой сумму произведений элементов фильтра и матрицы входных сигналов. В итоге, после применения свертки, в случае обнаружения искомой характеристики, будет выдаваться число с большим значением, иначе – с меньшим.

Основные современные детекторы, основанные на применении сверточных нейронных сетей, позволяющие проводить обработку видеопотока в режиме реального времени: Faster R-CNN [2], SSD [3], YOLO [4], R-FCN [5]. Проанализировав функциональные возможности различных нейронных сетей, был сделан выбор в пользу максимально быстрых, но не допускающих значительной потери точности моделей. В качестве нейронной сети был выбрана современная сеть YOLOv4 (You Only Look Once) [10]. YOLO – одна из самых быстрых нейронных сетей, позволяет различать объекты за один прогон. YOLO использует сетку из заранее заданных окон, для исключения, чтобы исключить многократное определение одного и того же объекта используется специальный коэффициент перекрытия окон Intersection over Union (IOU).

Для тестирования YOLOv4 применялись алгоритмы на основе свертки с Гауссианом. Алгоритмы нацелены на выявление на изображении областей более ярко выраженных, чем окружающие. Тестировались алгоритмы Лапласиан Гауссиана (LoG) и Разность Гауссианов (DoG).

3. Создание базы аннотированных видеороликов

Для создания базы аннотированных видеороликов используемых для валидации сверточной нейронной сети были проведены в лабораторных условиях исследования генерации горящих частиц. Генерация частиц осуществлялась при помощи уникальной установки «Генератор горящих и тлеющих частиц» [11]. В качестве частиц были использованы частицы природного происхождения (кора и веточки сосны), а также древесные пеллеты (древесные топливные гранулы). Размеры частиц были выбраны в соответствии с данными натурных экспериментов, по результатам которых было отмечено, что частицы похожих размеров преобладают во время низового пожара в сосновом лесу. Для изготовления частиц коры использовалась кора сосны (Pinus sibirica). Частицы имели площадь 10×10, 15×15, 20×20, 25×25, 30×30 мм2 и толщину 5 мм. Веточки сосны диаметром 2–4, 4–6, 6–8 мм и длиной 10, 20, 40 и 60 мм были использованы для изготовления частиц веточек. Диаметр древесных пеллет составил 8 мм, длина гранул от 30 до 50 мм. Масса частиц варьировалась в экспериментах в диапазоне 50-800 граммов.

Для определения температуры генерируемых на установке частиц использовался тепловизор JADE J530SB с узкополосным оптическим фильтром, со спектральным интервалом 2.5 – 2.7 мкм, позволяющим измерять температуру в диапазоне 310 – 1500 С. Матрица тепловизора имела размеры 320x240 пикселей. Съемка производилась с использованием объектива, имеющего фокусное расстояние F = 50 мм, частота регистрации составляла 50 кадров/сек. Расстояние от выходной части генератора частиц до тепловизора составляло 8.7 м. Для определения геометрических параметров летящих частиц был использован тепловизор FLIR X6530sc с рабочим спектральным интервалом 1.5 – 5.1 мкм. Матрица тепловизора имеет размеры 640x512 пикселей. Съемка производилась с использованием объектива, имеющего фокусное расстояние F = 25 мм, частота регистрации составляла 50 кадров/сек.

Для удобного аннотирования горящих частиц было разработанное специальное программного обеспечение.

Общее число проаннотированных объектов (firebrands) составило 8003. Выборка делилась на обучающую (train), тестовую (test) и валидационную (validation). Обучающая выборка включала в себя 6445 частиц, тестовая - 798 частиц и валидационная – 760 частиц. Валидационная выборка использовалась для подбора параметров модели. На тестовой выборке оценивалась итоговая точность. Сам процесс обучения модели происходил на обучающей выборке.

Обучение модели проходило на двух картах NVidia RTX 2080Ti, основные параметры модели: аугментация "mosaic", max_bathes = 6000, learning_rate = 0.001, widht=416, height=416, loss function – ciou. Время, затраченное на обучение, составляло примерно 5 часов. Использовался framework – darknet и нейронная сеть YOLOv4.

4. Заключение

Из таблицы 1, где представлена оценка точности алгоритмов на основе метрики F1, видно, что на тестовой выборке, в которую входили разные частицы (пеллеты, кора и ветки), лучшую точность определения объектов удалось получить с применением детектора, основанного не нейросети YOLOv4.

Таблица 1. Оценка точности алгоритмов на основе метрики F1 [12]

	YOLOv4, %	**LoG, %**	**DoG, %**
F1-score	90	72	67

Хотя для тренировки модели и достижения такой точности потребовался весьма трудоемкий и длительный по времени процесс аннотирования изображений, удалось достичь высокой точности для разных типов частиц. Для дальнейшего увеличения точности работы детектора, в дальнейшем планируется расширение базы аннотированных видеороликов.

5. Заключение

Для работы с программным комплексом и создания базы аннотированных видеороликов был разработан графический интерфейс пользователя (GUI). GUI позволяет осуществлять различные манипуляции с кадрами, запускать выбранный детектор, а также генерировать результаты работы в формате видеоролика.

В лабораторных условиях проведена серия опытов на экспериментальной установке, моделирующей перенос горящих и тлеющих частиц коры и веточек сосны, а также древесных пеллетов, в зависимости от количества частиц, а также при различных параметрах съемки инфракрасными камерами высокого разрешения.

Для обнаружения горящих частиц на термограммах был протестирован алгоритм детектора, основанный на YOLOv4, и проведено сравнение с Лапласиан Гауссиана (LoG) и Разность Гауссианов (DoG). Анализ сравнения показал, что алгоритм с применением нейросети глубокого обучения YOLOv4 позволяют получить лучшую точность для детектирования частиц минимум на 18 %.

Литература

1. LeCun Y., Boser B., Denker J.S., Henderson D., Howard R.E., Hubbard W. and Jackel L.D. Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition // Neural Computation. 1989. Vol. 1, No. 4. P. 541–551.
2. Ren S, He K, Girshick R, Sun J. Faster r-cnn: towards real-time object detection with region proposal networks // Advances in neural information processing systems. 2015. P. 1–9.
3. Liu W, Anguelov D, Erhan D, Szegedy C, Reed S, Fu C-Y, Berg A.C. SSD: single shot multibox detector // European conference on computer vision. Springer. 2016. P. 21–37.
4. Redmon J, Divvala S, Girshick R, Farhadi A. You only look once: unified, real-time object detection // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2016. P. 1–10.
5. Dai J, Li Y, He K, Sun J. R-FCN: object detection via region-based fully convolutional networks // Advances in neural information processing systems. 2016. P. 1–9
6. He K, Zhang X, Ren S, Sun J. Deep residual learning for image recognition // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. 2016. P. 770–778.
7. Szegedy C, Ioffe S, Vanhoucke V, Alemi A. Inception-v4, inception-resnet and the impact of residual connections on learning // Available from arXiv, No. 1602.07261. 2016. P. 1–12.
8. Liu Z, Li X, Luo P, Loy C-C, Tang X. Semantic image segmentation via deep parsing network // Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. 2015. P. 1–11.
9. He K, Gkioxari G, Dollár P, Girshick R. Mask r-cnn // Available from arXiv, No.1703.06870. 2018. P. 1–12.

10. Bochkovskiy A., Wang C.-Y., Liao H.-Y.M. YOLOv4: Optimal Speed and Accuracy of Object Detection // Available from arXiv, No. 2004.10934. 2020. P. 1–17.
11. Патент ПрЭВМ № 2015617763, 22.07.2015. IRaPaD. Автоматическое определение характеристик движущихся частиц на тепловом видео в инфракрасном диапазоне // Патент ПрЭВМ / Фильков А.И. (RU), Проханов С.А. (RU)
12. Filkov A, Prohanov S, Particle Tracking and Detection Software for Firebrands Characterization in Wildland Fires // Fire Technology. 2018. Vol. 55. P. 817–836.

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА СЕТИ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЙРОНОВ ПРИ КОНТРОЛИРУЕМОМ ОБУЧЕНИИ[1*]

М.М. Пугавко[1,2], О.В. Масленников[1,2], В.И. Некоркин[1,2]

[1]*Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,*
[2]*Научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»*

Рекуррентные сети искусственных спайковых нейронов, обученные выполнять целевые функции, являются перспективным инструментом для понимания динамических принципов обработки информации в вычислительной нейробиологии. В данной работе представлена система этого типа на основе дискретной модели нейрона. Целевые сигналы, используемые для контролируемого обучения сети, являются синусоидальными функциями различных частот. Анализируется пространственно-временная динамика до и после обучения. Исследуется влияние собственной динамики нейронов и количества нейронов в сети на качество обучения. Также мы рассматриваем случай неоднородной сети.

Ключевые слова: машинное обучение, спайковые нейроны, нелинейная динамика, рекуррентные сети, резервуарные вычисления

В работе рассматривается искусственная спайковая нейронная сеть, обучаемая генерировать целевые функции на основе концепции резервуарных вычислений [1-3], которая объединяет подходы машинного обучения и вычислительной нейронауки. Главным элементом резервуара является искусственная нейронная сеть-резервуар, состоящая из дискретных модельных нейронов Курбажа-Некоркина [4,5]. Даная модель нейронов является дискретным аналогом модели ФитцХью-Нагумо с разрывной правой частью и позволяет воспроизводить такие режимы активности, как периодические спайковые колебания, подпороговые колебания, спайк-подпороговые колебания, спайк-берстовые колебания и различные хаотические режимы.

Структура взаимодействия нейронов друг с другом описывается с помощью статической матрицы весов, которая генерируется при инициализации сети и не изменяется в процессе обучения. Элементы данной матрицы задаются по нормальному закону с плотностью ненулевых элементов 10%. Выходные веса задаются в виде вектора, компоненты которого в начальный момент времени равны нулю. В процессе обучения с помощью метода FORCE [6], основанного на рекурсивном методе наименьших квадратов [7], вектор выходных весов изменяется так, чтобы выход сети соответствовал целевой функции. В качестве целевой функции был выбран простой синусоидальный сигнал. Основная идея метод обучения FORCE заключается в быстром подавлении хаотической активности в начале обучения. Данный процесс определяется двумя параметрами связи. Первый параметр - это множитель статической матрицы весов, который отвечает за хаотическое поведение нейронов до обучения. Второй параметр характеризует величину обратной связи. Через обратную связь в сеть подается выход всей системы и, таким образом, происходит изменение поведения нейронов в соответствии с выходом сети. Задача обучения состоит в том, чтобы система после обучения автономно генерировала целевую функцию. Для оценки качества работы системы после обучения использовался логарифм среднеквадратичной ошибки.

Мы исследовали ошибку в плоскости параметров частоты целевой функции и параметра нейронов ε, отвечающего за частоту генерации спайков. Установлено, что для каждого значения частоты целевой функции существует оптимальный интервал значений параметра ε, когда обучение наиболее эффективно или, другими словами, когда ошибка обучения минимальна.

[1*] Работа поддержана РНФ (проекты № 19-12-00338 и 19-72-00112) и РФФИ (проект № 18-02-00406).

Мы также рассмотрели влияние неоднородности параметра ε на качество обучения и показали, с ростом неоднородности происходит увеличение интервала частот целевой функции, которые система способна воспроизводить с хорошей точностью. Также мы провели исследование влияния количества нейронов в сети на качество обучения и установили, что ошибка уменьшается с ростом количества нейронов. При небольших размерах сети с ростом числа нейронов ошибка быстро уменьшается, что характерно для выбранного метода обучения, а далее ошибка уменьшается более плавно.

Мы также проанализировали влияние величины разрыва модели нейронной активности на качество обучения и установили, что наличие разрыва может положительно сказываться на качестве обучения при определенных значениях параметра ε.

Важной частью работы является исследование пространственно-временной динамики. С помощью исследования пространственно-временных диаграмм мы установили, что до обучения случайные рекуррентные связи между нейронами приводят к их хаотической динамике. В процессе обучения динамика системы перестраивается и каждый нейрон начинает генерировать периодическую спайковую последовательность, которая коррелирует с выходом сети. После сортировки нейронов по времени генерации спайков мы получили три группы нейронов с качественно различной динамикой. Во-первых, существует два противофазных кластера спайковой активности. Во-вторых, существует два небольших домена со спайковыми нейронами, фазы которых принимают промежуточные значения между двумя противофазными кластерами. В-третьих, существует небольшой домен, состоящий из нейронов, демонстрирующих некогерентную активность. С помощью метода главных компонент мы также установили, что в процессе обучения в многомерном фазовом пространстве системы формируется периодическая траектория, соответствующая периодическому выходу. Таким образом, мы установили связь фазового пространства с выходом сети, который соответствует периодической целевой функции. Результаты исследования опубликованы в работе [8].

Литература

1. Maass W, Natschläger T, Markram H. Real-time computing without stable states: a new framework for neural computation based on perturbations. Neural Comput 2002; 14 (11): 2531–60.
2. Lukosevicius M, Jaeger H, Schrauwen B. Reservoir computing trends. KI-Künstl Intell 2012; 26. doi: 10.1007/s13218-012-0204-5.
3. Lukosevicius M, Jaeger H. Reservoir computing approaches to recurrent neural network training. Comput Sci Rev 2009;3. doi: 10.1016/j.cosrev.2009.03.005.
4. Nekorkin VI, Vdovin LV. Discrete model of neural activity. Izvestiya VUZ Appl Nonlinear Dyn 2007;15(5):36–60.
5. Courbage M, Nekorkin V, Vdovin L. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity. Chaos 2007;17(4):043109.
6. Sussillo D, Abbott LF. Generating coherent patterns of activity from chaotic neural networks. Neuron 2009;63(4):544–57.
7. Haykin SS. Adaptive filter theory. Pearson Education; 2005.
8. M.M. Pugavko., O.V. Maslennikov, V.I. Nekorkin. Dynamics of spiking map-based Neural networks in problems of supervised learning // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020; 90:105399.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ КОНЦЕНТРАЦИИ МОЛЕКУЛ ВНЕКЛЕТОЧНОГО МАТРИКСА МОЗГА ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ВО ВРЕМЕНИ СРЕДНЕМ УРОВНЕ НЕЙРОННОЙ АКТИВНОСТИ[1*]

М.А. Рожнова[1], Д.В. Банденков[1], В.Б. Казанцев[1,2,3], Е.В. Панкратова[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Самарский государственный медицинский университет,
[3]Университет Иннополис

Данная работа посвящена исследованию динамических режимов в модели внеклеточного матрикса мозга (ВКМ), учитывающей изменения во времени среднего уровня нейросетевой активности. Были изучены бифуркационные механизмы возникновения различных мультистабильных режимов, в частности, режимов сосуществования нерегулярных изменений концентрации молекул ВКМ, описываемых различными хаотическими аттракторами, с регулярными колебаниями.

Ключевые слова: хаос, внеклеточный матрикс мозга, мультистабильность.

1. Введение

Большой объем данных, получаемых в результате многочисленных экспериментальных исследований, связанных с изучением нейронной активности, позволяет разрабатывать и использовать в дальнейшем более совершенные математические модели для построения искусственных нейронных сетей. В настоящее время известно, что внеклеточный матрикс мозга (ВКМ) может играть важную роль в обработке внешней информации в нейронных сетях [1]. В частности, формируемые активностью нейронов изменения концентраций молекул ВКМ, влияют на синаптическую пластичность и определяют решающую роль в регуляции процессов обучения и памяти [1]. Как было недавно показано, взаимодействие нейронов и внеклеточного матрикса мозга достаточно эффективно может быть описано в рамках математической модели с обратной связью [2]. На основе использования данной модели в работе [3] были продемонстрированы нетривиальные бистабильные режимы динамики ВКМ для различных постоянных уровней средней нейросетевой активности. Однако, рассмотрение полной многомерной модели гомеостатической регуляции нейрональной активности с помощью ВКМ показало, что при некоторых условиях уровень нейросетевой активности может изменяться во времени. В данной работе мы исследуем особенности усложнения динамики ВКМ при учете таких изменений.

2. Описание математической модели

Изменение концентрации молекул ВКМ, Z, и молекул протеаз, P, в результате установления некоторого уровня нейронной активности Q описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{Z} = -(\alpha_Z + \gamma_P P)Z + \beta_Z \left(Z_0 - \dfrac{Z_0 - Z_1}{1 + e^{-\frac{(Q+\alpha_0 Z - \theta_Z)}{k_Z}}} \right) \\ \dot{P} = -\alpha_P P + \beta_P \left(P_0 - \dfrac{P_0 - P_1}{1 + e^{-\frac{(Q+\alpha_0 Z - \theta_P)}{k_P}}} \right) \end{cases}$$

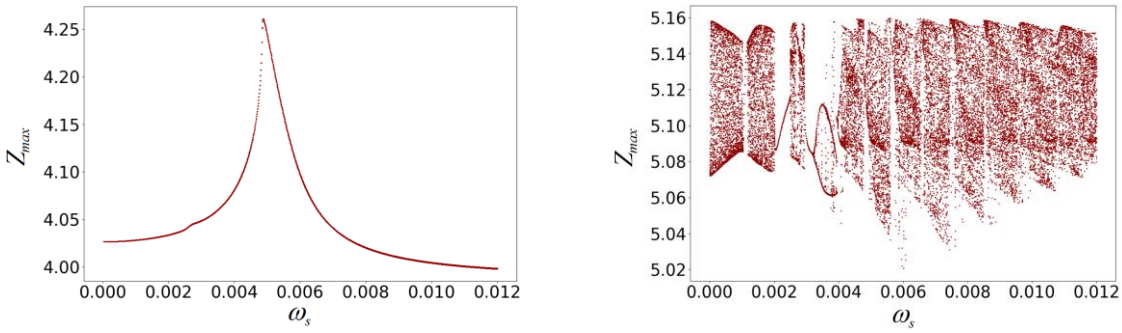
[1*]Работа выполнена при поддержке министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 14.Y26.31.0022).

где $Q=Q_0+Q_s\sin(\omega_s t)$ – меняющийся относительно некоторой величины Q_0 уровень нейронной активности. Значения параметров выбраны следующими: α_Z=0.001 мс$^{-1}$, γ_P=0.1, β_Z=0.01 мс$^{-1}$, Z_0=0, Z_1=1, k_Z=0.15, α_P=0.001 мс$^{-1}$, β_P=0.01 мс$^{-1}$, P_0=0, P_1=1, θ_Z=5.7, θ_P=6, k_P=0.05. Для случая, когда Q_s=0, из работы [3] следует, что в фазовом пространстве рассматриваемой системы сосуществуют устойчивое состояние равновесия (Z^*, P^*)=(4.04, 1.93) и устойчивый предельный цикл, для которого Z_{min}≈1.02 и Z_{max}≈5.17 (т.е. $\Delta Z= Z_{max}–Z_{min}$≈4.15) и период T_c≈5752 мс (т.е. частота собственных колебаний f_c≈0.00017 мс$^{-1}$). При этом необходимо отметить, что параметры θ_Z и θ_P выбраны вблизи бифуркации двукратного предельного цикла. Для иллюстрации изменений в динамике концентрации молекул ВКМ при наличии малых отклонений Q от Q_0, в данной работе получены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных значений Z при изменении частоты ω_s для двух значений Q_s: Q_s=0.01 и Q_s=0.02. Принимая во внимание бистабильность в поведении системы при Q_s=0, численное исследование проводилось для двух различных начальных условий: (6; 2) – вблизи аттрактора, соответствующего колебательному режиму, и (3.7; 2) – вблизи устойчивого состояния равновесия.

3. Реализация численного эксперимента и обсуждение результатов

Для реализации необходимого численного эксперимента были выбраны два языка программирования Python и C++. Python обладает огромным количеством библиотек для визуализации данных и создания gui, например, matplotlib, которая и была использована для построения бифуркационной диаграммы. С целью сокращения времени работы программы все участки вычислений выполнялись во внешнем исполняемом файле, написанном на C++. Поэтому была создана dll библиотека, как подключаемый модуль для Python. Для обмена данных между языками программирования был использован Boost.Python.

Для увеличения производительности, к исполняемому файлу C++ был подключен OpenMP-стандарт, определяющий набор директив компилятора, библиотечных процедур и переменных среды окружения для создания многопоточных программ. Он позволяет быстро распараллелить программы с большим количеством вычислений благодаря добавлению в последовательный код OpenMP-директив. При этом стандарт предоставляет разработчику большие возможности контроля над поведением параллельного приложения.



(a) (b)

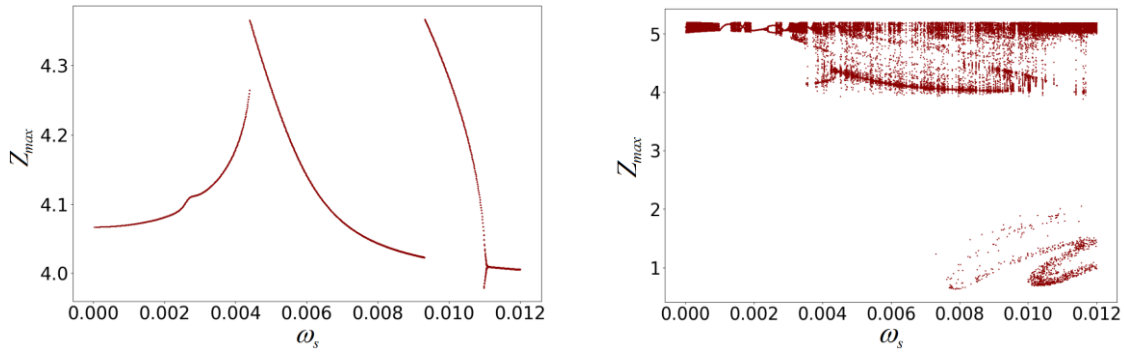
Рис. 1. Бифуркационные диаграммы, полученные при Q_s=0.01 и различных начальных условиях: (a) (Z_0, P_0)=(3.7; 2); (b) (Z_0, P_0)=(6; 2)

Интегрирование проводилось методом Рунге-Кутта четвертого порядка с шагом 0.01. Учитывая медленное изменение во времени переменных, для получения достаточного для построения бифуркационных диаграмм количества данных рассматривался интервал по времени от 0 до 200 000, при этом точки, полученные при t<70 000, не учитывались. Изменение параметра ω_s выбиралось в интервале от 0 до 0.012 с шагом 0.00001. Изменение времени счета данных для бифуркационных диаграмм при реализации последовательной и параллельной схем приведены в таблице 1.

Таблица 1. Время счета данных для бифуркационных диаграмм

Q_s	(Z_0, P_0)	Время счета при последовательной схеме, с	Время счета при параллельной схеме, с
0.01	(3.7; 2)	538	149
	(6; 2)	540	162
0.02	(3.7; 2)	487	117
	(6; 2)	494	147

На Рис.1(a) и 1(b) представлены диаграммы, полученные для Q_s=0.01. При выборе начальных условий (Z_0, P_0)=(3.7; 2) фазовая траектория с течением времени приближается к устойчивому предельному циклу. Максимальные значения переменной Z на этом цикле показаны на Рис.1(a). При изменении ω_s хорошо выражен резонансный характер кривой: при ω_s≈0.005 не только Z_{max} принимает заметно большие значения, но и амплитуда цикла существенно увеличивается. При (Z_0, P_0)=(6; 2), Рис.1(b), при изменении частоты можно наблюдать чередование областей с регулярной и сложной хаотической динамикой. Таким образом, при Q_s=0.01 в рассматриваемой системе при различных ω_s возможно сосуществование не только двух регулярных режимов, которым соответствуют циклы различной амплитуды, но и сосуществование цикла с хаотическим аттрактором.



(a) (b)

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы, полученные при Q_s =0.02 и различных начальных условиях: (a) (Z_0, P_0)=(3.7; 2); (b) (Z_0, P_0)=(6; 2)

Из диаграмм, представленных на Рис.2(a) и 2(b), следует, что динамика концентрации молекул ВКМ при Q_s=0.02 становится сложнее: возникает два диапазона по частоте, где Z_{max} (а также и амплитуда колебаний) заметно увеличивается. Появление большого числа точек на Рис.2(b), удаленных от Z_{max}≈5.1 связано с тем, что при больших ω_s собственная частота колебаний системы, связанная с частотой цикла, наблюдаемого при Q_s=0, существенно меньше, f_c«ω_s. При этом численная реализация алгоритма для подсчета максимумов фиксирует все локальные максимумы в зависимости $Z(t)$.

4. Заключение

В данной работе изучены механизмы усложнения динамики концентрации молекул ВКМ при наличии слабо изменяющегося уровня нейросетевой активности для параметров, выбранных в окрестности бифуркации двукратного предельного цикла [3]. Разработан алгоритм эффективного распараллеливания, позволяющий получить почти четырехкратное ускорение при подсчете значений для бифуркационных диаграмм.

Литература

1. Dityatev A.E., Schachner M., Sonderegger P. The dual role of the extracellular matrix in synaptic plasticity and homeostasis. Nat. Rev. Neurosci. 2010. Vol. 11. P. 735–746.DOI: 10.1038/nrn2898.
2. Kazantsev V.B., Gordleeva S.Yu., StasenkoS.V., Dityatev A.E. A homeostatic model of neuronal firing governed by feedback signals from the extracellular matrix. PLoSOne. 2012. Vol. 7, No. 7. DOI: 10.1371/journal.pone.0041646.
3. Lazarevich I.A., Stasenko S.V., Rozhnova M.A., Pankratova E.V., Dityatev A.E., Kazantsev V.B. Activity-dependent switches between dynamic regimes of extracellular matrix expression. PLoS One. 2020. Vol. 15, No. 1. DOI: 10.1371/journal.pone.0227917.

ХАОС И ГИПЕРХАОС В МОДЕЛЯХ ГИРОРЕЗОНАНСНЫХ ИСТОЧНИКОВ НА ОСНОВЕ ВИНТОВЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ ПРИ ВВЕДЕНИИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ[1*]

Р.М. Розенталь[1,4], О.Б. Исаева[2,3], А.Г. Рожнев[2,3], Н.С. Гинзбург[4], И.В. Зотова[4], А.С. Сергеев[4]

[1]Научно-образовательный математический центр ННГУ
[2]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
[3]Саратовский филиал ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН
[4]Институт прикладной физики РАН, г. Н.Новгород

Рассмотрена динамика нестационарных распределенных моделей, описывающих взаимодействие винтового электронного потока с попутной (режим гиро-ЛБВ) и обратной (режим гиро-ЛОВ) волнами в винтовом гофрированном волноводе в условиях введения дополнительной обратной связи. На основе временных реализаций показано существование хаотических и гиперхаотических режимов работы. Показано, что в режиме гиро-ЛБВ области гиперхаотических режимов существенно шире, по сравнению с режимом гиро-ЛОВ, а корреляционная размерность аттракторов выше.

Ключевые слова: гиперхаос, гирорезонансные СВЧ источники, запаздывающая обратная связь

1. Введение

Изучение сложной и хаотической динамики в различных физических системах актуально как с общефизической точки зрения, так и для использования в различных приложениях. Гиперхаотические режимы представляют собой следующий после хаоса уровень усложняющейся временной динамики, при котором у аттракторов системы в фазовом пространстве положительными становятся два или более показателя Ляпунова. Возможность реализации гиперхаотической динамики в реальных физических системах привлекает значительное внимание, начиная в работы [1], где впервые гиперхаос был реализован в электронном генераторе на сосредоточенных элементах. Недавние исследования показали, что во многих случаях системы связи, использующие хаотические сигналы, характеризуются в действительности ограниченной конфиденциальностью. Одним из способов повышения уровня зашиты передаваемой информации является использование систем с хаотической динамикой высокой размерности [2]. Это, в свою очередь, определяет интерес к реализации подобных режимов в электронных СВЧ приборах, включая приборы гирорезонансного типа на основе винтовых гофрированных волноводов.

2. Модель электронно-волнового взаимодействия

Для описания процессов электронно-волнового взаимодействия использовалась следующая система уравнений [3]:

[1*] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №19-08-00955.

$$\begin{cases} i\dfrac{g^2}{4}\dfrac{\partial^2 a}{\partial Z^2}+\dfrac{\partial a}{\partial \tau}+i\alpha b=\dfrac{G}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} p_+^n d\theta_0 \\ \left(\dfrac{\beta_{gr}}{\beta_{\|0}}\dfrac{\partial}{\partial Z}\pm\dfrac{\partial}{\partial \tau}\right)b-i\Delta_g b+i\alpha a=0 \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial Z}+\dfrac{\partial}{\partial \tau}\right)p_+ + i\dfrac{p_+}{n}\left(\Delta-1+|p_+|^2\right)=ia\left(p_+^*\right)^{n-1} \end{cases}, \qquad (1)$$

где $a,b(Z,\tau)$ – медленно меняющиеся амплитуды квазикритической и рабочей волны, Z,τ – нормированные продольная координата и время, p_+ – нормированный импульс частиц, остальные величины являются параметрами, которые выбирались исходя из характеристик экспериментально реализованных гиро-ЛБВ и гиро-ЛОВ [4]. Знак "+" во втором уравнении относится к режиму взаимодействия с попутной волной, знак "–" – с обратной волной.

При записи граничных условий будем полагать, что в сечении $Z=0$ электроны равномерно распределены по фазам циклотронного вращения и не имеют начального разброса по поперечным скоростям, так что $p_+(Z=0)=\exp(i\theta_0),\ \theta_0\in[0,2\pi)$.

Для квазикритической волны на границах пространства взаимодействия используются условия излучения:

$$\left.\left(a\mp\frac{g}{2\sqrt{\pi i}}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau-\tau'}}\frac{\partial a(Z,\tau')}{\partial Z}d\tau'\right)\right|_{Z=0,L}=0, \qquad (2)$$

где L – нормированная длина системы. Учет запаздывающей обратной связи выполняется через граничное условие для рабочей волны:

$$b(Z=0,\tau)=S\cdot b(Z=L,\tau-T), \qquad (3)$$

для случая гиро-ЛБВ и

$$b(Z=L,\tau)=S\cdot b(Z=0,\tau-T), \qquad (4)$$

для случая гиро-ЛОВ, где S – коэффициент передачи, T – нормированное время задержки.

3. Алгоритмы анализа данных

При вычислении показателей Ляпунова на основе вычисленной временной динамики амплитуды рабочей волны в выходном сечении использован подход, предложенный в работе [5]. На наш взгляд, он более удачен, по сравнению с наиболее известной методикой [6], позволяя существенно экономить машинное время. В соответствии с [5] спектр ляпуновских показателей вычислялся следующим образом:

$$\Lambda_i=\lim_{t\to\infty}\Sigma_i(t),\quad \Sigma_i(t=MT)=\frac{1}{MT}\sum_{m=1}^{M}\ln\left\|\mathbf{b}^{(T)}(t=mT)\mathbf{e}_i(t=mT)\right\|, \qquad (5)$$

где ($\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_d$) – набор из d векторов возмущения (d не превышает размерности фазового пространства), а матрица $\mathbf{b}$ – линейный оператор эволюции. Вектора возмущений выбираются ортогональными в начальный момент времени. Во избежание схождения их к единственному самому неустойчивому направлению после каждого вычисления очередного вклада в накапливающиеся усредненные суммы Σ_i проводится дополнительная процедура ортогонализации по Граму–Шмидту, которая выстраивает вектора в порядке убывания неустойчивости отвечающих им направлений.

Располагая в рассматриваемой задаче временным рядом для единственной переменной $|a_i|$, перед применением описанного алгоритма требуется восстановить фазовый портрет и выяснить минимальную размерность пространства в котором аттрактор не имеет самопересечений – размерность вложения. Это необходимо для правильного выбора «близких» траекторий и, следо-

вательно, более точной оценки матрицы линеаризованного оператора эволюции. Пользуясь стандартным в таких случаях методом запаздывания будем считать фазовым пространством набор переменных $\left(|a(\tau)|, |a(\tau+d\tau)|, |a(\tau+2d\tau)|, \ldots, |a(\tau+(d-1)d\tau)|\right)$, где $d\tau$ – время задержки, которое должно быть таким, чтобы компоненты вектора $\mathbf{a} = \left(|a(\tau)|, |a(\tau+d\tau)|, |a(\tau+2d\tau)|, \ldots, |a(\tau+(d-1)d\tau)|\right)$ можно было бы считать достаточно независимыми.

Для оценки размерности вложения d вычислялась корреляционная размерность D_2 восстановленного аттрактора в зависимости от d. Для этого рассчитывались зависимости корреляционных интегралов

$$C(\delta) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{n,m=1}^{N} \theta\left(\delta - \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m\|\right), \tag{6}$$

где θ – ступенчатая функция Хевисайда, угол наклона которых и есть D_2.

4. Результаты моделирования

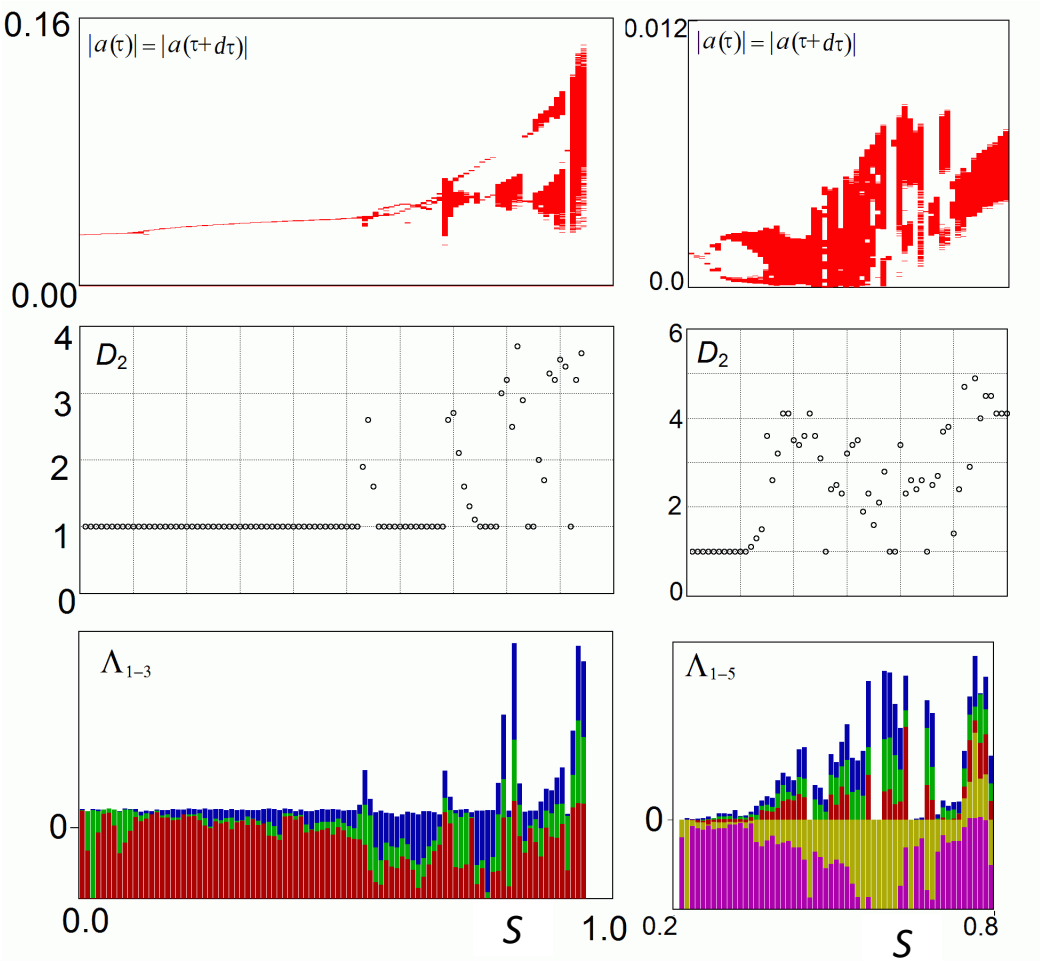


Рис.1. Бифуркационная диаграмма, зависимости корреляционной размерности D_2 и оценка ляпуновских показателей Λ_j (j = 1 – синий цвет, 2 – зеленый, 3 – красный, 4 – желтый, 5 – фиолетовый) для режимов гиро-ЛОВ (левый столбец) и гиро-ЛБВ (правый столбец).

Построенные бифуркационные диаграммы (рис.1, вверху) для сечения Пуанкаре восстановленного фазового пространства демонстрируют наличие регулярных колебаний амплитуды при небольших значениях коэффициента усиления. С ростом этого управляющего параметра и у гиро-ЛОВ, и у гиро-ЛБВ возникают сложные динамические режимы. При этом корреляционная размерность (рис.1, средний ряд) аттракторов для гиро-ЛБВ может достигать более высо-

ких значений. Полученные ляпуновские показатели (рис.1, внизу), подтверждают, что это свидетельствует о наличии в гиро-ЛБВ более высокоразмерных странных аттракторов и неустойчивого многообразия более высокой размерности. Если для гиро-ЛОВ возможен гиперхаос с двумя положительными показателями Ляпунова, то для гиро-ЛБВ число таковых достигает четырех.

Литература

1. Matsumoto T., Chua L., Kobayashi K. Hyper chaos: Laboratory experiment and numerical confirmation // IEEE Transactions on Circuits and Systems. 1986. Vol. 33. No. 11. P. 1143-1147. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085862.
2. Fonzin T.F., Kengne J., Pelap F.B. Dynamical analysis and multistability in autonomous hyperchaotic oscillator with experimental verification // Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 93. P. 653–669. DOI: 10.1007/s11071-018-4216-z.
3. Ginzburg N. S., Rozental R. M., Sergeev A. S., Zotova I. V., Tarakanov V. P. Chaotic millimeter wave generation in a helical-waveguide gyro-TWT with delayed feedback // Phys. Plasmas. 2016. Vol. 23. No. 10. Art.no. 103106. DOI: 10.1063/1.4964918.
4. Братман В.Л., Денисов Г.Г., Самсонов С.В., Кросс А.У., Фелпс А.Д.Р., Хе В. Высокоэффективные широкополосные гиро-ЛБВ и гиро-ЛОВ со спирально-гофрированными волноводами // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 2007. Т. 50. № 2. С. 104-117.
5. Sano M., Sawada Y. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // Phys.Rev.Lett. 1985. V. 55. P. 1082–1085. DOI: 10.1103/PhysRevLett.55.1082.
6. Brown R., Bryant P., Abarbanel H. D. I. Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series // Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 2787–2806. DOI: 10.1103/PhysRevA.43.2787.

ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МАЛОГО БИЗНЕСА

В.П. Савельев, Н.И. Сутягина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе построены и исследованы две модели функционирования предприятий малого бизнеса по предоставлению товаров и услуг населению региона при наличии в регионе крупных предприятий, продукция и услуги которых реализуются, в основном, за пределами данного региона. Исследовано поведение соответствующих динамических систем в зависимости от параметров. Получены условия существования и устойчивого функционирования предприятий малого бизнеса.

Ключевые слова: регион. предприятия малого бизнеса, .динамическая система, состояние равновесия, линеаризация, фазовый портрет

1. Введение

Дифференциация уровня жизни городского и сельского населения продолжает оставаться значительной. Жители небольших населенных пунктов либо недополучают часть услуг, либо их выбор существенно ограничен. В работе показано, что появление в сельском регионе предприятий, продукция (услуги) которых востребованы за пределами региона может привести к появлению и устойчивому функционированию предприятий малого бизнеса, оказывающих услуги жителям региона.

2. Построение и исследование математических моделей

Будем считать, что трудоспособное население сельского региона состоит из двух частей. Первая часть работает в сфере услуг для населения региона (малый бизнес), множество предприятий такого типа обозначим X. Вторая часть трудоспособного населения работает на предприятиях, производящих продукцию и оказывающих услуги для населения за пределами региона (например, ОАО «Княгининское молоко», Княгининская швейная фабрика, НГИЭУ). Совокупность предприятий такого типа обозначим Y. Соответственно, для построения математической модели, описывающей динамику финансовых потоков, введем понятие состояния динамической системы. Отметим, что Ю. И. Неймарк при построении простых математических моделей [1] придавал первостепенное значение выбору фазовых переменных и фазового пространства. Под состоянием системы будем понимать двумерную функцию времени $\big(x(t), y(t)\big)$, где $x(t) -$ объем предоставляемых услуг (в денежном выражении) предприятиями типа X, а $y(t) -$ объем произведенных товаров и предоставленных услуг предприятиями типа Y.

2.1. Линейная модель

Составим систему линейных дифференциальных уравнений, позволяющую анализировать сферу услуг жителям сельского региона.

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by, \\ \dot{y} = R + dx - cy, \end{cases} \tag{1}$$

где $ax -$ оплата труда работников внутреннего сервиса за вычетом их затрат на свои услуги, $by -$ доход системы внутреннего сервиса от работников предприятий типа Y, $dx -$ доход предприятий типа Y от работников внутреннего сервиса, $cy -$ оплата труда работников предприятий типа Y за вычетом их затрат на свой продукт, $R -$ доход предприятий типа Y. При естественном предположении, что $c > b, a > d,$ суммы денег $(a - d)x$ и $(c - b)y$ тратятся на покупку товаров и услуг вне данного региона. Заметим, что все указанные выше величины соот-

ветствуют единице времени. Фазовым пространством динамической системы (1) является неотрицательный квадрант $K = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Нетрудно видеть, что при условии $ac - bd > 0$ состояние равновесия $\left(\frac{bR}{ac-bd}, \frac{aR}{ac-bd}\right)$ системы (1) является устойчивым узлом. Соответствующий фазовый портрет системы (1) представлен на рисунке 1.

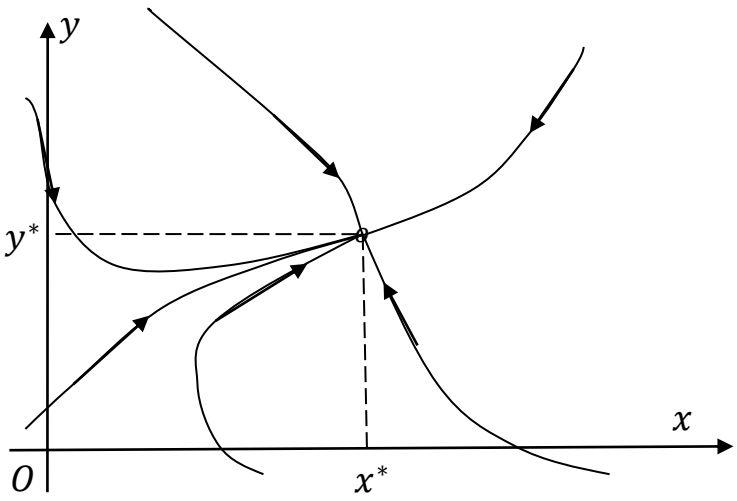


Рис. 1. Фазовый портрет линейной системы (1)

Заметим, что поведение траекторий на положительной полуоси Ox определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}) = (-ax, R + dx)$. Это значит, что траектории системы (1) пересекают ось Ox снизу вверх, так как $\dot{y} = R + dx > 0$. Поведение траекторий на положительной полуоси Oy определяется вектором $(\dot{x}, \dot{y}) = (by, R - cy)$. Это значит, что траектории пересекают ось Oy слева направо, так как $\dot{x} = by > 0$. Таким образом, для любого начального условия $(x_0, y_0) \in K$ фазовая траектория $(x(t), y(t))$ не выходит из фазового пространства K.

2.2. Нелинейная модель

В линейной модели (1) предполагалось, что доход by системы предприятий типа X зависит лишь от объема y произведенных товаров и услуг предприятиями типа Y. Однако, такое предположение справедливо лишь при постоянном объеме x услуг малого бизнеса. Очевидно, чем больше развит рынок внутренних услуг, тем больший доход могут получить предприятия малого бизнеса. В соответствии с этим составим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + bxy, \\ \dot{y} = R + dx - cy - bxy, \end{cases} \tag{2}$$

где (в единицу времени) $ax -$ оплата труда работников внутреннего сервиса за вычетом их затрат на свой продукт, $bxy -$ доход системы предприятий типа X от работников предприятий типа Y, R – доход предприятий типа Y, $dx -$ доход предприятий типа Y от работников предприятий типа X, $cy -$ оплата труда работников предприятий типа Y за вычетом их затрат на свой продукт и затрат на внутренний сервис. При естественном предположении, что $a > d$, суммы денег $(a - d)x$ и cy тратятся на покупку товаров и услуг вне данного региона. Динамическая система (2) имеет два состояния равновесия: 1) $(0, \frac{R}{c})$, 2) $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)}, \frac{a}{b}\right)$.

Допустим, что $Rb - ac > 0$, то есть внешние финансовые поступления R достаточно значительные. В этом случае оба состояния равновесия находятся в фазовом пространстве $K = \{((x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

Как известно [2], для исследования состояния равновесия нелинейной системы требуется ее линеаризовать в окрестности состояния равновесия.

В окрестности первого состояния равновесия $(0,\frac{R}{c})$ линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(R\frac{b}{c} - a\right)x + 0\left(y - \frac{R}{c}\right), \\ \dot{y} = (d - R\frac{b}{c})x - c\left(y - \frac{R}{c}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Собственные числа матрицы легко находятся: $\lambda_1 = R\frac{b}{c} - a > 0, \lambda_2 = -c < 0$.

Так как собственные числа матицы действительные и разных знаков, состояние равновесия $(0,\frac{R}{c})$ является седлом.

В окрестности второго состояния равновесия $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)},\frac{a}{b}\right)$ линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0(x - \frac{Rb-ac}{b(a-d)}) + \frac{Rb-ac}{a-d}\left(y - \frac{a}{b}\right), \\ \dot{y} = (d-a)\left(x - \frac{Rb-ac}{b(a-d)}\right) - \frac{Rb-cd}{a-d}\left(y - \frac{a}{b}\right). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение для собственных значений матрицы имеет вид:

$$\lambda^2 + \frac{Rb-cd}{a-d}\lambda + Rb - ac = 0. \quad (5)$$

Поскольку $Rb - ac > 0, a > d$, то и $Rb - cd > 0$. Это значит, что собственные числа либо оба действительные и отрицательные, либо комплексно – сопряженные с отрицательной действительной частью. Это значит, что состояние равновесия $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)},\frac{a}{b}\right)$ является устойчивым узлом или фокусом. Соответствующий устойчивому фокусу фазовый портрет системы (2) представлен на рисунке 2.

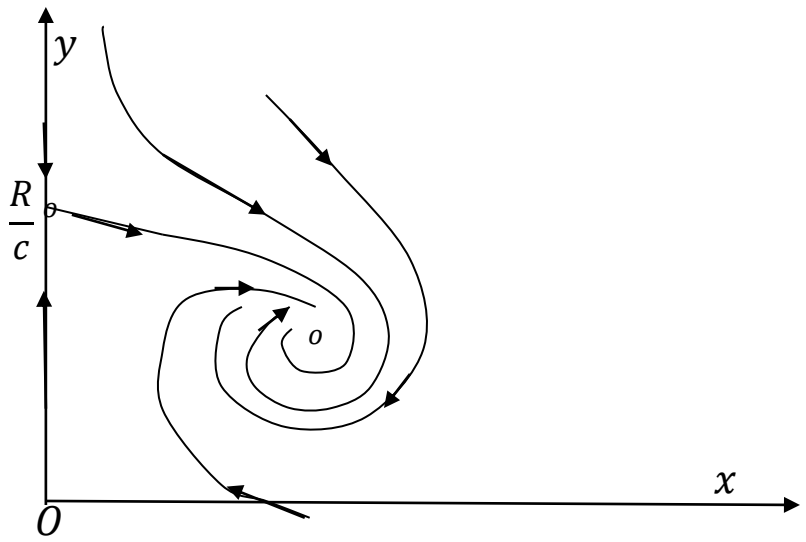


Рис. 2. Фазовый портрет системы (2) с устойчивым фокусом

Поведение траекторий на положительной полуоси Ox определяется вектором $(\dot{x},\dot{y}) = (-ax, R + dx)$. Это значит, что траектории пересекают ось Ox снизу вверх, так как $\dot{y} = R + dx > 0$. Поведение траекторий на положительной полуоси Oy определяется вектором $(\dot{x},\dot{y}) = (0, R - cy)$, а также собственным вектором $(0,1)^T$, то есть обе ω −сепаратрисы седла $(0,\frac{R}{c})$ лежат на полуоси Oy. Тот факт, что для любого начального условия $(x_0, y_0) \in K$ фазовая траектории $(x(t), y(t))$ не выходит из фазового пространства K, служит косвенным признаком того, что математическая модель (2) адекватно описывает динамику финансовых потоков $(x(t), y(t))$.

Далее, предположим, что $Rb - ac < 0$. Это значит, что либо поступления R недостаточные, либо коэффициенты a и c , характеризующие оплату труда, велики, либо люди слабо пользуются услугами внутреннего сервиса (коэффициент b невелик). В этом случае состояние равно-

весия $(0,\frac{P}{c})$ становится устойчивым узлом ($\lambda_1 = R\frac{b}{c} - a < 0, \lambda_2 = -c < 0$) а состояние равновесия $\left(\frac{Rb-ac}{b(a-d)}, \frac{a}{b}\right)$ – седлом, но оно расположено вне фазового пространства. Соответствующий фазовый портрет представлен на рисунке 3.

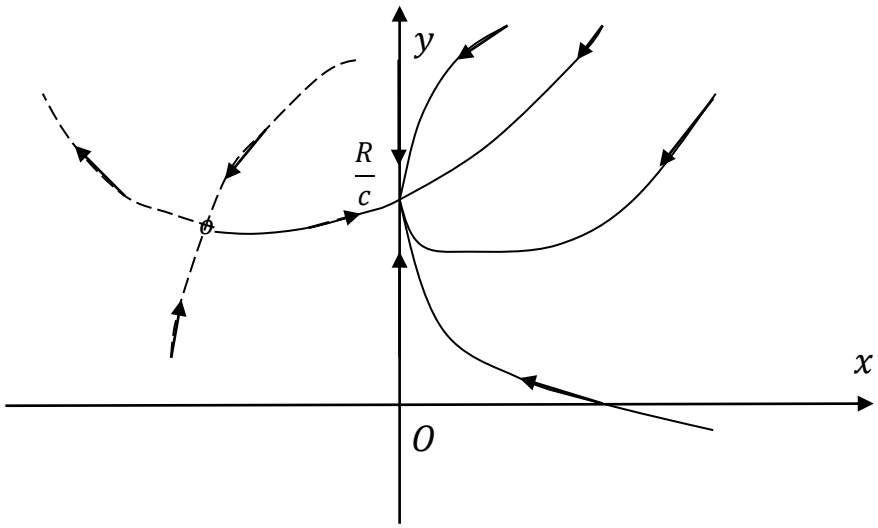


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2) при условии $Rb - ac < 0$

Заметим, что из любой начальной точки фазового пространства $x(0) = x_0 \geq 0, y(0) = y_0 \geq 0$, все траектории входят в устойчивый узел $(0,\frac{R}{c})$. Это значит, что не имеется достаточных ресурсов для поддержания внутреннего сервиса, он исчезает.

Выводы

1) Результаты исследования линейной модели (1) и нелинейной модели (2) хорошо согласуются.

2) Из исследования линейной модели следует: a) наличие в регионе предприятий типа Y, работающих на «экспорт».является достаточным условием для возникновения и устойчивого функционирования малого бизнеса; b) для увеличения объема услуг малого бизнеса $x = \frac{bR}{ad-bc}$ надо сокращать разницу между a и c, а также между d и b, то есть уменьшать суммы денег $(a-c)x$, $(d-b)y$, которые тратятся на покупку товаров и услуг вне региона.

3) Из исследования нелинейной модели следует: a) начиная с достаточно большого объема товаров и услуг $R > \frac{ac}{b}$, производимых в единицу времени предприятиями типа Y, .появляется возможность для возникновения и устойчивого функционирования малого бизнеса; b) для увеличения объема услуг малого бизнеса $x = \frac{bR-ac}{b(a-d)}$ надо сокращать разницу между a и d, и уменьшать коэффициент c ,то есть уменьшать суммы денег $(a-d)x$ и cy, которые тратятся на покупку товаров и услуг вне региона.

Литература

1. Неймарк Ю. И. Простые математические модели и их роль в познании мира // Соровский образовательный журнал. – 1997. – № 3. – С. 139–143.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966.

БИБЛИОТЕКА ОРГАНИЗАЦИИ ПАРАЛЛЕЛИЗМА УРОВНЯ ЗАДАЧ НА СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЁННОЙ ПАМЯТЬЮ

Ю.Б. Савкин

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Представленная библиотека языка C++ предназначена для удобной разработки прикладных программ на системах с распределённой памятью. Библиотека основана на интерфейсе передачи сообщений MPI. Предлагаемое решение использует подход параллелизма на уровне задач. В рамках статьи рассматриваются основные возможности данной библиотеки.

Ключевые слова: высокопроизводительные вычисления, MPI, параллелизм по задачам

1. Введение

На данный момент существует множество библиотек реализующих подход параллелизма на уровне задач. Одним из представителей для языка C++ является библиотека TBB [1]. Однако TBB предназначена для написания программ, исполняющихся на одном узле. Для написания программ на системах с распределённой памятью существует технология MPI [2]. Разработка больших программ на MPI является достаточно трудной [3-4]. MPI не предоставляет функционал для разбиения программ на логические задачи, из-за чего программисту необходимо вручную определять модель исполнения.

Предлагаемая библиотека [6] содержит в себе функционал для организации параллелизма по задачам, а в качестве средства передачи данных между процессами использует MPI. Для реализации функционала библиотеки были использованы различные паттерны параллельного программирования [5].

2. Предлагаемый подход

Библиотека предоставляет набор классов для написания функций отправки и приёма произвольных типов данных между процессами, фабрик для динамического создания различных объектов на разных процессах и механизмов для создания, динамического распределения и исполнения логических задач на разных процессах.

2.1. Пересылка произвольных типов данных

MPI предоставляет функционал для передачи только тех типов данных, которые являются тривиально копируемыми. В предлагаемой библиотеке представлен интерфейс для передачи любых сложных типов. Существующий механизм позволяет определять функции передачи пользовательских типов данных. На рис. 1 представлен пример определения функций отправки и приёма для вектора целых чисел. Для стандартных типов подобные функции предоставляются самой библиотекой.

2.2. Логические задачи

Единицами исполнения библиотеки являются логические задачи. Они могут иметь зависимости друг от друга. Таким образом формируется граф задач. Задачи представляют из себя функторы, унаследованные от базового класса task. Внутри этих задач могут быть вызваны различные функции для динамического управления данными и графом задач. На рис. 2 представлен пример класса задачи, производящей сложение 2 чисел и запись результата в третье.

```
template<>
void sender::send<std::vector<int>>(const std::vector<int>* ptr, size_t sz)
const
{
    for (size_t i = 0; i < sz; ++i)
    {
        size_t v_size = ptr[i].size();
        send(&v_size);
        send(ptr[i].data(), ptr[i].size());
    }
}

template<>
void  receiver::recv<std::vector<int>>(std::vector<int>*  ptr,  size_t  sz)
const
{
    for (size_t i = 0; i < sz; ++i)
    {
        size_t v_size;
        recv(&v_size);
        ptr[i].resize(v_size);
        recv(ptr[i].data(), ptr[i].size());
    }
}
```

Рис. 1. Определение функций передачи для вектора целых чисел

```
class int_sum: public task
{
public:
    void operator()(int a, int b, int& c)
    {
        c = a + b;
    }
};
```

Рис. 2. Пример логической задачи

2.3. Исполнение графа задач

Для исполнения графа задач используется класс parallelizer. Внутри его методов происходит распределение данных и задач по процессам. На вход ему подаётся либо уже сформированный граф, либо начальная задача. На рисунке 3 показан код, для исполнения задачи сложения 2 целых чисел.

```
    parallelizer pz;
    int a = 7, b = 9, c;
    int_sum is;
    pz.execution(&is,  std::make_tuple(),  &a,  &b,
&c);
```

Рис. 3. Постановка задачи на исполнение

3. Заключение

В рамках статьи рассмотрены основные возможности предлагаемой библиотеки по организации параллелизма уровня задач на системах с распределённой памятью. Предлагаемый интерфейс разработан для удобной организации пересылки данных, удобного формирования графа задач и предлагает механизмы для распределённого исполнения этого графа.

Литература

1. Официальный сайт библиотеки Intel Threading Building Blocks. URL: https://software.intel.com/en-us/tbb (дата обращения 28.10.2020).
2. Документация по MPI. URL: https://www.opennet.ru/docs/RUS/MPI_intro/ (дата обращения 28.10.2020).
3. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем. Учебное пособие – Нижний Новгород: изд-во ННГУ, 2010. – 421 с.
4. Гергель В.П. Параллельные вычисления. Технологии и численные методы. Учебное пособие в 4 томах – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2013. – 1394 с.
5. Мэттсон Т., Сандерс Б., Массингилл Б. Паттерны параллельного программирования – Уэстфорд: изд-во Addison-Wesley, 2004. – 328 с.
6. Разработанная библиотека для параллельных вычислений. URL: https://github.com/left841/simple_SPMD_interface (дата обращения 28.10.2020).

ПОДАВЛЕНИЕ ЧЕРЕНКОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СХЕМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ЗА СЧЁТ СВЕРХСВЕТОВЫХ ВОЛН[1*]

А.С. Самсонов[1], А.М. Пухов[2], И.Ю. Костюков[1]

[1]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия
[2]Institut für Theoretische Physik I, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, Germany

В работе представляется модификация стандартной схемы FDTD численного решения уравнений Максвелла, основанная на включении слагаемых высшего порядка в приближении конечных разностей. За счёт выбора свободных коэффициентов в такой гибридной схеме можно изменять дисперсионное соотношение волн электромагнитных плоских, реализуемых в данной схеме. Показывается, что определённый набор таких коэффициентов приводит к тому, что все волны в схеме имеют фазовую скорость чуть большую скорости света. Результаты численного моделирования показывают, что за счёт этого численная Черенковская неустойчивость в такой схеме значительно подавлена.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, численная Черенковская неустойчивость, метод частиц в ячейках.

Предлагаемая нами схема численного решения уравнений Максвелла основывается на добавлении слагаемых высшего порядка при приближении производной конечными разностями:

$$\delta_t B_x = (a_{0z}\,\delta_z E_y + a_{1z}\,\delta_z \mu_z E_y) - (a_{0y}\,\delta_y E_z + a_{1y}\,\delta_y \mu_y E_z)$$
$$\delta_t B_y = (a_{0x}\,\delta_x E_z + a_{1x}\,\delta_x \mu_x E_z) - (a_{0z}\,\delta_z E_x + a_{1z}\,\delta_z \mu_z E_x)$$
$$\delta_t B_z = (a_{0y}\,\delta_y E_x + a_{1y}\,\delta_y \mu_y E_x) - (a_{0x}\,\delta_x E_y + a_{1x}\,\delta_x \mu_x E_y)$$
$$\delta_t E_x = (a_{0y}\,\delta_y B_z + a_{1y}\,\delta_y \mu_y B_z) - (a_{0z}\,\delta_z B_y + a_{1z}\,\delta_z \mu_z B_y) + J_x$$
$$\delta_t E_y = (a_{0z}\,\delta_z B_x + a_{1z}\,\delta_z \mu_z B_x) - (a_{0x}\,\delta_x B_z + a_{1x}\,\delta_x \mu_x B_z) + J_y$$
$$\delta_t E_z = (a_{0x}\,\delta_x B_y + a_{1x}\,\delta_x \mu_x B_y) - (a_{0y}\,\delta_y B_x + a_{1y}\,\delta_y \mu_y B_x) + J_z$$

где $a_{0\alpha} + a_{1\alpha} = 1$, $\alpha = x, y, z$, $\delta_\alpha F^{i+1/2} = (F^{i+1} - F^i) / \Delta\alpha$ - это оператор конечной разности, $\mu_\alpha F^i = (F^{i+1} + F^{i-1}) / 2$ - оператор усреднения. При следующем выборе параметров $a_{1\alpha}$ плоские волны имеют фазовую скорость больше скорости света в фундаментальной зоне Бриллюэна $|k_\alpha \Delta_\alpha| < \pi$ и фазовую скорость равную скорости света на границе этой зоны:

$$a_{1\alpha} = (1 - \Delta\alpha \sin(\pi\Delta t / 2\Delta\alpha) / \Delta t) / 2.$$

Мы сравнили результаты идентичных численных расчётов распространения ультрарелятивистского пучка электронов в вакууме с использование различных схем. Численное моделирование проводилось с помощью кода QUILL [1]. Результаты сравнения представлены на Рис. 1. Наиболее быстро численная черенковская неустойчивость нарастает в схеме FDTD. В схеме NDFX [2], несмотря на в точности вакуумную дисперсию волн вдоль оси распространения пучка, неустойчивость также присутствует из-за пересечения дисперсии пучка и электромагнитных волн вне фундаментальной зоны Бриллюэна (так называемый эффект наложения частот или алиасинг [3]) и возможности возбуждения частицами волн, распространяющимися под небольшим углом к оси. В общем случае инкремент роста численной Черенковской неустойчивости уменьшается с ростом номера зоны Бриллюэна, в которой происходит пересечение дисперсий пучка и волн. Из-за этого, в частности, предлагаемая нами схема обладает наименьшим инкрементом роста неустойчивости среди исследуемых схем.

[1*] Исследование проведено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (Грант № 18-11-00210) (разработка численной схемы) и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (Грант № 19-1-5-10-1).

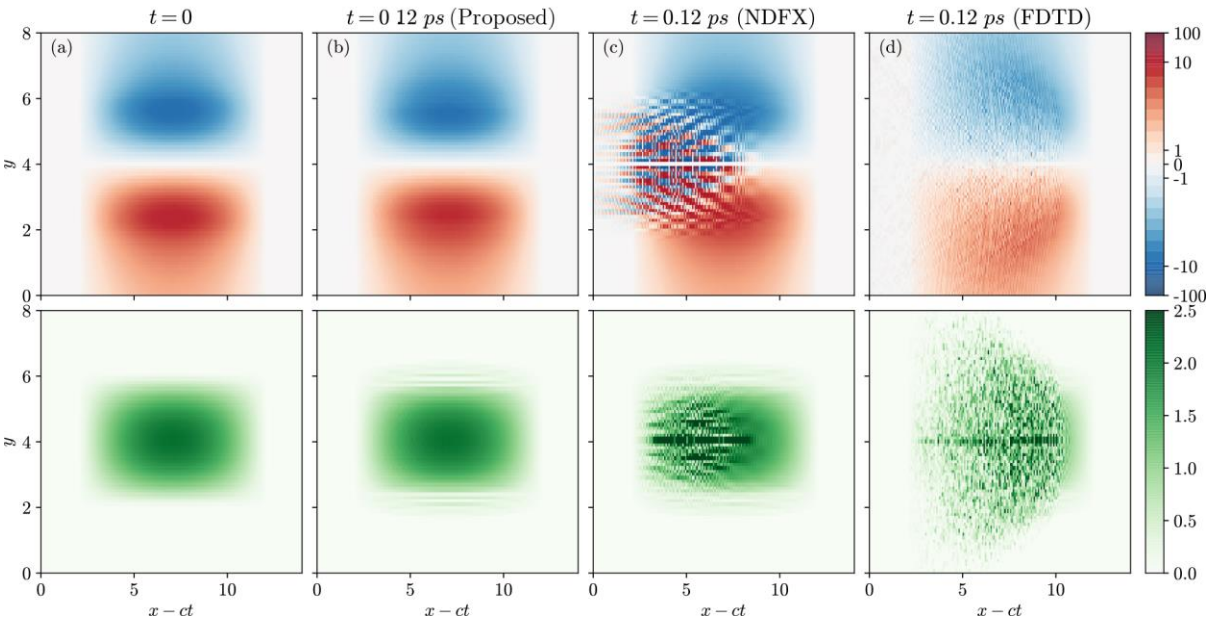


Рис. 1. Результаты численного моделирования распространения ультрарелятивистского ($\gamma = 2{\cdot}10^4$) пучка электронов (Q = 5 нКл) в вакууме. Распределение компоненты поля E_y (верхний ряд) и плотности электронов (нижний ряд) в плоскости XY (a) в начальный момент; (b) – (d) в момент времени $t = 0.12$ пс, полученные с помощью предложенной схемы, схемы NDFX и схемы FDTD соответственно. Электрическое поле нормировано на величину $mc\omega/e$, плотность электронов – на $m^2\omega^2/4\pi e^2$, где m и e – масса и модуль заряда электрона соответственно, c – скорость света, $\omega = 2\pi c/\lambda$, $\lambda = 10^{-5}$ см.

Разработанная нами схема позволяет значительно уменьшить инкремент роста численной Черенковской неустойчивости. Поэтому мы считаем, что данная схема предпочтительна для моделирования взаимодействия плотных заряженных пучков со стационарными мишенями, лазерным излучением и другими пучками, экспериментальное наблюдение которых в будущем ожидается, например, на установке FACET-II [4].

Литература

1. Quill code (https://github.com/agolovanov/Quill).
2. Pukhov A. CERN Yellow Reports 1 (181) (2016).
3. Birdsall C. K. and Langdon A. B. Plasma physics via computer simulation (CRC press) (2004).
4. 2016 Technical design report for the FACET-II project at SLAC national accelerator labora-tory.

ПРОБЛЕМЫ РЕПРЕЗЕНТАЦИИ ДАННЫХ В ГЛУБОКИХ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ НА ПРИМЕРЕ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММ

Я.А. Середа, Е.А. Новикова

Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

Работа посвящена исследованию причин возникновения систематических проблем в репрезентации многомерных данных в глубоких слоях сверточных сетей. Мы описали условия возникновения некоторых таких проблем и описали их связь с отсутствием “объектной ориентированности” репрезентации данных в глубоких сетях.

Ключевые слова: Сверточные сети, интерпретируемость, интерполяция.

1. Введение

В последние годы глубокие сверточные сети показали беспрецедентные успехи на некоторых задачах [1, 2]. Одна из них - задача генерации изображений лиц [3, 2]. Для нее показано, что некоторые переменные сверточной модели в ходе обучения обретают интерпретируемость [2, 4]. Это отчасти выражается в том, что становится возможна т. н. «семантическая арифметика» на переменных в глубоких слоях [4].

Однако, этот успех сверточных сетей плохо масштабируется на многие другие типы данных, возникающие в прикладных задачах, например, в робототехнике. Там зачастую требуется обучение новому навыку по нескольким примерам. Кроме того, сверточные модели с большим количеством ядер и слоев не предполагают гарантий интерпретируемости возникающей в них репрезентации. Это мешает их использованию, в частности, в медицине и ставит на повестку дня вопрос: как использовать сильные стороны глубоких сетей, но при этом уменьшить проблемы неинтерпретируемости репрезентаций?

В данной статье приводятся результаты анализа репрезентаций, предполагающие концепцию ответа на этот вопрос. Численные эксперименты проводились на электрокардиограммах: размерность этих данных не так велика, как у фото или видео, но проблемы репрезентаций уже четко видны. Кроме того, преобразования над этим типом данных позволяют работать с ним и как с временными рядами, и как с изображениями, что позволяет исследовать репрезентации при ядрах свертки разной размерности (1 и 2).

Репрезентации в обоих случаях исследовались методом интерполяции генеративными моделями. Мы показываем, что у репрезентаций глубокими сетями есть сильные и слабые стороны, причем условия возникновения как минимум некоторых проблем в репрезентации можно описать. Далее предлагается концепция обучения сетей, при которой описанные проблемы могут быть гарантированно устранены.

2. Экспериментальные данные

2.1. Входные данные: ЭКГ

Для исследования проблем репрезентаций данных в сверточных сетях был выбран тип данных, не похожий на те, в которых глубокие сети ранее демонстрировали успехи в области интерпретируемости репрезентаций -- ЭКГ. Известно, что глубокие сверточные сети применимы к задачам диагностики по ЭКГ некоторых заболеваний сердечно-сосудистой системы в следующем смысле: обучая модель на *достаточно большой* выборке данных, можно получить приемлемые, хотя и не идеальные, значения ошибок первого/второго рода в задачах диагностики некоторых типов нарушений сердечно-сосудистой системы (в частности, аритмий[5], инфарк-

тов[10]). Однако, это работает не для всех заболеваний: системы автоматического анализа ЭКГ пока не могут надежно заменить врача-функционалиста.

2.2. Мотивация эмпирического исследования и выбора класса сетей

Исследование проводилось на генеративных моделях (автокодировщики, генеративно-состязательные сети), основным компонентом которых являются сверточные слои классической архитектуры: сверточные ядра разных размеров, слои подвыборки (max pool), слои нелинейности (ReLU). Рекуррентность и пропускающие соединения не рассматривались: мы ранее экспериментально показали[7] что даже сети без усложненных схем соединения слоев успешно решают задачу выделения основных компонентов ЭКГ. Кроме того, даже в усложненных архитектурах прямолинейный сверточный блок до сих пор остается базовым составным компонентом вычислительного графа. Это делает актуальной задачу устранения дефектов репрезентаций таких сетей.

Одним из стандартных средств оценки качества представления является интерполяция с помощью обученной генеративной модели [4]. Мы использовали этот метод для поиска таких проблем репрезентации, которые были бы устойчивы к значительным вариациям гиперпараметров сверточной архитектуры и к размерности данных решаемой задачи.

3. Результаты численных экспериментов

Оказалось, что проблемы в репрезентации ЭКГ сверточными сетями возникает уже при рассмотрении одного сердечного цикла и усугубляются при рассмотрении ЭКГ полной длины.

Два разных проявления одной и той же проблемы показаны на рис.1. и рис.2. В случае из рис.1. сигнал ЭКГ представлялся сети как одномерный сигнал, и соответственно, сеть содержала одномерные ядра свертки. Во втором случае одномерный сигнал был преобразован в черно-белое изображение, и соответственно, ядра свертки у моделирующей его сети были двумерными.

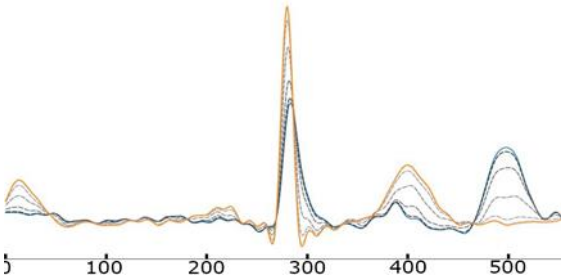


Рис. 1. Результат интерполяции обученной сверточной генеративной моделью между двумя сердечными циклами: промежуточные стадии интерполяции показаны серым. В какой-то момент возникает две Т-волны, что невозможно: в сердечном цикле должна быть одна Т-волна

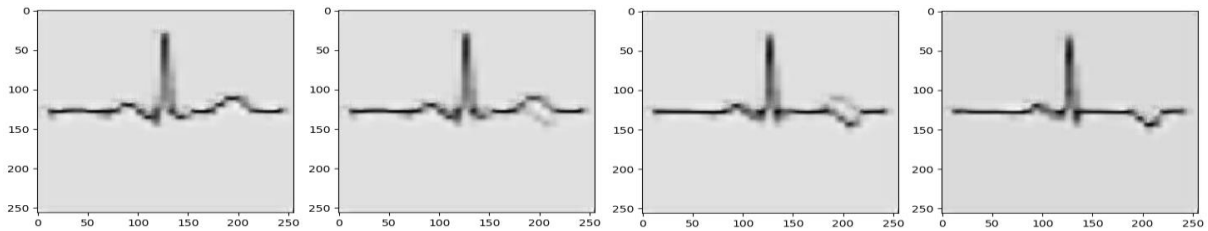


Рис. 2. Результат интерполяции между сердечными циклами, рассмотренными как черно-белые изображения. Видно, что несмотря на изменения размерности входных данных и, соответственно, размерности ядер сверточных слоев, эффект здесь тот же, что и в одномерном случае: промежуточные стадии интерполяции порождают изображения, не являющиеся сердечным циклом

Вышеприведенные результаты интерполяций являются типичными. Они означают, что в пространстве кодов обученной модели складывается ситуация, схематично изображенная на

рис. 3(а). А именно, репрезентация интерпретируема лишь локально, в то время как для интерпретируемости необходимо, но не достаточно, чтобы ситуация была похожей на 3(б).

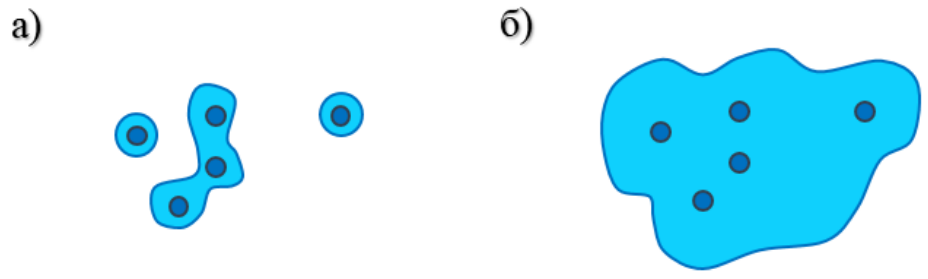


Рис. 3. Области интерпретируемости в пространстве кодов модели. Зеленым обозначены такие значения кодов, которые соответствуют фрагменту реалистичного ЭКГ на выходе генеративной подсети, а белым - нереалистичного. Синие точки - проекции экземпляров обучающих данных в пространство кодов данного слоя (а): ситуация, когда области интерпретируемости в основном окружают точки, соответствующие кодам экземпляров обучающей выборки. Именно в этом случае интерполяция между произвольными кодами часто проходит по области кодов, имеющих невозможную семантику (б) более желательная ситуация - область интерпретируемости “накрывает” всю выборку

При более детальном рассмотрении результатов интерполяций можно заметить, что явление выхода за пределы “интерпретируемой зоны” происходит при определенных условиях. Обнаруженное общее правило удобно проиллюстрировать на конкретном примере из рис.1. При интерполяции здесь появился “невероятный” сердечный цикл с двумя Т-волнами. Этого не произошло бы, если бы Т-волна в ходе интерполяции дрейфовала бы. С другой стороны, QRS комплекс находился в одном и том же месте все время, и если рассматривать только его эволюцию, то в ней нету возникновения “невероятного” QRS-комплекса. Это частный пример общего выявленного эмпирического правила: если экземпляр данных содержит объекты, которые могут значительно менять свое местоположение, то репрезентация будет (в общем случае) иметь тенденцию к локальности (рис.4 (а)). С другой стороны, если объект всегда центрирован относительно рецептивного поля сети, то наоборот, имеется тенденция к ситуации из рис.4 (б).

Для обученного человека сигнал ЭКГ представляет собой набор составных объектов. Основной повторяющийся объект здесь - сердечный цикл (один удар сердца). Он, в свою очередь, состоит из волн и комплексов (P, QRS, T и т. д.). Работа функционалиста с ЭКГ во многом сводится к идентификации вышеперечисленных объектов на электрокардиограмме и их анализу (оценке их морфологий, отношений их амплитуд, длительностей и т.д.). Местоположение всех этих объектов существенно меняется от одной электрокардиограммы к другой, именно поэтому проблемы интерпретируемости репрезентации глубоких сетей так ярко проявляются на этом типе данных. Задача об устранении этой патологической реакции сверточных сетей на сдвиг является особенно важной в свете того, что многие практические задачи генерируют данные схожей природы: много разных объектов на сцене, и местоположение объектов очень вариативно.

4. Концепция решения: протообъекты в репрезентации

Проблемы интерпретируемости, связанные с реакцией на сдвиг объекта на сцене, могли бы быть устранены, если бы информация о морфологии объекта и о его местоположении относительно других объектов сцены оказалась бы явно разнесена в разные переменные. Рис.4 (a, b) демонстрирует текущую ситуацию в глубоких сетях - т.е. отсутствие явного разделения этой информации в две переменные. Рис.4 (c) демонстрирует более понятную человеку репрезентацию с явно появляющимися объектом и координатами.

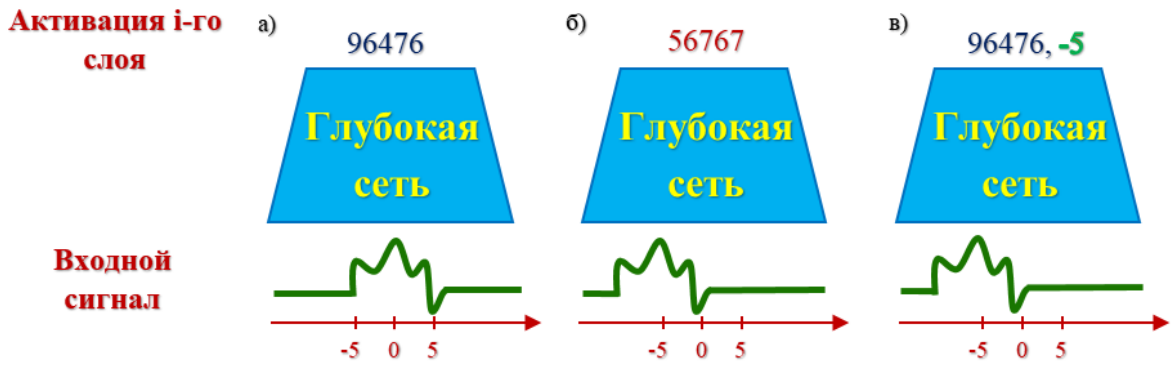


Рис. 4. Возникновение неинтерпретируемости в i-том слое. (a) объект находится в центре рецептивного поля сети и индуцирует в i-том слое вектор признаков 96476; (b) сцена та же и объект тот же, но сдвинулся на пять влево, при этом в i-м слое в общем случае могут поменяться все значения признаков; таким образом, описание протообъекта и смещения оказываются “запутанными”; (c) информацию о морфологии объекта и его положении можно разнести в разные переменные. Поскольку морфология не поменялась во время сдвига, то признаковое описание объекта, 96476, остается тем же, что и в ситуации из (a)

Описанное разделение переменных имеет биологическую аналогию. В зрительной коре эффекты синхронизации нейронов приводят к возникновению протообъектов в репрезентации нейросети [6]. Кроме того, о репрезентации зрительной информации в нейросети человека известно [8], что распознавание сцены происходит через последовательность саккад: в каждый момент времени человек видит четко лишь малый фрагмент сцены, но бессознательно совершает много перефокусировок взгляда в разные места. Эти данные можно интерпретировать так: распознавание у человека представляет собой последовательность управлений. Результатом же этих управлений становится обнаружение протообъектов. В современных сверточных сетях это не так. На вход сети подается сразу вся сцена в полном разрешении, необходимости в саккадах у искусственной сети нет, а архитектура сверточного блока не гарантирует выделения протообъектов. Сверточный блок на выходе дает вектор активаций, интерпретируемый исследователями как элемент векторного пространства. Однако, в предположении о целесообразности разделения “что” и “где” в разные переменные, удобно рассмотреть возможность сопоставление сцене графа, а не вектора. Это иллюстрируется на рис.5.

На нем показана сцена с тремя объектами. Промежуточное представление сцены через граф позволяет получить в конечном счете вектор. Семантическая арифметика на таких векторах репрезентаций не будет терпеть сбоев из-за сдвига объектов (как это происходит сейчас): сдвиги крайних объектов относительно центрального приведут всего лишь к изменению двух чисел в результирующей репрезентации.

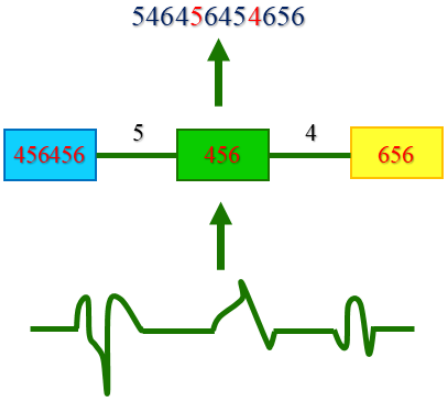


Рис. 5. Концептуальная схема результата распознавания, когда промежуточным результатом распознавания является граф. Входной сигнал схематически показан состоящим из трех объектов. Промежуточный результат распознавания отражает наличие трех протообъектов и расстояния между их центрами. Конечный результат получается конкатенацией числовых описаний вершин и ребер подобно тому, как предложение естественного языка получается проходом пути по семантическому графу фотографии.

Графовая промежуточная репрезентация сцены также имеет биологические предпосылки. Показано [9], что при наличии семантического графа для изображения, описание изображения (или его региона) на естественном языке генерируется тривиально. Валидная фраза получается проходом произвольного пути в этом графе. Узлами графов такого рода выступают существительные.

Заключение

В работе был показан сценарий возникновения некоторых проблем репрезентации в сверточных сетях. Возникновение локально- (а не глобально-) интерпретируемой репрезентации связано с особенностями природы данных для обучения. Проблема возникает тогда, когда тип данных человеком интуитивно рассматривается как сцена с множеством объектов. В этом случае репрезентация экземпляра данных теряет возможность к семантической арифметике в пространстве кодов глубокой сверточной сети (классической архитектуры). Мы показываем, что принципиально устранить данную проблему можно, если пересмотреть вопрос о том, экземпляр какой математической структуры должна сопоставлять сеть наблюдаемой сцене. В последней части работы обосновывается, что использование для этого графов может “починить” семантическую арифметику. Приведено обоснование этого выбора с точки зрения биологического правдоподобия при моделировании интеллекта.

Литература

1. Silver D. et al. Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search //nature. – 2016. – Т. 529. – №. 7587. – С. 484-489.
2. Karras T., Laine S., Aila T. A style-based generator architecture for generative adversarial networks //Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition. – 2019. – С. 4401-4410.
3. Zakharov E. et al. Few-shot adversarial learning of realistic neural talking head models //Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision. – 2019. – С. 9459-9468.
4. Radford A., Metz L., Chintala S. Unsupervised representation learning with deep convolutional generative adversarial networks //arXiv preprint arXiv: 1511.06434. – 2015.
5. Rajkumar A., Ganesan M., Lavanya R. Arrhythmia classification on ECG using Deep Learning //2019 5th International Conference on Advanced Computing & Communication Systems (ICACCS). – IEEE, 2019. – С.365 - 369.
6. Martin A. B., von der Heydt R. Spike synchrony reveals emergence of proto-objects in visual cortex //Journal of Neuroscience. – 2015. – Т. 35. – №. 17. – С. 6860-6870.
7. Sereda I. et al. ECG segmentation by neural networks: errors and correction //2019 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). – IEEE, 2019. – С. 1-7.
8. Fischer B., Weber H. Express saccades and visual attention //Behavioral and Brain Sciences. – 1993. – Т. 16. – №. 3. – С. 553-567.
9. Krishna R. et al. Visual genome: Connecting language and vision using crowdsourced dense image annotations //International journal of computer vision. – 2017. – Т. 123. – №. 1. – С. 32-73.
10. Acharya U. R. et al. Application of deep convolutional neural network for automated detection of myocardial infarction using ECG signals //Information Sciences. – 2017. – Т. 415. – С.190-198.

СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ АЛГОРИТМАМИ ГЛОБАЛЬНОЙ И ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1*]

Д.И. Силенко, И.Г. Лебедев

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Рассматриваются задачи одномерной оптимизации и локальные методы поиска минимума. Об оптимизируемой функции делается лишь общее предположение, что она удовлетворяет условию Липшеца с априори неизвестной константой. Локальные методы являются локальным уточнением для алгоритма глобального поиска и призваны улучшить его работу. Проведены численные эксперименты на тестовых задачах, подтверждающие что использование локального уточнения уменьшает число вычислений значений функции при решении задачи глобальной оптимизации.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, локальная оптимизация, многоэкстремальные функции.

1. Введение

При поиске глобального минимума функции можно придерживаться различных алгоритмов: от основанных на идее случайного поиска [3, 4, 9], до детерминированных алгоритмов гарантирующих сходимость к глобальному минимуму [14, 8, 11]. Поскольку в реальных задачах глобальной оптимизации каждое вычисление значения функции представляет собой весьма трудоемкую задачу, необходимо уменьшить количество таких операций. Этого можно добиться целенаправленным выбором вариантов в процессе поиска оптимального решения. На этой идее основывается алгоритм глобального поиска (АГП) [12]. Но в данной работе речь пойдет об объединении АГП с локальными методами оптимизации.

Алгоритмы поиска локального экстремума предназначены для определения одного из локальных экстремумов на множестве допустимых решений, в котором целевая функция принимает максимальное или минимальное значение. При их построении могут использоваться как детерминированный спуск в область экстремума, так и случайный поиск. Среди детерминированных различают методы нулевого порядка и градиентные (1-го и 2-го порядка) [13, 15].

В данной работе используется метод Хука–Дживса (он будет описан ниже), а также построение аппроксимации точек параболой и нахождение ее минимума. Аппроксимация точек – это метод, основанный на построении функции, наиболее близко проходящей через исходные данные. Соответственно, существует два способа определения такой функции – построение интерполяционного многочлена n-ной степени (в нашем случае параболы), который проходит либо непосредственно через все заданные точки, либо в ближайшей окрестности от них. Для нашей задачи подойдет второй вариант.

Таким образом, нам необходимо найти уравнение параболы, проходящей в окрестности заданных точек, для его построения воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК).

МНК – математический метод, основанный на определении аппроксимирующей функции, которая строится в ближайшей окрестности от точек из заданного массива экспериментальных данных. Близость исходной и аппроксимирующей функции определяется числовой мерой: сумма квадратов отклонений данных от аппроксимирующей кривой должны быть наименьшей [16].

[1*] Исследование выполнено в рамках государственного задания (0729-2020-0055), а также при финансовой поддержке научно-образовательного математического центра (075-02-2020-1483/1).

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу поиска глобального минимума одномерной функции $\varphi(x)$ в гиперинтервале $D = \{x \in R: a \le x \le b\}$ При этом будем предполагать, что функция удовлетворяет условию Липшеца с априори неизвестной константой L.

$$\varphi(x^*) = min\{\varphi(x): x \in D\} \quad (1)$$

$$D = \{x \in R: a \le x \le b\}$$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le L\|x_1 - x_2\|, x_1, x_2 \in D \; 0 < L < \infty \quad (2)$$

3. Описание алгоритмов

3.1. Алгоритм глобального поиска

Основная идея данного подхода заключается в том, что минимизируемая функция рассматривается как реализация некоторого случайного процесса. Решающие правила алгоритма конструируются таким образом, что очередная итерация проводится в точке глобального минимума математического ожидания значений функции. Эта точка записывается в список известных значений и итерации повторяются. Так происходит до тех пор, пока не достигнут один из выбранных критериев остановки: расстояние между точками отрезка не становится меньше заданного значения или новые точки не попадают в окрестность истинного глобального минимума. Еще одним вариантом остановки работы алгоритма является достижение установленного максимума возможных итераций [19].

Схема алгоритма:

Первые два испытания: $x^0 = 0$ и $x^1 = 1$.

1. Упорядочить точки по координате:

$$0 = x_0 < \ldots < x_i < \ldots < x_k = 1 \quad (3)$$

2. Вычислить оценку μ для неизвестной константы Липшица L,

$$\mu = max\left\{\frac{|z_i - z_{i-1}|}{(x_i - x_{i-1})^{1/N}}, i = 1, \ldots, k\right\} \quad (4)$$

3. Для каждого (x_{i-1}, x_i), $1 \le i \le k$, вычислить характеристику $R(i)$:

$$R(1) = 2\Delta_1 - 4\frac{z_1}{\mu r},$$

$$R(k) = 2\Delta_k - 4\frac{z_{k-1}}{\mu r} \quad (5)$$

$$R(i) = \Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r^2 \mu^2 \Delta_i} - 2\frac{(z_i + z_{i-1})}{r\,\mu}, \; 1 < i < k,$$

где Δ_i – корень степени N из длины интервала, $r > 1$, – параметр метода.

4. Определить номер t:

$$R(t) = max\{R(i): 1 \le i \le k\} \quad (6)$$

Провести очередное испытание в точке из интервала (x_{t-1}, x_t)

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, t = 1, t = k \quad (7)$$

$$x^{k+1} = \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - sign(z_t - z_{t-1})\frac{1}{2r}\left[\frac{|z_t - z_{t-1}|}{\mu}\right]^N$$

Алгоритм прекращает работу, если выполняется условие $\Delta_{t_j} \le \varepsilon$ хотя бы для одного номера t_j, $1 \le j \le P$; здесь $\varepsilon > 0$ есть заданная точность. В качестве оценки глобально-оптимального решения задачи (1) выбираются значения

$$f_k^* = \min_{1 \le i \le k} f(x^i), x_k^* = \arg \min_{1 \le i \le k} f(x^i) \quad (8)$$

Обоснование данного способа организации параллельных вычислений см. в [17]. Модификации, учитывающие наличие ограничений-неравенств в задаче, а также информация о производной целевой функции, представлены в [1, 13, 6].

3.2. Метод Хука-Дживса

Метод Хука–Дживса – это комбинация исследующего поиска по направлениям и поиска по образцу [18, 10].

Исследующий поиск определяется следующим образом. Задаётся величина шага, которая может быть разной для разных координатных направлений и изменяться в процессе поиска. Если значение целевой функции в пробной точке не превышает значение в исходной, то шаг поиска рассматривается как успешный. В противном случае, необходимо вернуться в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении. После перебора всех N координат исследующий поиск заканчивается. Полученная точка называется базовой.

Поиск по образцу заключается в реализации единственного шага из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей её с предыдущей базовой точкой.

3.3. Метод с использованием квадратичной аппроксимации

Аппроксимирующая функция по МНК определяется из условия минимума суммы квадратов отклонений (ξ_i) расчетной аппроксимирующей функции от заданного массива экспериментальных данных [16]. Записать это можно в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - y_i)^2 \to min \tag{9}$$

Аппроксимирующая функция представляет из себя многочлен степени m (в нашем случае $m = 2$)

$$F(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 \tag{10}$$

Заметим, что нам необходимо найти минимум функции (9), а необходимым условием его существования является равенство нулю ее частных производных по всем a_i. Если расписать данное условие (предварительно подставив (10) в (9)), получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{N}\left(a_0 + a_1 x_i^1 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1 x_i^1 + \cdots + a_m x_i^m - y_i) x_i^m = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

В данной системе раскроем скобки и перепишем ее в матричном виде

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i^1 & \dots & \sum_{i=1}^{N} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^1 & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{m+1} \\ & \vdots & & \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^m & \sum_{i=1}^{N} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{N} x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^m \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$x = -\frac{a_1}{2a_0}; \; y = -\frac{a_1^2 - 4a_0 a_1}{4a_0} \tag{13}$$

Здесь неизвестными являются значения $a_0, \dots, a_m$. А решив систему мы как раз их и найдем. Напомним еще раз, что для нашей задачи $m = 2$, что позволяет нам легко найти минимальное значение построенной аппроксимации просто как вершину параболы. А также, поскольку мы рассматриваем построение параболы, то система линейных алгебраических уравнений, получаемая в методе наименьших квадратов, состоит лишь из трех уравнений. Для решения подобных задач не нужно производить много сложных вычислений, даже определитель считается относительно не сложно. Это, в свою очередь, позволяет найти новую точку локального минимума без больших вычислительных затрат.

Критерием остановки метода служит попадание новой найденной точки в эпсилон окрестность точки, вычисленной на предыдущей итерации. Есть два варианта, что делать с новой полученной точкой: заменять точку с наибольшим значением функции на эту новую и продолжать строить аппроксимацию все так же по пяти точкам или же просто добавлять это значение к текущим, тем самым увеличивая число точек в аппроксимации.

3.4. Объединение локального метода и АГП

Разобравшись с принципом работы локального метода, остается лишь понять в какой момент его запускать. Для этого у каждой точки, в процессе работы АГП, будем запоминать и при

необходимости обновлять метку: является точка возрастающей, убывающей, верхним или нижним перегибом. Метки расставляются в зависимости от значений функции в соседних точках. Так, если у точки слева значение функции больше, чем у текущей, а справа – меньше, то точка убывающая и т.д. Запускать локальный метод будем если найдено 5 точек: точка, подозрительная на нижний перегиб, а так же две точки слева от нее и две справа.

В процессе своей работы локальный метод в любом случае вычисляет функцию в нескольких точках, а как говорилось ранее это трудоемкая операция. Чтобы избежать повторного вычисления в таких случаях, все значения, полученные в методе, добавляется в «поисковую информацию» [2].

4. Эксперименты

Эксперименты проводились на ПК с следующими параметрами:

Операционная система: Windows 10 Домашняя; Процессор: Intel(R) Core™ i5-8250U CPU @ 1.60 GHz; Версия Visual Studio: 2017.

В работе [5] описан GCGen-генератор, позволяющий порождать задачи многоэкстремальной оптимизации с заранее известными свойствами: размерностью задачи, точкой глобального минимума, значением функции в ней и т.п.

Испытания будем проводить на функции Шекеля. Тестовая функция Шекеля – это многомерная, много модальная, непрерывная, детерминированная функция, выглядящая, в нашем случае, следующим образом (рисунок 1)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\left(c_i + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - a_{ij}\right)^2\right)^{-1}, \text{где } m = 10, n = 4 \quad (14)$$

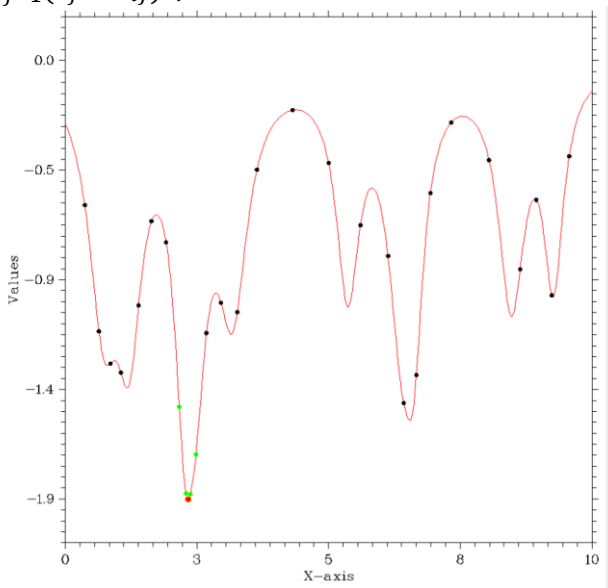


Рис. 1. Пример вида функции Шекеля

В таблице 1 представлены значения среднего числа испытаний при решении 100 задач Шекеля при разных значения точности поиска. Задачи решались алгоритмом глобального поиска (АГП), объединённым алгоритмом глобального поиска с методом Хука-Дживса (Хука-Дживса) и с использованием квадратичной аппроксимации (Аппроксимация).

Таблица 1. Среднее число испытаний при разной точности

	0,0001	**0,0005**	**0,001**	**0,005**	**0,01**
АГП	106,3	63,7	53,2	36,6	30,9
Хука-Дживса	39,3	38,1	35,3	33,5	32,0
Аппроксимация	38,4	35,4	33,9	31,4	29,9

5. Заключение

В результате работы удалось успешно объединить алгоритм глобального поиска вместе с поиском локального минимума путем построения аппроксимации параболой и методом Хука-Джива. Это позволило сильно уменьшить количество вычислений целевой функции при необходимой большой точности поиска. С целью экспериментального подтверждения теоретических свойств рассматриваемого алгоритма проведены вычислительные эксперименты на серии из сотни тестовых задач.

Литература

1. Barkalov K.A. A global optimization technique with an adaptive order of checking for constraints / Barkalov K.A., Strongin R.G. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2002. – Vol. 42, No. 9. – P. 1289-1300.
2. Barkalov K.A., Lebedev I.G., Kocheganova M.A., Gergel V.P. Combining local and global search in a parallel nested optimization scheme Communications in Computer and Information Science Volume 1263 CCIS, 2020, P. 100-112
3. Ferreiro A.M., Garcia J.A., Lopez-Salas J.G., Vazquez C. An efficient implementation of parallel simulated annealing algorithm in GPUs // Journal of global optimization. – 2013. – Vol. 57, No. 3. – P. 863–890.
4. Garcia-Martinez J.M., Garzon E.M., Ortigosa P.M. A GPU implementation of a hybrid evolutionary algorithm: GPuEGO // Journal of super-computing. – 2014. – Vol. 70, No. 2. – P. 684–695.
5. Gergel V.P. Barkalov, K.A., Sysoyev A.V., Rachinskaya M.A., Lebedev, I.G., A flexible generator of constrained global optimization test problems AIP Conference Proceedings Volume 2070, 12 February 2019, Номер статьи 20009
6. Gergel V.P. A global optimization algorithm for multivariate functions with lipschitzian first derivatives / Gergel V.P. // Journal of Global Optimization. – 1997. – Vol. 10, No. 3. – P. 257-281.
7. Gergel V.P. A method of using derivatives in the minimization of multiextremum functions / Gergel V.P. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 36, No. 6. – P. 729 – 742.
8. He J., Verstak A., Watson L.T., Sosonkina M. Design and implementation of a mas-sively parallel version of DIRECT // Computational optimization and applications. – 2008. – Vol. 40, No. 2. – P. 217–245.
9. Langdon W.B. Graphics processing units and genetic programming: an overview // Soft Computing. – 2011. – Vol. 15, No 8. – P. 1657–1669.
10. Nelder J., Mead R. A simplex method for function minimization. Computer Journal 7(4), 308{313 (1965)
11. Paulavicius R., Žilinskas J., Grothey A. Parallel branch and bound for global optimiza-tion with combination of Lipschitz bounds // Optimization methods and software. – 2011. – Vol. 26, No. 3. – P. 487–498.
12. Глобальная оптимизация: приложения и вычислительная сложность. URL: http://hpc-education.unn.ru/ru/globopt/глобальная-оптимизация-приложения-и (дата обращения: 10.10.2020).
13. Городецкий С. Ю. Методические материалы к лабораторной работе «Вычислительные методы поиска локальных минимумов функций», 2001. URL: http://itmm.unn.ru/files/2016/09/MO_Lab2_LocOpt.pdf (дата обращения: 09.10.2020).
14. Евтушенко Ю.Г., Малкова В.У., Станевичюс А.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – Т. 49, №2. – С. 255–269.
15. Захарова Е. М., Минашина И. К. Обзор методов многомерной оптимизации. Информационные процессы, том 14, №3, 2014, С. 256-274.

16. Моделирование в электроэнергетике: Аппроксимация опытных данных. Метод наименьших квадратов. URL: http://simenergy.ru/math-analysis/digital-processing/85-ordinary-least-squares (дата обращения: 02.10.2020).
17. Стронгин Р.Г. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации / Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. – М.: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.
18. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 536 с.
19. Шефов К. С., Степанова М. М. Реализация и применение параллельного алгоритма глобального поиска минимума к задаче оптимизации параметров молекулярно-динамического потенциала ReaxFF: URL: http://crm.ics.org.ru/uploads/crmissues/crm_2015_3/15750.pdf, 2015 (дата обращения: 13.10.2020).

ВОЗНИКНОВЕНИЕ БИСТАБИЛЬНОСТИ В ДИНАМИКЕ КОНЦЕНТРАЦИИ АСТРОЦИТАРНОГО КАЛЬЦИЯ[1*]

М.С. Синицина[1], С.Ю. Гордлеева[1], В.Б. Казанцев[1,2,3], Е.В. Панкратова[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[2]Самарский государственный медицинский университет,
[3]Университет Иннополис

В данной работе исследуются особенности переходов между различными динамическими режимами спонтанной астроцитарной кальциевой активности. Получены условия, при которых возникновение осцилляций концентрации кальция происходит по двум различным сценариям: реализуется либо мягкое рождение циклов малой амплитуды, либо жесткое рождение, при котором сразу возникают колебания большой амплитуды. Обнаружена область параметров, при которых динамика системы становится бистабильной.

Ключевые слова: математическое моделирование, концентрация кальция в астроцитах, колебательные и стационарные режимы.

1. Введение

Мозг представляет собой сложную многокомпонентную систему, в составе которой выделяют нейроны и глиальные клетки. Одни из основных сигнальных клеток мозга, нейроны, с точки зрения нелинейной динамики, представляют собой генераторы электрических импульсных сигналов, динамика которых носит пороговый характер. При достижении порога генерируется электрический импульс, который передаётся на другие элементы сети. Считается, что процессы генерации, передачи и преобразования таких импульсов и их последовательностей в нейронных системах являются основой обработки информации в мозге. Принципы такой обработки до конца не ясны, а их поиск составляет одну из приоритетных междисциплинарных задач современной науки.

Долгое время считалось, что глиальные клетки выполняют ряд функций, поддерживающих жизнедеятельность нейронов. Однако, как показывают последние исследования, астроциты, один из самых распространенных типов глиальных клеток, способны генерировать импульсы химической активности в ответ на прохождение импульсных сигналов по нейронной сети. Такие импульсы представляют собой кратковременное повышение внутриклеточной концентрации кальция.

Немаловажным аспектом динамики нейронной сети является влияние активной нелинейной среды на процессы генерации и передачи сигналов между нейронами. Роль такой активной нелинейной среды для нейронных сетей в мозге играют астроциты. *Результаты исследований показывают, что для астроцитов характерны как* спонтанные изменения концентрации кальция [1, 2], так и кальциевые сигналы, вызванные активностью нейронов [3]. При этом астроцитарные кальциевые сигналы могут быть локализованы в синапсах либо распространяться по астроцитарной сети. Во время генерации кальциевых сигналов астроцит способен воздействовать на сигнальные функции нейронов, регулируя возбудимость нейронной мембраны и эффективность передачи сигналов между нейронами. Уравнения кинетики биохимических преобразований в астроцитах известны и могут быть формализованы в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений. Однако, с точки зрения нелинейной динамики, такие системы, в отличие от нейронных моделей, изучались сравнительно мало. Поэтому данная работа была посвящена детальному исследованию динамики концентрации кальция в астроцитах.

[1*] Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ (грант 14.Y26.31.0022).

2. Описание математической модели

В данной работе была рассмотрена математическая модель кальций-сигнальных путей Лаврентовича и Хемкина [4]. Изменение во времени внутриклеточной концентрации кальция и Ca^{2+}-зависимой концентрации инозитол-1,4,5-трифосфата (IP_3) описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d[Ca^{2+}]_{cyt}}{dt} = J_{in} - k_{out}[Ca^{2+}]_{cyt} + J_{CICR} - J_{serca} + k_f\left([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]_{cyt}\right),\\ \frac{d[\mathrm{Ca}^{2+}]_{ER}}{dt} = J_{serca} - J_{CICR} + k_f\left([\mathrm{Ca}^{2+}]_{cyt} - [\mathrm{Ca}^{2+}]_{ER}\right),\\ \frac{d[\mathrm{IP}_3]_{cyt}}{dt} = J_{PLC} - k_{deg}[\mathrm{IP}_3]_{cyt},\end{gathered} \tag{1}$$

где выражения для J_{serca}, J_{CICR} и J_{PLC} имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}J_{serca} = v_{M2}\left(\frac{[Ca^{2+}]_{cyt}^2}{[Ca^{2+}]_{cyt}^2 + k_2^2}\right),\\ J_{CICR} = 4v_{M3}\left(\frac{k_{CaA}^2[Ca^{2+}]_{cyt}^n}{\left([Ca^{2+}]_{cyt}^n + k_{CaA}^n\right)\left([Ca^{2+}]_{cyt}^n + k_{CaI}^n\right)}\right)\left(\frac{[IP_3]_{cyt}^m}{\left([IP_3]_{cyt}^m + k_{ip3}^m\right)}\right)\left([Ca^{2+}]_{ER} - [Ca^{2+}]_{cyt}\right),\\ J_{PLC} = v_p\left(\frac{[\mathrm{Ca}^{2+}]_{cyt}^2}{[\mathrm{Ca}^{2+}]_{cyt}^2 + k_p^2}\right).\end{gathered} \tag{2}$$

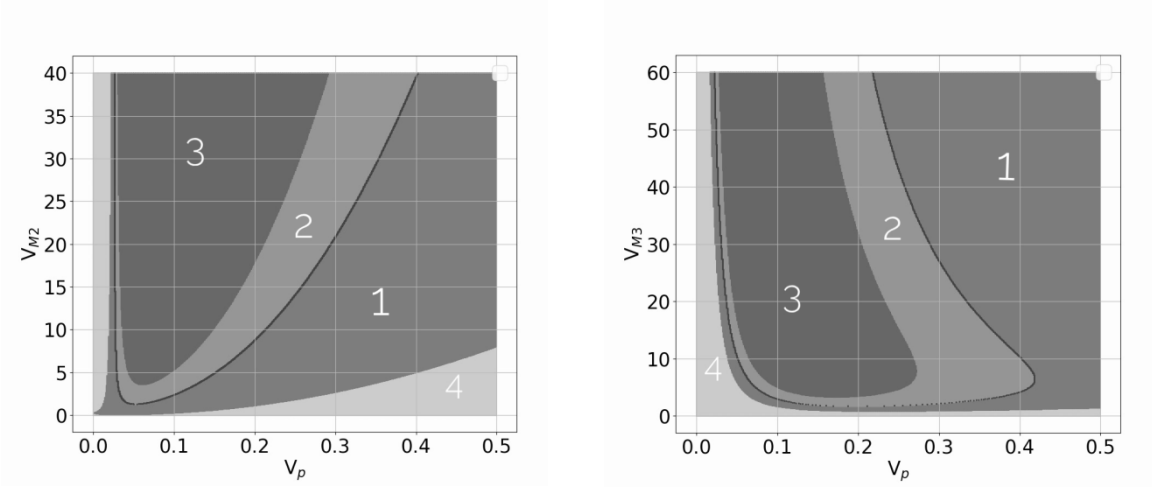
Основными переменными этой системы являются: внутриклеточная концентрация кальция $[Ca^{2+}]_{cyt}$, концентрация кальция во внутреннем хранилище – эндоплазматическом ретикулуме (ER) $[Ca^{2+}]_{ER}$ и концентрация вторичного месседжера инозитол-1,4,5-трифосфата (ИТФ) $[IP_3]_{cyt}$, который помогает открывать каналы и выводить кальций в цитозоль. Параметры системы (1) выбраны согласно данным работы [4]. Особое внимание в данной работе уделено влиянию следующих параметров на изменение динамики кальция: v_{M2} – скорость потока кальция через serca в ER из цитозоля, v_{M3} – скорость потока кальция через IP_3 из ER в цитозоль и v_p – величина обратной связи между кальцием в цитозоле и IP_3.

Так как из экспериментов известно, что подавление рецепторов ИТФ вызывает подавление выхода кальция из хранилища, то первое, на что стоит обратить внимание – это развитие так называемого эффекта исчезновения колебаний [5]. В работе [6] было показано, что система (1) имеет единственное состояние равновесия, локальную устойчивость которого исследуем в рамках метода линеаризации.

3. Полученные результаты

На рисунке 1(а) представлена бифуркационная диаграмма, полученная при изменении параметров v_p и v_{M2}. Различными оттенками серого цвета показаны области с различным типом поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия. Для удобства описания области также пронумерованы. Так, в областях 1 и 4 состояние равновесия представляет собой устойчивый фокус и устойчивый узел, соответственно. В областях 2 и 3 состояние равновесия не является устойчивым: в области 3 существует седло с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями, в области 2 – седло-фокус с двумерным неустойчивым и одномерным устойчивым многообразиями. В этих областях параметров в силу диссипативности рассматриваемой системы наблюдаются колебательные режимы изменения концентрации кальция в астроците. Более того, детальный анализ поведения системы на границе между областями 1 и 2 показал, что характер смены устойчивости равновесия при переходе через эту границу в разных ее частях различен. В частности, обнаружено, что левая ветвь этой кривой соответствует переходу с мягким рождением устойчивого предельного цикла (суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа), а правая ветвь этой кривой соответствует переходу с рождением неустойчивого предельного цикла – здесь происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. Таким образом, в силу диссипативности системы при переходе через правую ветвь

границы уже должен существовать устойчивый предельный цикл большей амплитуды. Его рождение происходит при больших значениях параметра v_p в результате бифуркации двукратного предельного цикла. Таким образом, в рассматриваемой системе существует область бистабильности, где сосуществуют два типа притягивающих множеств: устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл.



(a) **(b)**

Рис. 1. Двупараметрические бифуркационные диаграммы на плоскостях (v_p, v_{M2}) - (a) и (v_p, v_{M3}) - (b). Цифрами отмечены области с различным типом поведения системы в окрестности состояния равновесия: 1 – устойчивый фокус, 2 – седло-фокус, 3 – седло, 4 – устойчивый узел. Граница перехода между областями 1 и 2, изображенная черным цветом, соответствует переходу через нулевое значение действительной части характеристических показателей (бифуркация Андронова-Хопфа).

Аналогичное разбиение на области с различным типом локальной устойчивости состояния равновесия было получено для плоскости параметров v_p и v_{M3}, Рис. 1(b). Сравнительный анализ полученных диаграмм позволяет сделать вывод о том, что во всем рассматриваемом диапазоне параметра v_p при малых значениях v_{M2} и v_{M3} переходов в осцилляторный режим не происходит. При этом, увеличение параметра v_{M2} приводит к увеличению диапазона с колебательным режимом, а с увеличением v_{M3} этот диапазон уменьшается. Следует отметить, что приведенные на Рис.1 диаграммы получены при величине потока ионов кальция из внеклеточного пространства в цитозоль, равном J_{in}=0.03. Увеличение этого параметра приводит к сжатию всех областей диаграммы в направлении меньших значений v_p и уменьшению диапазона с колебательным режимом.

4. Заключение

В данной работе в рамках модели Лаврентовича-Хемкина исследованы бифуркационные механизмы смены динамических режимов, характерных для концентрации астроцитарного кальция. Изучено влияние скорости потока кальция в эндоплазматический ретикулум из цитозоля (v_{M2}), скорости потока кальция в обратном направлении (v_{M3}) и величины обратной связи между кальцием в цитозоле и IP_3 (v_p) на изменение областей с моностабильным и бистабильным характером поведения системы.

Литература

1. Wang X., Lou N., Xu Q., Tian G.F., Peng W.G., Han X., Kang J., Takano T., Nedergaard M. Astrocytic Ca2+ signaling evoked by sensory stimulation in vivo // Nature Neuroscience. 2006. Vol.9, №6. P. 816-823. DOI: 10.1038/nn1703.
2. Parri H.R., Crunelli V. The role of Ca2+ in the generation of spontaneous astrocytic Ca2+ oscillations // Neuroscience. 2003. Vol.120, №4. P. 979-992. DOI: 10.1016/s0306-4522(03)00379-8.

3. Perea G., Araque A. Properties of synaptically evoked astrocyte calcium signal reveal synaptic information processing by astrocytes // The Journal of Neuroscience: The Official Journal of the Society for Neuroscience. 2005. Vol. 25, №9. P. 2192-2203. DOI: 10.1523/JNEUROSCI.3965-04.2005.
4. Lavrentovich M., Hemkin S. A mathematical model of spontaneous calcium (II) oscillations in astrocytes. // J. Theor. Biol. 2008. Vol. 251, P. 553–560. DOI: 10.1016/j.jtbi.2007.12.011.
5. Pankratova E.V., Kalyakulina A.I. Environmentally induced amplitude death and firing provocation in large-scale networks of neuronal systems. // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, №7-8. P. 840-848.DOI: 10.1134/S1560354716070078.
6. Sinitsina M.S., Gordleeva S.Yu., Kazantsev V.B., Pankratova E.V. Emergence of complicated regular and irregular spontaneous Ca2+ oscillations in astrocytes. // 4th Scientific School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics (DCNAIR), Innopolis, Russia, 2020. P. 217-220. DOI: 10.1109/DCNAIR50402.2020.9216897.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КЕЛЬВИНА 1880Г. О КОЛОННООБРАЗНОМ ВИХРЕ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

И.Н. Солдатов[1,2], С.Р. Лаврова[2]

[1]*Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,*
[2]*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского*

В работе 1880г. Кельвин рассмотрел линеаризованную задачу о волновых движениях цилиндрической поверхности колоннообразного вихря идеальной жидкости, окруженной потенциальным течением. Задачу, аналогичную рассмотренной Кельвином, но с учетом вязкости жидкости и её аксиального движения в ядре вихря, назовём обобщенной задачей Кельвина. В работе построено точное решение обобщенной задачи. Проанализировано влияние вязкости жидкости на затухание/увеличение амплитуды инерционных волн.

Ключевые слова: закрученная струя вязкой жидкости, вихрь Рэнкина, аксиальное течение в ядре вихря, инерционные волны, дисперсионные соотношения.

1. Введение

Колоннообразный вихрь Рэнкина – простая модель вихревого движения (с квазитвердотельно вращающимся ядром и с вращением жидкости по закону потенциального вихря с нулевой аксиальной скоростью во внешней области), представляет большой интерес как хорошее приближение в очень многих важных для приложений задачах.

Аналитическое исследование вихревых течений берет своё начало, по-видимому, с работ В. Томсона (лорда Кельвина). Кельвина интересовали вопросы устойчивости колоннообразных, кольцевых и точечных вихрей, возникшие в связи с предложенной им теорией вихревых атомов (1867г.) [1]. В этой теории мир понимается как некий эфир (аналог идеальной жидкости), в которой взаимодействуют вихри Гельмгольца, подобные атомам, образующим молекулы. Устойчивость вихревых атомов вызывала сильные сомнения. Интерес к вопросам устойчивости вихрей привел Кельвина к рассмотрению инфинитезимальных возмущений цилиндрической поверхности колоннообразного вихря, что, тем самым, положило начало исследованиям волн во вращающейся жидкости. Кельвин в работе [2] 1880г. показал, что колоннообразный вихрь (вихрь Рэнкина) без осевого течения в идеальной жидкости с квазитвердотельно вращающимся ядром и потенциальным течением вне ядра нейтрально устойчив к инфинитезимальным возмущениям цилиндрической поверхности ядра вихря. Неустойчивость возникает, когда есть достаточно быстрое осевое течение в ядре (Chandrasekhar S. (1961) [3], Krishnamoorthy V. (1966) [4]). Позднее Moore D.W. и Saffman P.G. (1972) [5], Uberoi M.S. et al (1972) [6], Lessen M. et al (1973) [7]; Wu C. et al [8], Loiscleux et al (1998) [9] были выполнены более детальные исследования неустойчивости. Влияние вязкости жидкости во внутренней области вихря на устойчивость, за исключением очень частных случаев [10,11] ранее не рассматривалось. Как известно, вязкость может быть стабилизирующим фактором, но может быть и причиной неустойчивости (например, вязкость ответственна за неустойчивость течения в плоском канале при больших числах Рейнольдса). В отличие от ранее проводившихся исследований, в данной работе учитывается вязкость жидкости ядра вихря с аксиальным течением. Плотность жидкости ядра и жидкости во внешней области, вообще говоря, различны. Влиянием силы тяжести пренебрегаем.

2. Формулировка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим волновые движения в вихре Рэнкина – колоннообразном вихре с линейным распределением азимутальной скорости в ядре и безвихревым течением вне ядра. Иначе говоря, инерционные волны в закрученной струе, окруженной потенциальным течением. Будем

предполагать, что аксиальная скорость является постоянной в ядре и равна нулю вне ядра, т. е. имеет прямоугольное распределение.

Будем использовать неинерциальную (вращающуюся) систему отсчёта. В равномерно вращающейся системе координат в правой части уравнения движения появляются два члена, связанные с действием кориолисовой и центробежной сил

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v}+2\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}+\frac{1}{2}\nabla\left[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}\right]^2,\quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0 \tag{1}$$

где μ – динамическая вязкость, $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость квазитвердотельного вращения ядра вихря, остальные обозначения стандартны. Далее будем использовать равномерно вращающуюся с угловой скоростью Ω цилиндрическую систему координат (r,φ,z) с осью z, направленной вдоль оси вращения. В этой системе координат азимутальная скорость невозмущенного течения в ядре вихря равна нулю. Плотность жидкости ядра ρ отлична от плотности жидкости ρ_1 внешнего течения. Кроме того, жидкости предполагаются неэмульгирующими и несмешивающимися между собой. Для удобства изложения будем снабжать все величины, относящиеся к внешнему течению индексом 1. Внешнее течение жидкости описывается уравнениями Эйлера и несжимаемости

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t}+(\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1=-\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1+2\mathbf{v}_1\times\mathbf{\Omega}+\frac{1}{2}\nabla\left[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}\right],\quad \nabla\cdot\mathbf{v}_1=0 \tag{2}$$

На границе раздела двух жидкостей $r=a+h(t,\varphi,z)$ (где $r=a$ – уравнение границы в невозмущенном состоянии) должны выполняться динамические условия:

$$\mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_1]=-\gamma\mathbf{n}(\nabla_S\cdot\mathbf{n})+\nabla_S\gamma \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}+\mu\left[\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T\right]$ – тензор напряжений, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, γ – поверхностное натяжение, $\nabla_S=\nabla-\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\nabla)$ – поверхностный градиент, $-\gamma(\nabla_S\cdot\mathbf{n})$ – удвоенная кривизна поверхности, единичный вектор нормали $\mathbf{n}=\nabla S/|\nabla S|$ направлен в сторону жидкости с индексом 1; $S=r-a-h(t,\varphi,z)$, $\nabla S=\left(1,-\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial\varphi},-\frac{\partial h}{\partial z}\right)$. Также на границе раздела должны выполняться кинематические условия: компонента скорости, нормальная к границе, должна быть непрерывной при переходе через неё

$$[\mathbf{v}-\mathbf{v}_1]\cdot\mathbf{n}=0$$

и совпадать со скоростью перемещения поверхности раздела

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla S=0 \tag{4}$$

Граничные условия должны быть дополнены условиями на бесконечности:

$$\mathbf{v}_1\to 0 \text{ при } r\to\infty$$

и условиями регулярности при $r=0$ и излучения при $z\to\infty$.

Представим движение жидкости как сумму основного $\mathbf{V}$, P (невозмущенного) течения и малого возмущения $\mathbf{v}'$, p'

$$\mathbf{v}=\mathbf{V}+\mathbf{v}',\ p=P+p'$$

Профили скорости невозмущенного течения $\mathbf{V}=(U,V,W)^T$, представляющего равномерное квазитвердое вращение ядра с угловой скоростью Ω и с наложенной на это вращение постоянной осевой скоростью W, имеют вид

$$U=0,\quad V=0,\quad W=const\neq 0,\qquad \text{если } r\le a$$

$$U_1=0,\quad V_1=\Omega\frac{a^2}{r}-\Omega r,\quad W_1=0,\qquad \text{если } r>a$$

Давление в невозмущенном течении следующим образом зависит от r

$$P(r)=p_0+\frac{1}{2}\rho\Omega^2r^2+\gamma/a,\ \text{если } r\le a$$

$$P_1 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\Omega^2 a^2 + \gamma / a - \frac{1}{2}\rho_1\Omega^2\left(\frac{a^4}{r^2} - a^2\right), \quad \text{если} \quad r > a$$

где p_0 – давление в центре ядра вихря.

Линеаризуем уравнения движения (1), (2)

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + W\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla p' + 2[\mathbf{v}', \Omega] + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v}', \quad \nabla\cdot\mathbf{v}' = 0, \qquad \text{если} \quad r \le a \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1'}{\partial t} + \frac{V_1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{v}_1' - 2\frac{V_1}{r}v_1'\mathbf{e}_r + \left(\frac{V_1}{r}u_1' + u_1'\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1' + 2[\mathbf{v}_1', \Omega], \quad \nabla\cdot\mathbf{v}_1' = 0, \ \text{если} \quad r > a \tag{6}$$

Ниже штрихи опускаем. Линеаризуем также граничные условия и перенесем их с поверхности $r=a+h(\varphi,z,t)$ на свободную поверхность жидкости при стационарном вращении (имеющую своим уравнением $r=a$)

$$\begin{gathered}
\frac{\partial h}{\partial t} - u + W\frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad -u + u_1 + W\frac{\partial h}{\partial z} = 0, \\
-p - \rho\Omega^2 ah - \gamma\left(\frac{h}{a^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} = -p_1 - \rho_1\Omega^2 ah, \\
\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0
\end{gathered} \tag{7}$$

3. Решение линеаризованных уравнений. Дисперсионные уравнения

Способ решения линеаризованных уравнений (5), описывающих вязкое осевое течение в ядре вихря $r \le a$, изложен в работе [12]. Уравнения (5) имеют точные решения следующего вида

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}_{mj}(\kappa_j, r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_{mj} = (\tilde{u}_{mj}, \tilde{v}_{mj}, \tilde{w}_{mj})^T, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad j = 1,2,3 \tag{8}$$

если циклическая частота ω, азимутальное волновое число m, аксиальное волновое число k и параметр κ_j удовлетворяют уравнению

$$-\omega\kappa_j + k(\kappa_j W - 2\Omega) - i\mu\kappa_j^3/\rho = 0, \quad j = 1,2,3 \tag{9}$$

Амплитуда осевой скорости $\tilde{w}_{mj}$ выражается через функцию Бесселя m-ого порядка первого рода

$$\tilde{w}_{mj} = C_j J_m(\lambda_j r),$$

а амплитуды радиальной $\tilde{u}_{mj}$ и азимутальной $\tilde{v}_{mj}$ скоростей через амплитуду $\tilde{w}_{mj}$ и её производную

$$\tilde{u}_{mj} = i\left(\frac{m\kappa_j}{\lambda_j^2 r}\tilde{w}_{mj} + \frac{k}{\lambda_j}\tilde{w}_{mj}'\right), \quad \tilde{v}_{mj} = -\left(\frac{mk}{\lambda_j^2 r}\tilde{w}_{mj} + \frac{\kappa_j}{\lambda_j}\tilde{w}_{mj}'\right), \quad \tilde{p}_{mj} = -\frac{2}{\kappa_j}\tilde{w}_{mj}, \quad j = 1,2,3$$

где $\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$, $\operatorname{Re}\lambda_j \ge 0$ C_j – произвольные постоянные, штрих обозначает производную $\tilde{w}_{mj}' = \dfrac{d\tilde{w}_{mj}(\xi)}{d\xi}$. Поля скоростей и давления в ядре вихря могут быть представлены через суперпозицию трех парциальных волн (8)

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3}\tilde{\mathbf{v}}_{mj}(\kappa_j, r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, \qquad p = \sum_{j=1}^{3}\tilde{p}_{mj}(\kappa_j, r)e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{10}$$

Векторное уравнение движения (6), описывающее возмущенное течение во внешней области $r > a$, после подстановки в него решения в виде бегущей волны $\sim e^{i(kz+m\varphi-\omega t)}$, запишем в следующем развернутом виде

$$i\left(-\omega+m\frac{V_1}{r}\right)u_1+\left(-2\frac{V_1}{r}-2\Omega\right)v_1=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}$$

$$i\left(-\omega+m\frac{V_1}{r}\right)v_1=-\frac{im}{\rho_1 r}p_1 \qquad (11)$$

$$\left(-\omega+m\frac{V_1}{r}\right)w_1=-k\frac{1}{\rho_1}p_1$$

Из системы (11) после небольших преобразований с использованием уравнения неразрывности нетрудно получить уравнение для амплитуды азимутальной скорости

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v_1+3r\frac{\partial}{\partial r}v_1-\left(m^2-1+k^2r^2\right)v_1=0 \qquad (12)$$

Уравнение (12) допускает следующее решение

$$v_1=\frac{im}{r}\left[C_4K_m(kr)+C_5I_m(kr)\right]$$

где K_m, I_m – модифицированные функции Бесселя второго и первого рода. Из условия на бесконечности следует, что коэффициент при втором слагаемом в квадратных скобках равен нулю $C_5=0$ и

$$v_1=\frac{im}{r}C_4K_m(skr)\,,\quad s=\operatorname{sign}(\operatorname{Re}k)\,. \qquad (13)$$

Для остальных компонент поля скоростей и давления во внешней области $r>a$ получаем выражения

$$u_1=\tilde{N}_4skK_m'(skr),\quad w_1=ikC_4K_m(skr)$$

$$p_1=-i\rho_1\left[-\omega+m\left(\frac{\Omega a^2}{r^2}-\Omega\right)\right]\tilde{N}_4K_m(skr) \qquad (14)$$

Таким образом, течение во внешней области описывается формулами (13), (14), а во внутренней области, как уже было отмечено выше, поле скоростей выражается посредством суперпозиции трех парциальных волн (10). Дисперсионное уравнение следует из условия существования нетривиального решения системы уравнений, полученных подстановкой (10) (12), (13) в граничные условия.

Удобно перейти к безразмерным переменным $\hat{r}=r/a$, $\hat{z}=z/a$, $\hat{t}=t\Omega$, $\tau=\omega/\Omega$, $\hat{k}=ka$, $\hat{\kappa}=\kappa a$, $\hat{\lambda}=\lambda a$, $\hat{p}=p/(\rho\Omega^2a^2)$, $\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{v}/(\Omega a)$, $\mathrm{W}=W/\Omega a$ – число Кибеля-Россби, $\tilde{\tau}=\tau-\hat{k}\mathrm{W}$, $\Pi=\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{1-A}{1+A}$, $\mathrm{A}=\frac{|\rho-\rho_1|}{\rho+\rho_1}$ – число Этвуда, $\mathrm{L}=\gamma/\rho a^3\Omega^2$ – параметр Хокинга (параметр, обратный числу Вебера We), $\mathrm{E}=\mu/(\rho\Omega a^2)$ – число Экмана. Ниже значок R у безразмерных переменных будем опускать.

В безразмерных переменных уравнение движения (3) и граничные условия (7) приобретают вид

$$-i\tau\mathbf{v}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+2\mathbf{v}\times\mathbf{e}_z\,, \qquad (16)$$

$$i\tau h+\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}=0\,,\quad ikh+[\mathbf{v}_1-\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}=0\,,\quad \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}\,,\qquad (r=1) \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}+\mathrm{E}\left(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T\right)$, $\mathbf{e}_z=\boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$, $\mathbf{T}=\left(\left[1-\Pi+\mathrm{L}(1-m^2-k^2)\right]h-p_1\Pi,0,0\right)$.

Уравнение (9) перепишется в виде

$$i\mathrm{E}\kappa^3-(k\mathrm{W}-\tau)\kappa+2k=0 \qquad (18)$$

Наименьший по абсолютному значению корень этого уравнения обозначим через κ_1. Из оставшихся двух корней через κ_2 обозначим корень с положительной мнимой частью. В типичных случаях малых чисел Экмана $\mathrm{E}<<1$, слагаемые в формулах (10), связанные с корнем κ_1, описывают крупномасштабную часть течения, а остальные слагаемые – пограничные слои. По физическому смыслу κ_j $(j=1,2,3)$ являются параметрами, характеризующими завихренность.

Исключим h из трех последних граничных условий (7), используя первое граничное условие (7). После исключения получим (при $r=1$)

$$\tau u=(\tau-k\mathrm{W})u_1,\quad imu+\frac{\partial v}{\partial r}-v=0,\quad \frac{\partial w}{\partial r}+iku=0,$$
$$-p+2\mathrm{E}\frac{\partial u}{\partial r}=-p_1\Pi-i[1-\Pi+\mathrm{L}(1-m^2-k^2)]u_1/\tau \tag{19}$$

Подставим выражения (15), (13-14) для поля скоростей и давления в ядре и внешнем течении вихря в граничные условия (19). Представляется более удобным для дальнейших вычислений заменить производные от Бесселевых функций m-ого порядка на комбинацию из функций m-1 (или m+1) и m-ого порядка. После подстановки получим однородную систему четырех уравнений относительно C_j ($j=1,\ldots,4$), которую запишем в матричном виде

$$\mathbf{AC}=0 \tag{20}$$

где $\mathbf{C}=(C_1,C_2,C_3,C_4)^T$, $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – 4×4 матрица со следующими элементами

$$a_{1j}=i\tau\left(\frac{m(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2}J_m(\lambda_j)+\frac{k}{\lambda_j}J_{m-1}(\lambda_j)\right),\quad j=1,2,3;$$
$$a_{14}=(\tau-k\mathrm{W})[mK_m(sk)+skK_{m-1}(sk)],$$
$$a_{2j}=2\left[-\frac{1}{\kappa_j}+i\mathrm{E}\left(\frac{m(m+1)(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2}+k\right)\right]J_m(\lambda_j)-2i\mathrm{E}\frac{(k-m\kappa_j)}{\lambda_j}J_{m-1}(\lambda_j),\quad j=1,2,3;$$
$$a_{24}=-i\left[\Pi\tau K_m(sk)+\tau^{-1}[1-\Pi+\mathrm{L}(1-m^2-k^2)](mK_m(sk)+skK_{m-1}(sk))\right],$$
$$a_{3j}=-\left(\frac{m(2m+1)(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2}+\kappa_j\right)J_m(\lambda_j)+\frac{\kappa_j-2mk}{\lambda_j}J_{m-1}(\lambda_j),\quad a_{34}=0,$$
$$a_{4j}=-\left(m+\frac{mk(\kappa_j-k)}{\lambda_j^2}\right)J_m(\lambda_j)+\frac{\lambda_j^2-k^2}{\lambda_j}J_{m-1}(\lambda_j),\quad a_{44}=0,\ \lambda_j^2=\kappa_j^2-k^2.$$

Система (20) имеет нетривиальное решение, когда

$$\det\mathbf{A}=0 \tag{21}$$

Уравнение (21) – это дисперсионное соотношение, определяющее связь между безразмерным аксиальным волновым числом k, азимутальным волновым числом m и безразмерной частотой τ (отношением циклической частоты волны к угловой скорости вращения) при заданных параметрах E, W, L и П.

В частном случае идеальной жидкости $\mathrm{E}=0$ остаются только первые два граничных условия (19), выражающие требования непрерывности при переходе через границу $r=1$ нормальной к границе раздела компоненты скорости и давления. От линейной комбинации трех парциальных волн, описывающих поле скоростей в ядре вихря, остается только одна волна

$$u=i\left(\frac{\vartheta}{r}J_m(\lambda_1 r)+\frac{k}{\lambda_1}J_{m-1}(\lambda_1 r)\right)C_1,\quad v=\left(\frac{\vartheta}{r}J_m(\lambda_1 r)-\frac{\kappa_1}{\lambda_1}J_{m-1}(\lambda_1 r)\right)C_1,\quad w=J_m(\lambda_1 r)C_1$$

где $\vartheta=m(\kappa_1-k)\lambda_1^{-2}$. Выражение для параметра завихренности κ_1, как следует из уравнения (18), при $\mathrm{E}=0$ становится очень простым $\kappa_1=-2k/(\tau-\mathrm{W}k)$. Дисперсионное уравнение принимает вид

$$D(\tau,k)=0$$

где

$$D(\tau,k)=\left(\frac{m\kappa}{\lambda^2}+\frac{k}{\lambda}\frac{J_m'(\lambda)}{J_m(\lambda)}\right)\left\{\tau^2\Pi-[1-\Pi+\mathrm{L}(1-m^2-k^2)]\frac{skK_m'(sk)}{K_m(sk)}\right\}+(\tau-kW)^2\frac{skK_m'(sk)}{K_m(sk)}, \tag{22}$$

индекс 1 у λ и κ опущен.

Литература

1. Kelvin, Lord On Vortex Atoms // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. VI, 1867. P. 94-105. Reprinted in Phil. Mag. Vol. XXXIV, 1867. P. 15-24.
2. Kelvin, Lord Vibrations of a columnar vortex. //Philos. Mag. 1880. Vol. 10. P. 155–168.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford. 1961. Clarendon Press.
4. Krishnamoorthy V. Vortex breakdown and measurements of pressure fluctuation over slen-der wings. – Southampton, 1966. Ph.D. thesis.
5. Moore D.W., Saffman P.G. The motion of a vortex filament with axial flow //Philos. Trans. R. Soc. London 1972. A272. P. 403–429.
6. Uberoi M.S., Chow C.Y., Narain J.P. Stability of coaxial rotating jet and vortex of different densities mahinder //Phys. Fluids. 1972. Vol. 15, № 10. P. 1718-1727.
7. Lessen M., Deshpande N.V., Hadji-Ohanes B. Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core //J. Fluid Mech. 1973. Vol. 60. P. 459–466.
8. Wu C., Farokhi S., Taghavi R. Spatial instability of a swirling jet – theory and experiment. AIAA J. 1992. Vol. 30 P. 1545–1552.
9. Loiseleux T., Chomaz J.M., Huerre P. The effect of swirl on jets and wakes: linear instabil-ity of the Rankine vortex with axial flow. Phys Fluids. 1998. Vol. 10. N5. P. 1120–1134.
10. Gillis J., Kaufman B. The stability of a rotating viscous jet //Applied Mathematics Quarterly, 1962. Vol. 19. P. 301-308
11. Kubitschek J.P., Weidman P.D. The effect of viscosity on the stability of a uniformly rotat-ing liquid column in zero gravity // J. Fluid Mech. 2007. V. 572. P. 261-286.
12. Солдатов И.Н. Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости ПМТФ. 2008. Т. 49. № 2. С. 15-20.

ПРИМЕНЕНИЕ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В ОПТИМАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И[1*]

М.С. Сорокина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается линейная нестационарная система при неточно известных начальном состоянии и действующем возмущении, удовлетворяющих единому ограничению. Рассмотрен способ оценки эллипсоидального множества достижимости для таких систем. Его использование позволяет найти минимальное множество достижимости (то есть оценка оптимальна), которое определено при помощи оптимального наблюдателя. Приведен пример его применения для уравнения Матьё-Хилла с затуханием, которое описывает параметрические колебания и резонанс. Также рассматривается линейная нестационарная система, включающая в себя параметрическую неопределенность, для которой строится аналогичная оценка.

Ключевые слова: множества достижимости, эллипсоидальные множества, оптимальный наблюдатель, параметрическая неопределенность.

1. Введение

Исследование возможности достижения системой того или иного состояния под действием управления является одной из основных задач в теории управления динамическими системами. Для этого необходимо исследовать её множества достижимости. Множества достижимости играют важную роль в разных областях теории управления. Основные из них: задачи оптимального управления (при известном множестве достижения задача сводится к минимизации функции n переменных на нем); оценка возможностей управления (возможно ли привести систему в заданное состояние в фиксированный момент времени); оценка возмущений (множество достижимости характеризует область, в которую может попасть система под действием возмущения); гарантированное оценивание (фильтрация) в динамических системах (при известном множестве достижимости и заданных ограничениях на возмущения получаем оценку разброса траекторий под его воздействием). Это делает их применимыми практически во всех сферах деятельности: в технической деятельности (задачу сохранения беспилотным летательным аппаратом заданной траектории с учетом скорости и направления ветра и задачу построения траектории манипулятора), экономике, медицине, химии и т. д.

2. Оценивание множеств достижимости

2.1. Множество достижимости

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)v(t), \qquad x(t_0) = x_0 \in M, \qquad t \in [t_0, T]$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние системы; $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – возмущение, действующее на систему: $v = v(\sigma), \sigma \in [t_0, T]$; M – замкнутое множество в пространстве состояний, определяющее совокупность возможных начальных состояний системы:

$$M = \left\{ x, v(\sigma) : x_0^T R^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{T} v^T(\sigma)\, G^{-1} v(\sigma) d\sigma \le 1 \right\}.$$

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект №0729-2020-0055) и научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Из каждой точки множества M выходит много траекторий системы, отвечающих разным значениям возмущения. Множеством достижимости для системы при $t \geq t_0$ называется совокупность концов $x(t)$ всех траекторий, выходящих из M в момент времени $t \geq t_0$.

2.2. Оценивание множеств достижимости

Точное нахождение множества достижимости может быть довольно трудоёмкой операцией, часто используются множества, найденные приближенно, и их оценки. Например, аппроксимация эллипсами вида:

$$E(a, Q) = \{x: Q^{-1}(x - a), \qquad x - a \leq 1\},$$

где $a -$ вектор центра эллипсоида, $Q -$ положительно определенная симметрическая матрица.

Рассмотрим способ построения оптимальной оценки множества достижимости, приведенный в статье [1].

3. Пример

Применяя способ из статьи [1], решим задачу, аналогичную [2]. Ее решение будет иметь вид, приведенный на рис.1.

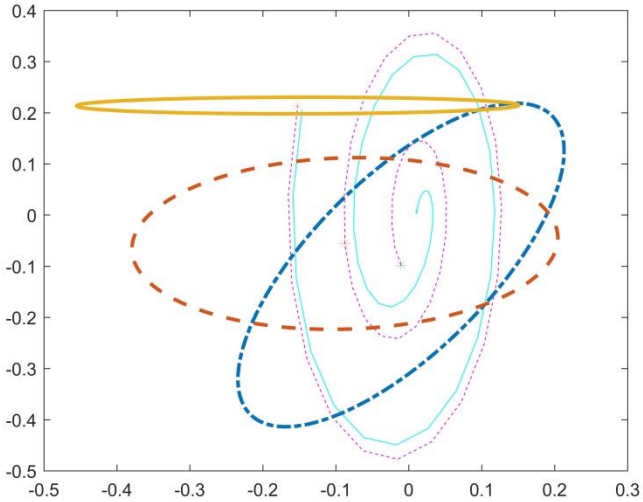


Рис. 1. Вид множеств достижимости

4. Оценивание множества достижимости в задачах с параметрической неопределенностью

Рассмотрим постановку задачи из [3].

Рассматриваемая система имеет вид:

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x(t), \hat{A} = A + F\Omega(t)E,$$

где $A -$ матрица номинальной системы; $F, E -$ заданные постоянные матрицы; $\Omega(t) -$ неизвестная матричная функция: $\Omega^T(t)\Omega(t) \leq \eta^2 I, \eta \neq 0$.

Будем рассматривать интервальную неопределенность, то есть, все неопределенные параметры изменяются в заданных интервалах. Тогда для каждого из вариантов матрицы $\Omega(t)$ мы можем оценить множество достижимости, а после этого выбрать оценку множества достижимости уже для всей исходной системы. Для этого воспользуемся способом из [1].

Литература

1. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах оценивания и управления // Дифференциальные уравнения, т. 55, № 11, с. 1485 – 1498, 2019.
2. Сорокина М.С. Оптимальное оценивание линейных нестационарных систем с использованием множеств достижимости // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ имени Е.В. Воскресенского, 2020. [в печати]
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств – М.: Наука, 2007. – 281 с.

SUPERSONIC SHEAR IMAGING: ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ И НАПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ РАБОТЫ С СИСТЕМОЙ VERASONICS[1*]

А.Е. Спивак, И.Ю. Демин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе представлена модель реализации метода Supersonic Shear Imaging на акустической системе Verasonics. Описано общее представление о методе. Также представлены основные пункты адаптации модели для работы на установке. Описан алгоритм обработки данных, полученных в ходе работы метода.

Ключевые слова: эластография сдвиговой волной, Supersonic Shear Imaging, SSI, скорость сдвиговых волн, модуль Юнга, карта эластичности, фантом, Verasonics

1. Введение

Многие процессы в организме человека, такие как фиброз, отек, образование раковых клеток, могут вызывать микроскопические изменения составляющих некоторых органов, например, печени, молочной железы, щитовидной железы, скелетных мышц, поджелудочной железы, почки, селезенки и др., что приводит к макроскопическим изменениям ткани органа (от микрометров до сантиметров). Последние несколько десятков лет мировые ученые группы заняты разработкой методов эластографии, позволяющих отображать упругие свойства органов и тканей в организме. Сейчас в качестве одного из методов обнаружения злокачественных опухолей применяется один из методов эластографии Supersonic Shear Imaging (SSI), реализованный на экспертных ультразвуковых системах фирмы Supersonic [1-2], позволяющий количественно оценить модуль Юнга в некоторой области.

2. Supersonic Shear Imaging

Supersonic Shear Imaging представляет собой дальнейшее развитие метода Shear Wave Elasticity Imaging [3]. В среде возбуждается несколько источников распространения сдвиговых волн. Для этого в среду последовательно запускается несколько фокусирующих импульсов, отличающиеся смещением точки фокусировки по глубине, создавая движущийся источник сдвига. Главным условием создания данного источника является его перемещение с большей скоростью, чем скорость сдвиговой волны в среде, т.е. «число Маха» $M > 1$. Сформировавшиеся сдвиговые волны, интерферируя между собой вдоль образующегося «конуса Маха», формируют две квазиплоские волны, распространяющиеся в разные стороны (рис 1). Квазиплоская волна, формируемая в методе SWEI, имеет большую амплитуду по сравнению с обычной сдвиговой волной, за счет чего может преодолевать достаточно большое расстояния и проникать в различные объекты в среде до затухания, а её форма позволяет ей равномерно распределяться по всей глубине исследуемой области.

«Число Маха» отвечает за угол, под которым распространяется квазиплоская сдвиговая волна. С его увеличением угол начинает стремиться к 90° по отношению к направлению распространения волны. Можно выделить отдельные режимы работы данного метода на основе значения числа M (Mach 3, Mach 4, Mach 5, Mach 10, Mach -3). Отдельно стоит отметить режим работы Mach -3, в котором начало формирование конуса начинается с самой глубокой точки. Однако наиболее часто в литературе упоминаются режимы Mach 3 и Mach 10, в которых отношение скорости смещения фокуса к скорости сдвиговой волны равно 3 и 10 соответственно.

[1*] Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание № 0729-2020-0040).

После генерации квазиплоских сдвиговых волн регистрируется их распространение в среде с использованием метода Ultrafast Imaging. После каждого пуска сфокусированного импульса запускается небольшая пачка изображающих импульсов. На основании данных, полученных ими, делаются выводы о формировании конуса Маха. Основная пачка импульсов, в которой количество изображающих импульсов может достигать 100, запускается уже после формирования квазиплоских волн. Она регистрирует их дальнейшее распространение, и на основании записанных данных производится обработка и вывод результатов о эластичности ткани в выбранном участке.

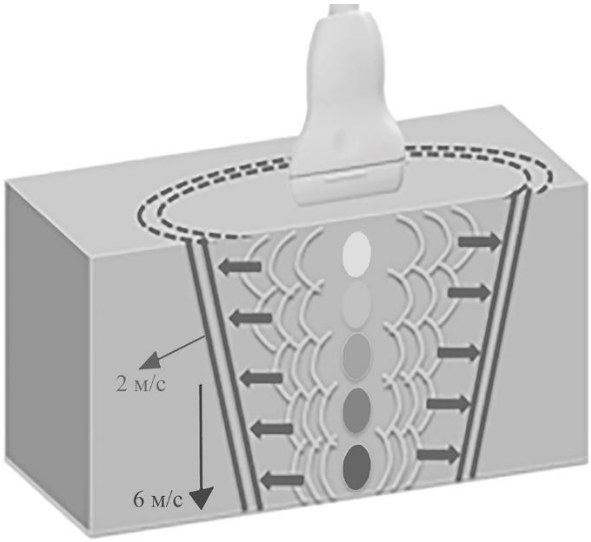


Рис. 1. Схема формирования квазиплоской сдвиговой волны

2. Реализация модели на акустической системе Verasonics

Метод Supersonic Shear Imaging был реализован на акустической системе Verasonics с открытой архитектурой лаборатории «МедЛаб» Радиофизического факультета Нижегородского государственного университета. Исследовательская система Verasonics представляет собой универсальный ультразвуковой диагностический прибор, предназначенный для макетирования и отладки различных алгоритмов медицинской акустики (рис. 1). В ней есть возможность в широких пределах изменять параметры ультразвуковых волн и программировать их в зависимости от задач и объектов исследования. Принимаемые эхосигналы записываются прибором и доступны для постобработки в виде массивов числовых данных. Весь сценарий посылки импульсов, приема и обработки данных, построения изображения программируется пользователем на языке MATLAB [4].

2.1. Реализация формирования конуса

При реализации метода SSI на Verasonics для формирования квазиплоской сдвиговой волны использовались 5 фокусирующих импульсов. Расстояние по глубине между точками фокусировки выбрано 5 мм. Оптимальная разница между скоростью смещения фокуса сдвига (V_f) и скоростью сдвиговой волны, которая при разработке метода была выбрана 2.76 м/с (V_{sh} = 2.76 м/с), составляет 3 (M = 3).

Классическая схема на Verasonics позволяла достоверно сохранять данные о распространении каждой отдельной сдвиговой волны благодаря наличию пачки из 5 изображающих импульсов после первых 4 фокусирующих. Однако они приводили к крупным интервалам между толкающими импульсами, что давало очень небольшую разницу между скоростью смещения фокуса и скоростью сдвиговой волны в среде (V_f = 3.57 м/с, M = 1.5). Было обнаружено, что из-за данного фактора при измерении в средах с большей эластичностью квазиплоские сдвиговые волны могут не образовываться. Поэтому классическая схема была модифицирована (рис. 2). Вместо пачки импульсов, между фокусирующими пускался лишь один изображающий. Это

позволило сохранить часть данных о распространении каждой отдельной сдвиговой волны, а также увеличить разницу между скоростью смещения фокуса (V_f = 8.3 м/с) и скоростью сдвиговой волны в среде, которая начала достигать максимального значения, равного M = 3, что достаточно для образования квазиплоских сдвиговых волн, в том числе и при измерении в более эластичных средах.

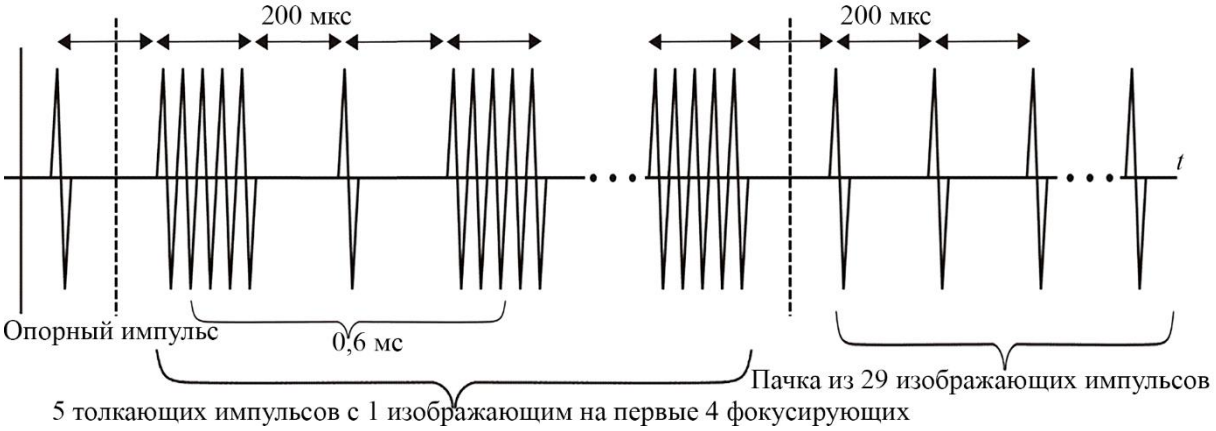


Рис. 2. Схема формирования квазиплоской сдвиговой волны

Для случаев измерения объектов, в которых среда имеет более высокий показатель упругости (для рассмотрения была взята среда с модулем Юнга 48 кПа или 4 м/с), была модифицирована схема импульсов, посылаемых в среду. Мы не использовали промежуточные изображающие импульсы, которые регистрируют формирование конуса Маха. Это дало возможность увеличить скорость смещения фокуса (V_f = 12.5 м/с), что позволяет получать M = 3 при работе со средами, в которых скорость сдвиговых волн равна 4 м/с, для менее упругих сред число Маха может достигать M = 6, что влияет на угол, под которым распространяются квазиплоские сдвиговые волны. Контролировать формирование конуса в предложенной схеме предлагается за счет его финальной формы, которая регистрируется первым изображающим импульсом.

Для регистрации распространения квазиплоских сдвиговых волн используется пачка изображающих импульсов. Была использована схема, применявшаяся на акустической системе Verasonics при реализации на нем метода SWEI. 200 мкс является достаточной задержкой между импульсами для качественного отслеживания динамикой распространении волны в среде. Однако в ходе реализации SSI было выявлено, что 19 изображающих импульсов недостаточно для полного отслеживания распространения квазиплоских сдвиговых волн на исследуемом участке. В связи с этим число изображающих импульсов было увеличено до 29. С помощью данной последовательности импульсов система может регистрировать изменения в среде за счет распространения квазиплоских сдвиговых волн в течении 6 мс. При V_{sh} = 2 м/с это позволяет увеличить исследуемую зону с 1 см, которая применялась при подсчете скорости сдвиговой волны по обеим её компонентам и её визуализации в методе SWEI, до 3 см с включением области формирования конуса.

2.2. Алгоритм обработки данных

Первичная обработка результатов, полученных с использованием метода SSI, для получения данных о смещении точек в различных координатах исследуемого участка среды аналогична применяемой в методе SWEI. Смещение вычисляется с помощью корреляции одного из изображающих импульсов с опорным. По сдвигу пика корреляционной кривой относительно нуля можно определить запаздывание волны, вызванное смещением среды. При обработке данных, полученных методом SSI на Verasonics, необходимо было учитывать появление изображающих импульсов, которые отвечают за регистрацию формирования квазиплоских сдвиговых волн.

Первым алгоритмом, разработанным для конечной обработки данных для метода SSI, является визуализация формирования и распространения квазиплоских сдвиговых волн (рис. 3). Он

базируется на скрипте отображения распространения сдвиговой волны в методе SWEI, но имеет несколько характерных отличий [6].

Во-первых, поскольку квазиплоская сдвиговая волна имеет возросшую амплитуду по сравнению с простой, запускаемой в методе SWEI, она распространяется на большие расстояния. Кроме того, разница между первой точкой фокусировки и последней по глубине составляет 20 мм, поэтому нужно увеличивать сетку не только по ширине, но и по высоте (глубине). Итоговый размер сетки для визуализации волн был выбран 101 × 51 ячейку (при переводе в единицы измерения получатся 30 мм по глубине и 15 мм по ширине).

Во-вторых, Verasonics при работе метода SSI регистрирует данные с 33 изображающих импульсов, не считая опорный. Обработка результатов с учетом размера новой сетки приводит к значительному увеличению времени работы алгоритма.

Для оптимизации алгоритма число учитываемых изображающих импульсов было уменьшено до 11. При обработке будут учитываться только импульсы, снимающие среды в процессе формирования конуса Маха, а после формирования квазиплоских сдвиговых волн и начала их распространения - каждый третий изображающий импульс из основной пачки.

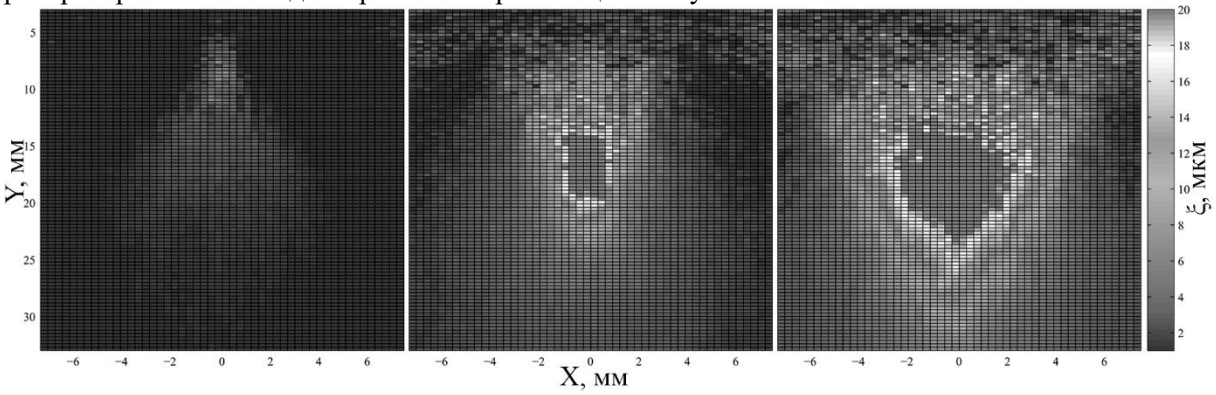


Рис. 3. Визуализация формирования квазиплоских сдвиговый волн

Предложенный алгоритм позволяет судить о правильности формирования квазиплоских сдвиговых волн. Его использование в первой схеме реализации метода SSI на акустической системе Verasonics показало ее непригодность, поскольку при визуализации было четко выражено отсутствие явления формирования квазиплоских сдвиговых волн, и наблюдалось только распространение отдельно сформированных сдвиговых волн.

Далее был разработан алгоритм для обработки данных, полученных с использованием метода Supersonic Shear Imaging и акустической системы Verasonics, и достижения конечного результата в виде выявления упругих характеристик (скорости сдвиговой волны или модуля Юнга) в исследуемом объекте. За основу был взят интерфейс экспертной системы Supersonic Aixplorer, а именно его elasticity map.

При этом использовался алгоритм получения сетки, сохраняющей в своих ячейках данные о смещении в каждой точке исследуемой области, применяемый при визуализации распространения сдвиговой волны и квазиплоской волны. Для создания elasticity map размер сетки увеличен до 101 × 101 точки или 30 × 30 мм, при этом учитываются все изображающие импульсы (кадры, фреймы) из пачки, регистрирующей распространение квазиплоской сдвиговой волны, но при этом не учитываются импульсы, записывающие среды в момент формирования конуса Маха.

В каждой точке, через которую прошла квазиплоская сдвиговая волна, функция смещения имеет четко выраженный максимум в определённый момент времени, соответствующий времени прихода фронта волны в данный участок исследуемой области. Сопоставляя координаты пикселя по оси, параллельной оси распространения квазиплоской сдвиговой волны, с временем прихода волны в данную точку, и зная такие же параметры у соседнего пикселя, можно вычислить скорость прохождения волны на данном участке. Теоретически, для этих целей достаточно 2 пикселей, но, чтобы уменьшить эффект шумов, предлагается учитывать большее их количество.

В ходе написания алгоритма было предложено брать минимум 3 точки с главной центральной. При этом получаемый результат в виде скорости и пересчитываемого из неё модуля Юнга приписывался бы 2-ой (центральной) точке. Такой выбор обусловлен влиянием среды на прохождение волны в данной точке по сравнению с предыдущими и последующими. Предложенная схема позволяет упростить алгоритм обработки при подсчете значения модуля Юнга на краевых точках. Были опробованы комбинации из 3, 5, 7 и 9 точек. В результате оптимальным значением является 5 точек с главной центральной.

В результате был написан алгоритм, который на выходе выдавал массив размерами 101 на 101 ячейку, в каждой из которых записано значение модуля Юнга в данной точке (рис. 4). С использованием программной среды MATLAB можно получить карту распределения модуля Юнга на исследуемом участке в зависимости от объектов, находящихся в ней. В качестве итогового численного результата выбран модуль Юнга, поскольку его значения в зависимости от исследуемого объекта можно варьировать в значениях от 0 до 100 кПа и более, а не скорость сдвиговой волны, значения которой могут изменяться от 1 до 20 м/с.

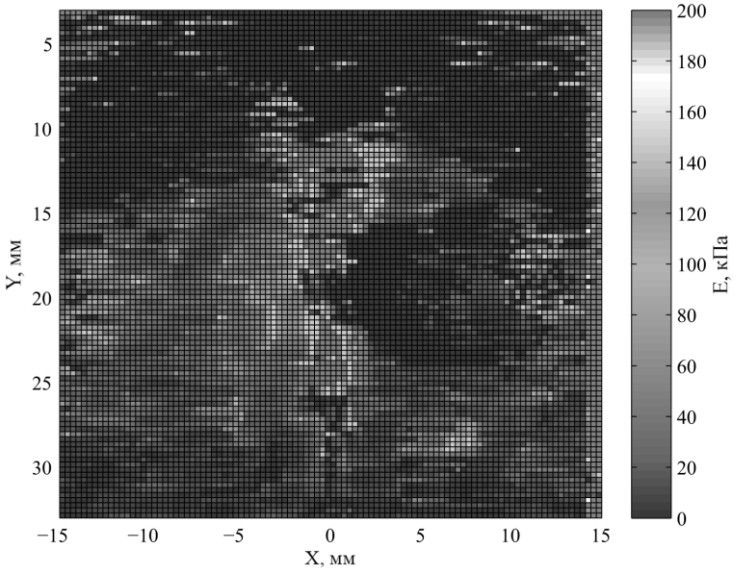


Рис. 4. Elasticity map, полученный на основе работы метода SSI на акустической системе Verasonics

Литература

1. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Swanson S.D. // Ultrasound Med. Biol. vol. 24, pp. 1419–1435, 1998
2. Nenadic I., Urban M., Greenleaf J., Gennisson J.-L., Bernal M., Tanter M. Ultrasound Elastography for Biomedical Applications and Medicine. Hoboken, NJ: Wiley 2019. 616 p.
3. Bercoff J., Tanter M., Fink M. Supersonic Shear Imaging: A New Technique for Soft Tissue Elasticity Mapping // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 2004, vol. 51, p. 396-409.
4. Демин И.Ю., Спивак А.Е., Лисин А.А. Моделирование диагностического метода эластографии сдвиговой волной в акустической системе Verasonics с открытой архитектурой // Проектирование и технология электронных средств. 2019. №1. С.50-56.
5. Daigle R. Sequence Programming Manual. Verasonics, Inc. 2011. 119 p.
6. Демин И.Ю., Лисин А.А., Спивак А.Е., Шнейдман Д.Д. Эластография сдвиговой волной: физическое моделирование на акустической системе Verasonics и численное моделирование в toolbox k-Wave // Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2018. № 6. 1860101.

ОПЫТ СОЗДАНИЯ И ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ НА ОСНОВЕ СЕТИ АНГАРА

В.В. Стегайлов

Объединенный институт высоких температур РАН
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

В докладе будет рассказано об опыте создания и практического использования в ОИВТ РАН суперкомпьютеров на основе сети Ангара. Гибридный суперкомпьютер Десмос с тороидальным вариантом сети Ангара эксплуатируется уже почти 4 года и успел пройти две стадии модернизации GPU-ускорителей. Будут представлены данные о его производительность для расчетов кодов, ориентированных на задачи вычислительного материаловедения. Будут затронуты вопросы параллельного ввода-вывода данных и анализа загрузки системы очередей. Суперкомпьютер Фишер, основанный на процессорах AMD Ерус, коммутаторном варианте сети Ангара и системе погружного охлаждения, эксплуатируется уже второй год. В докладе будет представлен анализ энергоэффеективности данной системы.

Ключевые слова: сеть Ангара, эффективность суперкомпьютеров, вычислительное материаловедении

1. Введение

Быстрое развитие параллельных вычислительных методов и высокопроизводительных систем предоставляет огромные возможности для методов атомистического моделирования. В настоящее время подобные математические модели и вычислительные коды являются уже не только методами фундаментальных исследований, но и инструментами решения намного более широкого круга проблем. Применение классической молекулярной динамики (МД) в данный момент вышло на масштабы триллионов атомов и миллисекунд моделирования.

Существуют два основных способа ускорить МД расчет [1]. Первый способ представляет собой использование массово-параллельных систем с распределенной памятью (MPP). Для молекулярно-динамических расчетов наиболее естественным способом распределить вычислительную нагрузку и данные по узлам MPP-системы является разделение по пространству (domain decomposition). Сопутствующие проблемы балансировки нагрузки могут быть решены при этом очень эффективно.

Вторая возможность ускорить расчет состоит в увеличении вычислительных возможностей каждого узла MPP-системы. Использование многопроцессорных и многоядерных узлов с общей памятью обеспечивает существенное ускорение МД-расчета. Тем не менее, масштабируемость систем с общей памятью ограничивается их стоимостью и скоростью доступа в оперативную память для многопроцессорных и/или многоядерных узлов. Производительность систем с общей памятью становится значительно выше с развитием технологии GPGPU.

В докладе будет рассказано об опыте создания и практического использования в ОИВТ РАН суперкомпьютеров на основе сети Ангара: о гибридном суперкомпьютере Десмос с тороидальным вариантом сети Ангара и суперкомпьютере Фишер, основанный на процессорах AMD Ерус, коммутаторном варианте сети Ангара и системе погружного охлаждения. В докладе будет представлен анализ производительности кодов, ориентированных на задачи вычислительного материаловедения. Будут затронуты вопросы параллельного ввода-вывода данных, загрузки системы очередей и энергоэффективности.

2. Сети тороидальной топологии и сеть Ангара

Тороидальные топологии интерконнекта зачастую обеспечивают лучшее параллельное масштабирование задачи по сравнению с топологиями типа толстое дерево (см., например, [2]).

В 1990-е годы развитие MPP-систем достигло своего пика во время успеха систем Cray T3E, базировавшихся на трехмерной тороидальной топологии [3]. Cray T3E был первым суперкомпьютером, который достиг производительности 1 ТФлопс/сек для прикладной задачи. В июне 1998 Cray T3E занимал 4 место в списке Топ500. Затем системы с уникальным (тороидальным) интерконнектом были вытеснены из лидеров Топ500 системами, созданными из обычных комплектующих. В 2004, после нескольких лет доминирования подобных Beowulf-кластеров, выполненный по самостоятельному проекту тороидальный интерконнект появился в составе суперкомпьютера IBM BlueGene/L [4]. Последующие суперкомпьютеры от Cray и IBM также имели тороидальные топологии (за исключение серии XC от Cray). Суперкомпьютеры K Computer и Fugaku от Fujitsu основан на собственном интерконнекте Tofu [5]. Суперкомпьютеры AURORA Booster и GREEN ICE Booster базируются на тороидальном интерконнекте EXTOLL [6].

Среди развивающихся вариантов российского суперкомпьютерного интерконнекта можно отметить сеть МВС-Экспресс, основанную на шине PCI-Express [7], прототипы на ПЛИС тороидальных интерконнектов СКИФ-Аврора [8] и Паутина [9]. И интерконнект Ангара, который к настоящему времени прошел путь от прототипа на ПЛИС [10,11] до СБИС [12].

На основе СБИС Ангара в настоящее время производится и вариант интерконнекта на основе коммутатора.

Рис. 1. Внешний вид и топология суперкомпьютера Десмос

3. Суперкомпьютер Десмос

Суперкомпьютер Десмос создавался в несколько этапов [13-17]. Первый вариант был введен в эксплуатацию в конце 2016 года. На протяжении 2017 года суперкомпьютер использовался как для проведения научных исследований, так и для тестов производительности, направленных на оптимизацию и повышение эффективности. В 2018 году было введено в строй хранилище данных, основанное на параллельное файловой системе BeeGFS и установлены GPU-ускорители FirePro S9150. Данный тип ускорителей не является самым современным из доступных на рынке, однако по соотношению цена-производительность оказался наиболее оптимальным для задач молекулярного моделирования, на которые ориентирован суперкомпьютер Десмос. В 2020 г. узлы Десмоса были модернизированы с использованием ускорителей AMD MI50.

Определенные сложности и риски при создании суперкомпьютера Десмос были связаны с тем, что интерконнект Ангара является новой оригинальной разработкой, не имеющей пока длительной истории внедрения. Эксплуатация суперкомпьютера Десмос выявила возможности для оптимизации соответствующего системного программного обеспечения. В результате интенсивного и плодотворного сотрудничества коллективов ОИВТ РАН и АО НИЦЭВТ суперкомпьютер Десмос превратился в высокоэффективный инструмент научных исследований [17].

4. Суперкомпьютер Фишер

Другой системой, введенной в 2018 году в эксплуатацию в ОИВТ РАН является погружной сегмент суперкомпьютера Фишер, основанный на процессорах AMD Epyc Naples (в 2020 г. система проходит доукомплектование/модернизацию на новое поколение процессоров Epyc Rome). Данный тип процессоров характеризуется высокой пропускной способностью памяти, что является востребованной характеристикой для многих научных HPC-кодов. В докладе будут представлены тесты производительности различных приложений, подтверждающие высокую производительность данной архитектуры [18].

Рис. 2. Внешний вид сегмента суперкомпьютера Фишер с погружным охлаждением

Для сбора данных была реализована единая трехуровневая система мониторинга реального времени на суперкомпьютере Десмос и воздушном и погружном сегментах суперкомпьютера Фишер:

- RAPL-подобные протоколы для энергопотребления процессоров,
- мониторинг энергопотребления на уровне узлов по IPMI,
- логирование энергопотребления на уровне ИБП.

Было проанализировано энергопотребление расчета одного и того же ресурсоемкого вычислительного кода, а именно крупномасштабной задачи молекулярной динамики, на трех вышеупомянутых суперкомпьютерах [19].

5. Заключение

Представленные в докладе результаты свидетельствуют о возможности успешного использования сети Ангара для создания и практического использования высокопроизводительных вычислительных систем различных типов.

Литература

1. Смирнов Г. С., Стегайлов В. В. Эффективность алгоритмов классической молекулярной динамики на суперкомпьютерном аппаратном обеспечении // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. С. 95–108.
2. Corsetti F. Performance analysis of electronic structure codes on HPC systems: A case study of SIESTA // PLOS ONE. 2014. V. 9. P. 1–8.

3. Scott S. L.,Thorson G. M. The Cray T3E network: Adaptive routing in a high performance 3D torus // HOT Interconnects IV, Stanford University, August 15-16, 1996.
4. Adiga N. R., Blumrich M. A., Chen D., Coteus P., Gara A., Giampapa M. E., Heidelberger P., Singh S., Steinmacher-Burow B. D., Takken T., Tsao M., Vranas P. Blue Gene/L torus interconnection network // IBM J. Res. Dev. 2005. V. 49. P. 265–276.
5. Ajima Y., Inoue T., Hiramoto S., Takagi Y., Shimizu T. The Tofu interconnect // IEEE Micro. 2012. V. 32. P. 21–31.
6. Neuwirth S., Frey D., Nuessle M., Bruening U. Scalable communication architecture for network-attached accelerators // 2015 IEEE 21st International Symposium on High Performance Computer Architecture (HPCA). 2015. P. 627–638.
7. Елизаров Г. С., Горбунов В. С., Левин В. К., Лацис А. О., Корнеев В. В., Соколов А. А., Андрюшин Д. В., Климов Ю. А. Коммуникационная сеть МВС-Экспресс // Выч. мет. программирование. 2012. Т. 13. С. 103–109.
8. Адамович И. А., Климов А. В., Климов Ю. А., Орлов А. Ю., Шворин А. Б. Опыт разработки коммуникационной сети суперкомпьютера «СКИФ-Аврора» // Программные системы: теория и приложения. 2010. Т. 1. С. 107–123.
9. Климов Ю. А., Шворин А. Б., Хренов А. Ю., Адамович И. А., Орлов А. Ю., Абрамов С. М., Шевчук Ю. В., Пономарев А. Ю. Паутина: высокоскоростная коммуникационная сеть // Программные системы: теория и приложения. 2015. Т. 6. С. 109–120.
10. Симонов А. С., Макагон Д. В., Жабин И. А., Щербак А. Н., Сыромятников Е. Л., Поляков Д. А. Первое поколение высокоскоростной коммуникационной сети «Ангара» // Наукоемкие технологии. 2014. Т. 15. С. 21–28.
11. Мукосей А. В., Семенов А. С., Симонов А. С. Имитационное моделирование подсети коллективных операций сети «Ангара» // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2015. Т. 4. С. 40–55.
12. Агарков А. А., Исмагилов Т. Ф., Макагон Д. В., Семенов А. С., Симонов А. С. Результаты оценочного тестирования отечественной высокоскоростной коммуникационной сети Ангара // Сборник трудов международной конференции “Суперкомпьютерные дни в России — 2016”. 2016. С. 626–639.
13. Вечер В.С., Кондратюк Н.Д, Смирнов Г.С., Стегайлов В.В. Гибридный суперкомпьютер на базе сети Ангара для задач вычислительного материаловедения // Суперкомпьютерные дни в России. – 2017. – С. 557-571.
14. Stegailov V., Agarkov A., Biryukov S., Ismagilov T., Khalilov M., Kondratyuk N., Kushtanov E., Makagon D., Mukosey A., Semenov A., Simonov A., Timofeev A., Vecher V. Early performance evaluation of the hybrid cluster with torus interconnect aimed at molecular-dynamics simulations // International Conference on Parallel Processing and Applied Mathematics. – Springer, Cham, 2017. – С. 327-336.
15. Kondratyuk N., Smirnov G., Dlinnova E., Biryukov S., Stegailov V. Hybrid supercomputer Desmos with Torus Angara interconnect: Efficiency analysis and optimization // International Conference on Parallel Computational Technologies. – Springer, Cham, 2018. – С. 77-91.
16. Kondratyuk N., Smirnov G., Stegailov V. Hybrid codes for atomistic simulations on the Desmos supercomputer: GPU-acceleration, scalability and parallel I/O // Russian Supercomputing Days. – Springer, Cham, 2018. – С. 218-229.
17. Stegailov V., Dlinnova E., Ismagilov T., Khalilov M., Kondratyuk N., Makagon D., Semenov A., Simonov A., Smirnov G., Timofeev A. Angara interconnect makes GPU-based Desmos supercomputer an efficient tool for molecular dynamics calculations // International Journal of High Performance Computing Applications. – 2019. – Т. 33. – №. 3. – С. 507-521.
18. Stegailov V., Smirnov G., Vecher V. VASP hits the memory wall: Processors efficiency comparison // Concurrency and Computation: Practice and Experience. – 2019. – Т. 31. – №. 19. – С. e5136.
19. Dlinnova E., Biryukov S., Stegailov V. Energy Consumption of MD Calculations on Hybrid and CPU-Only Supercomputers with Air and Immersion Cooling // Parallel Computing: Technology Trends. Amsterdam: IOS Press, 2020. P. 574-582.

ПОВЫШЕНИЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ТЕКСТОВЫХ ДАННЫХ

А.С. Суркова, С.С. Скорынин

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Аннотация: в работе рассмотрена объединенная модель текстовых данных. Даны основные характеристики рассматриваемых моделей, позволяющих использовать параллельные вычисления. Предложены возможные варианты повышения быстродействия объединенной системы в целом и каждой модели в частности. Приведены результаты вычислительных экспериментов по повышению быстродействия статистических и лингвистической моделей.

Ключевые слова: моделирование текстов, классификация, когнитивная лингвистика, параллельные вычисления, стэкинг

1. Введение

Задачи управления документами на основании их содержимого приобрели особенно важное значение в области информационных систем ввиду постоянно повышающейся доступности документов в цифровой форме. Одной из таких задач является классификация - задача распределения текстов на естественном языке по тематическим категориям из заранее определенного набора. Одним из важных этапов классификации является моделирование текстовых данных. Традиционные статистические и лингвистические модели текстов предназначены для определенных жанров текстовых данных и не всегда дают эффективные результаты при решении аналогичных задач для других типов текстов. Значимость сочетания моделей заключается в том, что при правильном их комбинировании и использовании ансамблевых методов: бэггинга, бустинга и стекинга можно охватить различные характеристики текста, тем самым повысить итоговое качество категоризации и классифицировать тексты различных типов. Настраиваемая модель позволяет не только наилучшим образом отразить исследуемые тексты, но и учесть многие дополнительные условия самой задачи. К таким условиям могут относиться: особенности рассматриваемых текстов, требования к быстродействию или точности результата и т.п.

Необходимо отметить, что большинство из решаемых практических задач машинного обучения требует обработки значительного объема входных данных. Наглядным примером такой задачи может служить распознавание пешеходов, где необходимо классифицировать от 10000 до 200000 объектов на одно изображение [1]. Аналогичная ситуация и с текстовыми данными, где необходимо обработать сотни, тысячи признаков. Быстродействие при построении таких систем является одним из ключевых параметров, так как система состоит из ресурсозатратных модулей и обучение системы может занимать несколько дней и даже недель. В настоящее время широкое распространение получили многоядерные процессоры и распределенные системы, но такие ресурсы не используются в полной мере, так как большинство программ и систем выполняется синхронно. Поэтому поиск способов увеличения быстродействия объединённой системы и минимизация времени простоя вычислительных ресурсов при обработке текстов является актуальной задачей [2,3].

2. Построение объединенной модели для классификации текстов

К настоящему времени разработано множество различных методов и алгоритмов формирования ансамблей моделей. Среди них наибольшее распространение получили такие методы, как бэггинг (bagging), бустинг (boosting) и стэкинг (stacking) [4].

1) Основная идея бэггинга - реализовать параллельное обучение на нескольких различных выборках одинакового размера, полученных путем случайного отбора примеров из исходного набора данных. 2) Идея бустинга заключается в создании цепочки моделей, при этом каждая

модель обучается на данных, в которых предыдущая допустила ошибку. 3) Стэкинг - один из способов создания составных моделей. В стэкинге вводится концепция метаобучения, т. е. пытаются обучить каждый классификатор, используя алгоритм метаобучения, который позволяет обнаружить наилучшую комбинацию результатов базовых моделей [4].

В настоящей работе был использован подход стэкинга для обучения текстовых данных, поскольку он позволяет осуществлять параллельное обучение моделей на одних и тех же данных, а блок принятия решения позволяет применить весовые коэффициенты с целью повышения итогового качества классификации. Объединенная модель текстовых данных представлена на рисунке 1. Исходные данные подаются на вход модуля предварительной обработки текста. На данном этапе удаляются стоп-слова и происходит приведение каждого слова к основе, одинаковой для всех его грамматических форм. Обработанный текст подается на вход лингвистической модели. Полученные текстовые данные отправляются на вход статистических моделей, где происходит параллельное обучение и итоговый результат обрабатывается блоком "принятие решений". Блок "принятие решений" выдает классификационное решение с учетом весовых коэффициентов, присвоенных каждой из моделей. После обучения система способна осуществлять классификацию текстовых данных по категориям.

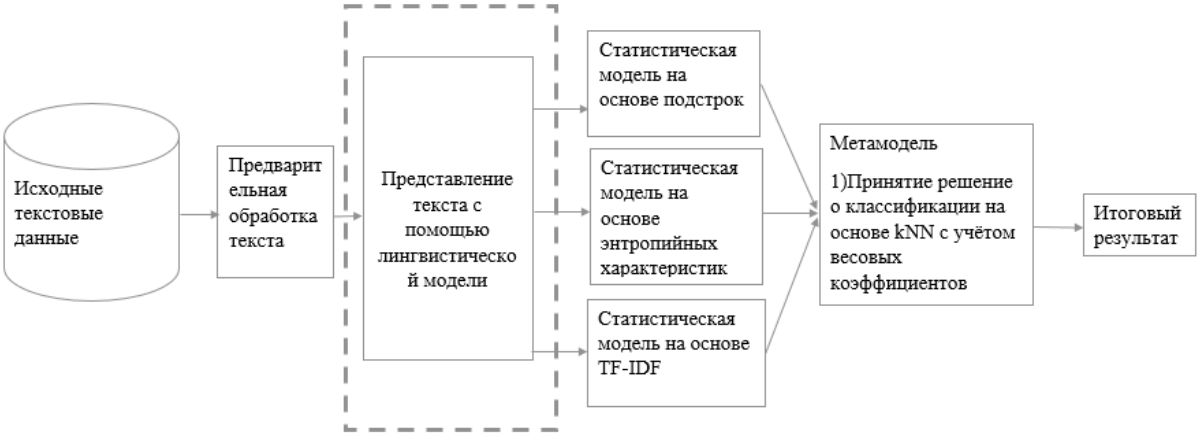


Рис. 1. Объединенная модель текстовых данных

В предложенном объединенном представлении текстов использованы следующие модели:

1) Лингвистическая модель на основе иерархического представления онтологий и когнитивного подхода, получившего название «Теория прототипов». Она основывается на идее, что свойственная человеку процедура классификации опирается на языковой, когнитивный и другой опыт человека. На основе «Теории прототипов» предложено определять базовой уровень классификации (основа взаимодействия человека с внешним миром) в середине иерархии «общего-конкретного» [5]. Для поиска базового уровня англоязычных текстов предлагается использовать тезаурус WordNet. Для русского языка можно использовать тезаурус РуТез[6].

Алгоритм поиска базового уровня заключается в преобразования текста к определенному уровню, для этого проводится анализ слов и строится иерархия гиперонимов до корневого узла. На основе выбранного уровня выбирают соответствующий синсет. Таким образом, исходный текст приводится к выбранному уровню в иерархии WordNet [7].

2) Статистическая модель, основанная на энтропийных характеристик символьного разнообразия. Вводится функция энтропии сдвигов как функция длины скользящего окна. Эта функция является базой для построения обобщенных характеристик символьного разнообразия пиковой и кумулятивной. Содержательно первая предлагаемая обобщенная характеристика отражает границу разнообразия структурных элементов над фиксированным алфавитом в слове, представляющим собой символьный код рассматриваемого ряда вычисляется по формуле, а вторая – среднее значение функции энтропии сдвигов до достижения определенного минимального порога [8].

3) Статистическая модель, основанная на анализе подстрок и TF-IDF. Подстроки как элементы модели (N-граммы) уже применялись как в теоретических лингвистических исследованиях, так и в практических задачах, связанных с распознаванием речи, машинным обучением,

алгоритмами сжатия данных, определением языка документа [9]. Однако исследователи в области классификации тестов обычно ограничивались фиксированной величиной N. Было предложено осуществлять классификацию тестов на основе подхода, где значение N не фиксировано. В таком случае N-граммы для моделирования текстов выбираются произвольной длины, а их значимость определяется для каждого конкретного текста из заданной категории, при этом данные структурные элементы текста правильнее называть подстроками. В качестве еще одной статистической модели была выбрана модель TF-IDF [10].

Исследования показали, что эффективность предложенной объединенной модели в задачах классификации по F-мере равна 79% для текстов патентов и 74% для художественных произведений [4]. Таким образом итоговое качество классификации увеличивается, однако моделирование литературных текстов на основе энтропийных характеристик занимает около четырех часов, а лингвистическая обработка для текстов патентов около двух часов, что является достаточно большим значением. Поэтому следующей задачей для системы моделирования текстов является повышение быстродействия алгоритмов и эффективное использование вычислительных ресурсов.

3. Повышения быстродействия объединенной модели

Были рассмотрены способы повышения быстродействия системы за счет распараллеливания предложенных моделей и алгоритмов. Эксперименты проводились на коллекции художественных текстов (6 категорий различных авторов) и текстов патентов (6 категорий). Рассматривались обучающие наборы по 100 (тексты патентов) и 25 (художественные тексты) текстов для каждого класса.

1) Так как за основу ансамбля был взят стэкинг, следовательно, каждая статистическая модель обрабатывается параллельно. Следует отметить, что модуль с лингвистической обработкой является блокирующим для статистических моделей. То есть текст сначала должен быть обработан лингвистической моделью, а только потом статистической и их нельзя распараллелить. Так же для разных типов текстов применяются модели, которые наилучшим образом отражают их характеристики. Следовательно, другие представления, не способные эффективно моделировать текст, необходимо изначально исключить из этапа моделирования, чтобы использовать вычислительные ресурсы эффективно. Например, для текстов патентов используются следующие модели: подстроки, TF-IDF, лингвистическая модель. Для литературных произведений: подстроки, TF-IDF, модель на основе энтропийных характеристики символьного разнообразия.

2) Модель на основе этропийных характеристик. Так как исходный текст обрабатывается m раз, где m – это длина анализируемого окна, то можно осуществить подсчёт характеристик текста для различных m в отдельном потоке. При этом общее время обработки будет равна одному проходу по тексту с m = 1. Также весь текст можно разделить на блоки и каждый блок обрабатывать параллельно. Длины каждого блока зависти от вычислительных ресурсов. Параллельное вычисление каждого блока также способствует повышению быстродействия системы.

Эксперименты показали, что последовательная работа алгоритма (для литературных произведений) в среднем занимала ~ 4 часа. При параллельной обработке на четырех потоках система справилась за ~ 2 часа. А если разделить символьную последовательность на N блоков, то теоретически скорость обработки увеличится в N раз. На системе с четырьмя потоками скорость обработки увеличилась и равна ~ 35 мин.

3) Лингвистическая модель на основе когнитивной лингвистики. В отличие от модели на основе этропийных характеристик символьного разнообразия проход по всему тексу осуществляется всего один раз. Поэтому для параллельной обработки текста необходимо разделить исходный текст на блоки. С точки зрения лингвистической модели это возможно, так как она не анализирует весь текст целиком, а только небольшой контекст вокруг слова. Это разбиение имеет смысл сделать, так как процедура определения частей речи, разрешение лингвистической многозначности является ресурсоемкой процедурой.

Эксперименты показали, что последовательная работа алгоритма (для текстов патентов) в среднем занимала ~ 2 часа. При параллельной обработке на четырех потоках система справи-

лась за ~ 40 минут. Если разделить символьную последовательность на N блоков, то теоретически скорость обработки увеличится в N раз.

4) Модель подстрок и TF-IDF. Как и в лингвистической модели, проход по всему тексу осуществляется всего один раз. Так как модель статистическая, то разбиение текста на блоки можно осуществлять произвольным образом, так как необходим только подсчет статистики, а семантика текста в данном случае не учитывается.

Эксперименты показали аналогичное улучшение производительность в 3-4 раза на системе с четырьмя потоками, как и в случае с лингвистической моделью.

5) Следующей возможностью повышения быстродействия является параллельное моделирование каждого текста из выборки. Таким образом скорость обучения всей обучающей выборки вырастет и будет равна времени моделирования одного текста. При этом количество потоков будет зависеть от исходного набора обучающей выборки.

4. Заключение

Таким образом алгоритмы объединенной модели можно распараллелить, тем самым повысить быстродействие системы. Конкретное вычислительное время обучения и классификации зависит от многих параметров таких: возможности и наличие вычислительных мощностей, размера обучающей выборки, необходимости применения той или иной модели. При этом система способна адаптироваться к текущем вычислительным мощностям за счет гибкого разбиения текста на независимые блоки, а также возможности обработки каждого текста из обучающего набора по отдельности. То есть в зависимости от количества потоков можно разбить текста на такое же количество блоков и обрабатывать их параллельно.

Литература

1. Enzweiler M., Gavrila D. M . Monocular Pedestrian Detection: Survey and Experiments //IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2009. V.31, No 12. P. 2179–2195.
2. Гергель В.П., Стронгин Р.Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. - Н.Новгород, ННГУ, 2001.
3. Немнюгин С., Стесик О. Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем - СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
4. Кашницкий Ю.С., Игнатов Д.И. Ансамблевый метод машинного обучения, основанный на рекомендации классификаторов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2015. Т. 19. № 4. С. 37–55.
5. Lakoff, George. Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal about the Mind. Chicago: University of Chicago Press. 1990. – 614 с.
6. Лукашевич Н.В. Тезаурусы в задачах информационного поиска. М.: Изд-во Московского университета, 2011. – 512 с.
7. Surkova, A., Skorynin, S., Chernobaev, I. Word embedding and cognitive linguistic models in text classification tasks // ACM International Conference Proceeding Series. 2019.
8. Суркова А.С., Скорынин С.С. Моделирование текстов на основе энтропийных характеристик в задачах классификации // Научный журнал "Вестник Волжской государственной академии водного транспорта" (Вестник ВГАВТ), 2016, №4 (49), с. 54-61.
9. Ломакина Л.С., Мордвинов А.В., Суркова А.С. Построение и исследование модели текста для его классификации по предметным категориям // Системы управления и информационные технологии. - Воронеж. - 2011. - №1(43). - с. 16-20.
10. Jones K. S. A statistical interpretation of term specificity and its application in retrieval (англ.) // Journal of Documentation – MCB University: MCB University Press, 2004. – Vol. 60, no. 5. – P. 493-502.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ КОНФЛИКТНЫМИ ПОТОКАМИ

А.М. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается неклассическая система массового обслуживания с ожиданием, в которой осуществляется управление m конфликтными потоками в классе циклических алгоритмов. Конфликтность потоков означает, что их нельзя суммировать и это не позволяет свести задачу к более простому случаю с одним потоком. Обслуживание требований из различных конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени. Кроме того, есть еще дополнительные промежутки времени – переналадки, за счет которых разрешается проблема конфликтности потоков. Такого рода системы являются адекватными моделями реально действующих систем по переработке и передаче информации, технологических систем, транспортных систем и т. д.

Ключевые слова: конфликтный поток, однородная марковская последовательность, условное распределение, марковский процесс.

1. Введение

В отличие от большинства известных трудов, для построения математической модели выходных потоков в работе используется так называемое нелокальное описание потока требований, предложенное в [1–4]. В описание выходных потоков включены состояние обслуживающего устройства и величины очередей по конфликтным потокам. Заметим, что функционирование рассматриваемой системы обслуживания неоднородных требований и управления конфликтными потоками в непрерывном времени является сложным немарковским процессом. Поэтому изучение характеристик системы и свойств выходных потоков в непрерывном времени является трудноразрешимой задачей. Используя теоретические результаты работ [1–4] в этой статье обосновывается методика численного исследования системы методами имитационного моделирования с использованием компьютерных и информационных технологий. Результаты исследований динамики выходных процессов обслуживания требований на имитационной модели проинтерпретированы на задаче управления конфликтными неоднородными транспортными потоками на изолированных перекрестках.

2. Постановка задачи на содержательном уровне

Рассматривается задача циклического управления m конфликтными потоками $\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$, …, $\overline{\Pi}_m$ неоднородных требований при их обслуживании системой. Входные потоки $\overline{\Pi}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ считаются конфликтными и независимыми. Конфликтность входных потоков означает, что обслуживание потоков должно происходить в непересекающиеся промежутки времени. Более того, указанные промежутки должны быть разделены промежутками времени, в которые запрещается обслуживание каких-либо требований. Требования потока $\overline{\Pi}_j$ поступают только в накопитель O_j с неограниченным числом мест для ожидания. В системе без потерь заявок имеется возможность фиксировать выходящий поток Π_j при неограниченном запасе ожидающих требований в накопителе O_j и при максимальном использовании ресурсов обслуживающего устройства при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Потоки Π_1, Π_2, …, Π_m называются потоками насыщения. Необходимость введения потоков насыщения возникает в первую очередь в тех реальных системах массового обслуживания, в которых заранее понятно, что длительности обслуживаний различных требований могут определяться состоянием системы обслуживания и, как следствие, быть зависимыми и иметь разные отличающиеся законы распределения. В качестве при-

мера можно привести процесс пересечения транспортными средствами стоп линии при разрешающем зеленом сигнале светофора. При наличии очереди, первые машины только трогаются с места и совершают переезд медленнее, чем те, кто приезжает к перекрестку на промежутке зеленого света и продолжает движение на максимальной скорости. Обслуживающее устройство имеет $2m$ состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(2m)}$. При фиксированном $n \in \{1, 2, \ldots, 2m\}$ длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(n)}$ равна T_n. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживаются только требования потока $\overline{\Pi}_j$. Максимально возможное число обслуженных требований потока $\overline{\Pi}_j$ в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ определяется потоком насыщения Π_j и равно l_j. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в состоянии $\Gamma^{(2j)}$ требования каждого из потоков не обслуживаются. Обслуживающее устройство изменяет состояния циклически в следующей последовательности: $\Gamma^{(1)} \to \Gamma^{(2)} \to \ldots \to \Gamma^{(2m)} \to \Gamma^{(1)}, \ldots$ Итак, обслуживание конфликтных потоков происходит в непересекающиеся промежутки времени, которые разделены интервалами переналадок. Адекватной математической моделью такого рода реальных задач являются управляющие системы обслуживания с переменной структурой [1].

3. Численное исследование выходных процессов

Входные потоки $\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2, \ldots, \overline{\Pi}_m$ считаем неординарными пуассоновскими случайными процессами Гнеденко–Коваленко [1]. Тогда последовательность вызывающих моментов, в которые требования поступают в систему по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$, представляет собой пуассоновский процесс с параметром λ_j. Более того, допустим, что в каждый из этих моментов появляются одна или две заявки соответственно с вероятностями p_j или $q_j = 1 - p_j$. Пусть случайная величина $\eta_j(t)$ при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ определяет число поступивших требований в накопитель O_j по потоку $\overline{\Pi}_j$ за промежуток времени $[0, t)$. Важной характеристикой процесса циклического управления конфликтными потоками требований является загрузка системы обслуживания по каждому потоку и ее общая загрузка по всем или только по некоторым заранее фиксированным потокам. К сожалению, определение загрузки управляемых нетрадиционных систем массового обслуживания всегда представляет собой трудную задачу. В классических одноканальных системах с неограниченной очередью, пуассоновским входным потоком и обслуживанием требований по показательному закону вероятность того, что в стационарном режиме в системе будет не менее одного требования, равна $\lambda\mu^{-1} < 1$. Здесь параметры λ и μ являются интенсивностями поступления и соответственно обслуживания требований. Путь $\theta(t)$ есть суммарная длина тех промежутков времени между нулем и моментом t, в течение которых в системе будет не менее одного требования. Хорошо известно, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место предельное равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}(|\, t^{-1}\theta(t) - \lambda\mu^{-1} \,| < \varepsilon) = 1$. Случайная величина вида $t^{-1}\theta(t)$ определяет среднее относительное время занятости системы на промежутке $[0, t)$ и приближенно при достаточно больших значениях t совпадает с величиной $\lambda\mu^{-1}$ в смысле сходимости по вероятности. Поэтому постоянную $\lambda\mu^{-1}$ естественно называют загрузкой или мерой занятости системы.

Будем теперь для задачи об управлении конфликтными потоками требований в классе циклических алгоритмов рассуждать аналогичным способом. Тогда вероятность ρ_j того, что в стационарном режиме в системе обслуживания по потоку $\overline{\Pi}_j$ будет не менее одной заявки, можно назвать загрузкой системы по этому потоку. Пусть мы хотим определить общую загрузку $\rho_{1,2}$ системы, например, по двум потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$. Тогда, в силу независимости входных потоков, потоков насыщения и циклического переключения состояний обслуживающего устройства, удаётся получить [3], что вероятность наличия не менее одной машины хотя бы в одном из потоков $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ равна $\rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$. Поэтому можно считать, что по потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ общая загрузка $\rho_{1,2} = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$. К сожалению, для процесса управления конфликтными транспортными потоками при $l_j \neq 1$ не удается определить простую формулу для вероятности ρ_j. Только при $l_j = 1$ в работе [3] было получено, что для стационарного режима вероятность нали-

чия на перекрестке по потоку $\overline{\Pi}_j$ не менее одного требования равна $\rho_j = 1 - (2m)^{-1}e^{\lambda jT}(1 + e^{-\lambda jT2j} + e^{-\lambda j(T2j + T2j + 1)} + \ldots + e^{-\lambda j(T - T2j - 1)})(1 - \lambda_j(1+ q_j))$. Даже эта формула является сложной для вычислений без компьютера. Поэтому возникает непростая задача определения оценки $\widetilde{\rho}_j$ для загрузки ρ_j по потоку $\overline{\Pi}_j$ при $l_j \neq 1$.

Если необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в управляемой системе массового обслуживания совпадают и простым образом зависят от интенсивностей поступления и обслуживания требований, то эти условия, как правило, являются основой определения загрузки или, в крайнем случае, оценки для загрузки. Так необходимые и достаточные условия существования стационарного режима в системе по потоку $\overline{\Pi}_j$ согласно результатам работы [3] можно записать в виде $\lambda_j T(1 + q_j)/l_j < 1$ или в эквивалентном форме $\lambda_j T(1 + q_j)/[\mu_j T_{2j-1}] < 1$. Здесь параметр μ_j^{-1} определяет среднее время обслуживания требования потока $\overline{\Pi}_j$ и $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$. Отсюда следует, что в качестве оценки $\widetilde{\rho}_j$ можно предложить формулу вида: $\widetilde{\rho}_j = \widetilde{\rho}_j(\lambda_j, q_j, \mu_j, T, T_{2j-1}) = \lambda_j T(1 + q_j)/[\mu_j T_{2j-1}]$. Будем считать выбранную оценку $\widetilde{\rho}_j$ приемлемой, или подходящей, если она удовлетворяет следующим естественным требованиям: 1) для оценки $\widetilde{\rho}_j$ выполняется неравенство $0 < \widetilde{\rho}_j < 1$; 2) при $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_m$ значение оценки $\widetilde{\rho}_j(\lambda_j, q_j, \mu_j, T, T_{2j-1})$ не убывает с ростом каждого из параметров λ_j, q_j и не возрастает с ростом каждого из параметров μ_j, T_{2j-1}; 3) если при некоторых изменениях набора параметров λ_j, q_j, μ_j, T и T_{2j-1} значение $\lambda_j T(1 + q_j) - [\mu_j T_{2j-1}]$ приближается к нулю, то значение оценки $\widetilde{\rho}_j$ должно стремиться к единице. Легко проверить, что предлагаемая оценка $\widetilde{\rho}_j$ при $\lambda_j T(1 + q_j) < [\mu_j T_{2j-1}]$ является подходящей. В дальнейшем, ради простоты, оценку $\widetilde{\rho}_j$ будем называть квазизагрузкой по потоку $\overline{\Pi}_j$. Теперь можно привести следующую подходящую оценку $\widetilde{\rho}_{1,2}(\lambda_1, q_1, \mu_1, \lambda_2, q_2, \mu_2, T, T_1, T_3) = \widetilde{\rho}_1 + \widetilde{\rho}_2 - \widetilde{\rho}_1\widetilde{\rho}_2$ для загрузки $\rho_{1,2} = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1\rho_2$ системы по двум потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$.

Наблюдения за различными реальными экспериментами показывают, что с увеличением загрузки системы, как правило, увеличивается время $T_{\text{пер}}$ переходного процесса системы для ее вхождения в квазистационарный режим и время компьютерного моделирования для вычисления ее вероятностных и числовых характеристик с заданной степенью точности и надежности. В силу этого при выборе как параметров алгоритма определения момента $T_{\text{пер}}$ окончания переходного процесса системы, так и при задании точности и надежности для вычислений ее вероятностных и числовых характеристик существенно учитывается значение оценки загрузки системы. Для стационарного режима системы при $l_j \neq 1$ аналитически не удаётся получить обозримые формулы для законов распределения длин очередей, времени ожидания обслуживания и, наконец, для законов распределения выходных потоков. Для получения оценок указанных законов распределения, некоторых их числовых характеристик и для решения задачи оптимизации по условию минимума среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания требования в системе произвольного потока была разработана компьютерная имитационная видиомодель процесса циклического управления m потоками.

Пусть символ $v = 1, 2, \ldots$ задает порядковый номер требования при его поступлении в накопитель O_j системы обслуживания. Обозначим через $\gamma_{j,v}^0$ время (в секундах) ожидания начала обслуживания v-ой заявки потока $\overline{\Pi}_j$ в системе с нулевыми начальными очередями и через $\gamma_{j,v}^+$ время (в секундах) ожидания начала обслуживания v-ой заявки потока $\overline{\Pi}_j$ в системе с заданными ненулевыми начальными очередями. На первом этапе имитационного моделирования происходит вычисление времени $T_{\text{пер}}$ (в секундах) переходного процесса или момента достижения системой квазистационарного режима. Для этого по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$ последовательно по $v = 1, 2, \ldots$ происходило вычисление средних арифметических

$$\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^0) = v^{-1}(\gamma_{j,1}^0 + \gamma_{j,2}^0 + \cdots + \gamma_{j,v}^0), v = 1,2, \ldots,$$

наблюдаемых времён ожидания в системе с нулевыми начальными очередями и вычисление средних арифметических $\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^+) = v^{-1}(\gamma_{j,1}^+ + \gamma_{j,2}^+ + \cdots + \gamma_{j,v}^+), v = 1,2, \ldots$, наблюдаемых времён ожидания в системе с заданной величиной $x_{j,0} > 0$ начальной очереди. Наступление момента $\widetilde{T}_{\text{пер}}$ квазистационарного режима или окончания времени квазипереходного процесса в системе

считалось тогда, когда первый раз происходило k кратное по v выполнение условия вида $\left|\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{0})\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{0}) - \widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{+})\right| < \delta\widetilde{M}(\gamma_{j,v}^{0})$ сразу для всех $j = 1, 2, \ldots, m$. Здесь натуральное число k и $0 < \delta < 1$ являются заданными параметрами алгоритма определения оценки $\breve{T}_{\text{пер}}$ времени $T_{\text{пер}}$ переходного процесса. На втором этапе продолжалось имитационное моделирование только системы с нулевыми начальными очередями с целью вычисления по каждому из m потоков оценок с заданной точностью ε для основных характеристик системы в квазистационарном режиме. При этом значение точности ε конкретной оценки было равно произведению некоторой константы Δ на значение этой оценки. На имитационной модели для потока $\overline{\Pi}_j$ в квазистационарном режиме с заданной надежностью β и заданной точностью ε вычислялись следующие оценки: 1) оценки $\widetilde{M}(\gamma_j)$ и $\widetilde{D}(\gamma_j)$ для математического ожидания и соответственно для дисперсии времени γ_j ожидания начала обслуживания произвольной заявки $\overline{\Pi}_j$; 2) оценка вида $\widetilde{M}(\gamma) = \left(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(1+q_j)\right)^{-1}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(1+q_j)\widetilde{M}(\gamma_j)$ для математического ожидания среднего взвешенного времени γ ожидания начала обслуживания заявки произвольного потока; 3) оценки $\widetilde{M}(\omega_j)$ и $\widetilde{D}(\omega_j)$ для математического ожидания и соответственно дисперсии случайной длины $æ_j$ очереди машин потока $\overline{\Pi}_j$ в произвольный момент включения обслуживающим устройством состояния $\Gamma^{(2j-1)}$; 4) оценки $\widetilde{M}(\xi'_j)$ и $\widetilde{D}(\xi'_j)$ для математического ожидания и соответственно дисперсии случайного числа ξ'_j требований потока $\overline{\Pi}_j$, покидающих накопитель O_j за промежуток T_{2j-1}; 5) значение $\widetilde{\rho}_j$ оценки квазизагрузки системы по каждому потоку $\overline{\Pi}_j$ и значение $\widetilde{\rho}_{1,2}$ оценки для общей загрузки системы, например, по потокам $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$; 6) оценка закона распределения и вид гистограммы относительных частот для величины ξ'_j.

В качестве иллюстрации эффективности совместного применения аналитических методов и метода имитационного моделирования приведем решение следующих конкретных задач. Первая задача заключается в качественно-численном исследовании процесса циклического управления только двумя наиболее интенсивными транспортными потоками $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ на перекрёстке. Поэтому светофор (обслуживающее устройство) имеет четыре фазы или состояния $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(3)}$ и $\Gamma^{(4)}$. Вторая задача — это определение квазиоптимальной длительности T_1^* зелёной фазы (состояния) $\Gamma^{(1)}$ для потока $\overline{\Pi}_1$ и квазиоптимальной длительности T_3^* зелёной фазы (состояния) $\Gamma^{(3)}$ для потока $\overline{\Pi}_2$ по условию минимума для оценки $\widetilde{M}(\gamma)$ математического ожидания среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания машины произвольного транспортного потока.

Программная реализация имитационной модели на компьютере выполнена средствами разработок Code Gear RAD Studio 2009 на языке Object Pascal. Имитационная модель может работать как в режиме, когда требования покидают систему группами, так и в режиме, когда заявки обслуживаются последовательно по одной по мере их поступления. Компьютерная имитационная модель позволяет не только в режиме счёта вычислить основные характеристики работы перекрёстка с заданной степенью точности и надежности и на этой основе найти квазиоптимальное управление потоками, но также позволяет наблюдать в видеорежиме весь процесс обслуживания требований и управление конфликтными потоками на примере движения автомобилей на перекрёстке.

Рассмотрим пример реального перекрёстка, для которого $\lambda_1 = 0.16$ машин/сек, $q_1 = 0.3$, $\mu_1 = 1$ машин/сек, $\lambda_2 = 0.22$ машин/сек, $q_2 = 0.4$, $\mu_2 = 1$ машин/сек, $T_2 = T_4 = 4$ сек. Используя имитационную модель при $k = 2$, $\delta = 0.1$, $\beta = 0.9$, $\Delta = 0.02$ и метод покоординатного спуска были определены квазиоптимальные значения $T_1^* = 10$ сек и $T_3^* = 15$ сек длительностей зеленых фаз светофора для потока $\overline{\Pi}_1$ и соответственно для потока $\overline{\Pi}_2$. Значения T_1^* и T_3^* обеспечивают квазизагрузку $\tilde{\rho}_{1,2} = 0.8989$ и значение величины $\widetilde{M}(\gamma)$, равное 10.93 сек. Для сравнения укажем, что используемые на практике длительности $T_1 = 41$ сек и $T_3 = 51$ сек дают значение $\widetilde{M}(\gamma) = 20.265$ сек и значение $\tilde{\rho}_{1,2} = 0.8049$.

Литература

1. Федоткин А.М., Федоткин М.А. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко-Коваленко // Автоматика и телемеханика. РАН. 2009. № 12. С. 92–108.
2. Fedotkin A.M., Fedotkin M. A. Construction and Analysis of a Mathematical Model of Spatial and Temporal Characteristics of Traffic Flows // Automatic Control and Computer Sciences. Allerton Press, Inc. 2014. Vol. 48. No 6. Pp. 358□367.
3. Федоткин А.М. Определение стационарного режима рекуррентных марковских цепей итеративно-мажорантным методом // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 4. С. 130–140.
4. Федоткин М.А., Федоткин А.М., Кудрявцев Е.В. Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях // Автоматика и телемеханика. РАН. 2020. № 8. С. 149–164.

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТИ БОЛЬНИЦ С УЧЁТОМ ОШИБОК РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ[1*]

М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В данной статье используется представление процесса функционирования сети медицинских учреждения в виде управляющей кибернетической системы. В предыдущих работах на основании результатов фактического функционирования за период с 2007 по 2015 год сети из пяти многопрофильных медицинских учреждений Нижнего Новгорода была изучена структура и динамика основных показателей её работы с учётом ошибок результатов наблюдений. Полученные результаты позволяют решить задачу определения механизма оптимального распределения материальных и финансовых средств между отделениями сестринского ухода данной сети медицинских учреждений.

Ключевые слова: управляющая кибернетическая система, математическая модель, динамика функционирования медицинского учреждения, основные показатели, точность измерений, реализацией случайной величины, выборочные значения, оптимизация.

1. Введение

В работах [1–4] предлагается метод построения и изучения математических моделей динамики разного рода систем и процессов управления на основе кибернетического подхода Ляпунова–Яблонского. В данной статье, которая является непосредственным продолжением этих работ, осуществляется синтез математической модели функционирования медицинского учреждения в виде управляющей кибернетической системы, а также аналитический и численный анализ его деятельности с учётом ошибок результатов наблюдений. Кибернетический подход позволяет по единственному измерению основных показателей результатов работы конкретного медицинского учреждения в течении каждого отчетного года получить дополнительную статистику по основным показателям любого конечного объема. С использованием дополнительной статистики подробно изучены качество и динамика функционирования медицинского учреждения. В настоящей работе также предложено обоснование выбора критериев эффективности деятельности сети из упомянутых медицинских учреждений. Что в свою очередь позволяет решить задачу оптимизации распределения материальных и финансовых средств внутри данной сети медицинских учреждений.

2. Построение математической модели

Обозначим через символ t номер отчётного года из множества $T = \{1, 2, \ldots, k\}$ дискретного функционирования типовой больницы M_j с номером j из множества $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. В этих обозначениях длительность всего периода наблюдений за работой сети из n больниц равна k. Администрация медицинского регионального подразделения и администрация каждого медицинского учреждения M_j в течение каждого отчётного года t выбирает так называемое нормативное управление $u(t)$ из некоторого множества R. Нормативное управление $u = u(t)$ однозначно определяет для типового медицинского учреждения M_j в течение отчётного года t количество $x_j^{(u)}(t)$ используемых коек и точность $\varepsilon = \varepsilon(t)$ измерений всех параметров и результатов работы сети. Для точности $\varepsilon = \varepsilon(t)$ измерений справедливо естественное ограничение $0 < \varepsilon(t) < 1$. По итогам работы больницы M_j в отчётном году t и при использовании $x_j^{(u)}(t)$ коек фиксируется лишь

[1*] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-413-520005).

единственное наблюдение как фактических значений различных m статей финансовых затрат $A_{1,j}^{(u)}(t)$, $A_{2,j}^{(u)}(t)$, …, $A_{m,j}^{(u)}(t)$, так и фактических значений количества $Q_j^{(u)}(t)$ пролеченных больных, количества $G_j^{(u)}(t)$ умерших, число $L_j^{(u)}(t)$ койко-дней. Наименование всех статей затрат приведено в работе [2]. В частности, статья $A_{m,j}^{(u)}(t)$ играет важную роль, так как определяет суммарный объём финансирования расходов по всем статьям затрат больницы с номером j в отчетном году t. На основе только одного измерения указанных показателей трудно оценить работу сети из n отделений её сестринского ухода и тем самым решить задачу оптимизации процесса медицинского обслуживания. Поэтому необходимо разработать методику получения выборочной статистики заданного объёма для величины стоимости статей затрат, для числа пролеченных больных, для числа умерших больных и для количества койко-дней.

Для решения этой проблемы в [2, 3] при нормативном управлении $u = u(t) \in R$, при заданной точности $\varepsilon = \varepsilon(t)$ для медицинского учреждения M_j за каждый отчетный год t предложен алгоритм построения и метод изучения следующих нормально распределённых случайных величин: *a*) стоимости $A_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ затрат статьи с номером $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$; *b*) количества $Q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ пролеченных больных; *c*) количества $G_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ умерших больных; *d*) числа $L_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ койко-дней. Здесь действительное число ω является значением или реализацией случайной величины ξ с равномерным законом распределения на отрезке [0, 1]. Генерируя множество значений случайной величины ξ можно получить выборку заданного объёма для стоимости статей затрат, для числа пролеченных больных, для числа умерших больных и для количества койко-дней.

Для целесообразного распределения материальных и финансовых средств между медицинскими учреждениями сети в течение каждого отчётного года $t \in T = \{1, 2, \ldots, k\}$ необходимо выбирать управление $r(t) \in R$. Управление $r(t)$ существенно влияет на основные параметры и показатели функционирования сети медицинского обслуживания, например, оно однозначно определяет количество $x_j^{(r)}(t)$ используемых коек медицинским учреждением M_j в отчетном году t. Если обозначить через символ $[x]$ ближайшее целое число к действительному числу x, то при управлении $r(t)$ и при заданном значении $\omega \in [0, 1]$ соотношение (1).

$$\begin{aligned} &A_{i,j}^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = A_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j^{(r)}(t) \,/\, x_j^{(u)}(t),\ \ Q_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = [Q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)],\\ &G_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = [G_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)],\ L_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = [L_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j^{(r)}(t)/x_j^{(u)}(t)]. \end{aligned} \tag{1}$$

позволяет вычислить с заданной точностью $\varepsilon = \varepsilon(t)$ значения $A_{i,j}^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ каждой статьи затрат, значения $Q_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ количества пролеченных больных, значения $G_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ количества умерших и значения $L_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ числа койко-дней для каждого медицинского учреждения M_j за каждый отчетный год t. В частности, в работах [2, 3] по формулам (1) при $r(t) = u(t)$ и при различных значениях параметров $\varepsilon = \varepsilon(t)$, ω выполнены вычисления характеристик $A_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $Q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $G_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $L_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ и изучены их свойства. Обозначим теперь при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и ω через символы $a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ постоянные величины, которые определяются из соотношения (2).

$$\begin{aligned} &a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = A_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) \,/\, x_j^{(u)}(t),\ q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = Q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) \,/\, x_j^{(u)}(t),\\ &g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = G_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)(t) \,/\, x_j^{(u)}(t),\ l_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) = L_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t) \,/\, x_j^{(u)}(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Для больницы M_j постоянные величины или нормативные коэффициенты вида $a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ и $l_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ являются в расчете на одну койку плотностью стоимости затрат статьи с номером i, плотностью числа пролеченных больных, плотностью количества умерших больных и соответственно плотностью величины койко-дней. Управление $r(t)$ однозначно определяет количество $x_j^{(r)}(t)$ используемых коек медицинским учреждением M_j в каждом отчетном году t. Поэтому в дальнейшем при постановке и решении проблемы оптимизации работы медицинской сети под математическим описанием управления $r(t)$ будем понимать целочисленный n - ый вектор $x^{(r)}(t) = (x_1^{(r)}(t), x_2^{(r)}(t), \ldots, x_n^{(r)}(t))$ из заданной n - ой области $X^{(n)}(t)$. Ради простоты записи, исключая случай $r(t) = u(t)$, будем опускать символ r для верхних индексов и писать управление $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ вместо управления $x^{(r)}(t) = (x_1^{(r)}(t), x_2^{(r)}(t), \ldots, x_n^{(r)}(t))$. В силу этого величины $A_{i,j}^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $Q_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $G_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ и $L_j^{(r;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)$ будем теперь обозначать через $A_{i,j}^{(\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $Q_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t)$, $G_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t)$ и $L_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t)$. Используя соотношения (1) и (2) указанные величины будем теперь вычислять с помощью более простого соотношения (3).

$$\begin{aligned} &A_{i,j}^{(\varepsilon)}(\omega;\, t) = a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j(t),\ Q_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t) = [q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j(t)],\\ &G_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t) = [g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j(t)],\ L_j^{(\varepsilon)}(\omega;\, t) = [l_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\, t)x_j(t)(t)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Перейдем непосредственно к определению области $X^{(n)}(t)$ или системы ограничений на управляющие переменные $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Эта система включает следующие типы ограничений.

1. Ограничения на количество $x_j(t)$ коек по медицинскому учреждению M_j вида (4).

$$x_{j,\min}(t) \le x_j(t) \le x_{j,\max}(t),\ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где величины $x_{j,\min}(t)$ и $x_{j,\max}(t)$ определяют минимально возможное число коек и максимально возможное число коек для медицинского учреждения M_j с номером j. Эти величины для отчетного года t задаются условиями функционирования сети из n медицинских учреждений. Если $x_{j,\mathrm{p}}(t)$ резерв (ресурс) коек медицинского учреждения с номером j, который является известной величиной в отчетном году t, то $x_{j,\max}(t) \le x_{j,\mathrm{p}}(t)$, $x_{j,\min}(t) \ge 0$.

2. Ограничение на общее количество коек по всем медицинским учреждениям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(t) \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\right)_{\max}, \tag{5}$$

где величина $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\right)_{\max}$ характеризует максимально возможное число коек сети медицинских учреждений и задается условиями функционирования всех медицинских учреждений в отчётном году t. Непосредственно из (4) вытекает, что $\sum_{j=1}^{n} x_j(t) \le \sum_{j=1}^{n} x_{j,\max}(t)$.

Если $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\right)_{\max} = \sum_{j=1}^{n} x_{j,\max}(t)$, то условие (5) непосредственно следует из (4) и его можно не требовать.

3. Ограничения на общее количество $Q^{(\varepsilon)}(\omega; t) = \sum_{j=1}^{n} [q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)]$ пролеченных больных по всем медицинским учреждениям вида (6).

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j^{(u,\varepsilon)}(\omega;t) \le \sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \le \left(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\right)_{\max}, \tag{6}$$

где величины $\sum_{j=1}^{n} Q_j^{(u,\varepsilon)}(\omega;t)$ и $\left(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\right)_{\max}$ определяют по всем медицинским учреждениям в отчетном году t фактическое число пролеченных больных и соответственно максимально возможное число пролеченных больных. При этом величина $\left(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\right)_{\max} \le \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\right)_{\max} \times 365$ определяется условиями функционирования всех медицинских учреждений в отчетном году t. Например, если выполняется равенство $\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(t)\right)_{\max} = 225$, то $\left(\sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\right)_{\max} \le 225 \times 365 = 82125$.

Величины $q_1^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$, $q_2^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$, …, $q_n^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$ являются исходной информацией или нормативными коэффициентами первого типа для статической оптимизационной модели. Величина $q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t по восстановлению здоровья больных.

4. Ограничение на общее количество $G^{(\varepsilon)}(\omega; t) = \sum_{j=1}^{n} [g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)]$ умерших больных по всем медицинским учреждениям вида (7).

$$\sum_{j=1}^{n} g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \le \sum_{j=1}^{n} G_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t). \tag{7}$$

При этом величины $g_1^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$, $g_2^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$, …, $g_n^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$ также являются исходной информацией или нормативными коэффициентами второго типа для статической оптимизационной

модели. Величина $g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t в критических случаях состояния больных.

5. Ограничение на общее количество $L^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) = \sum_{j=1}^{n}[l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)]$ койко-дней по всем медицинским учреждениям в отчетном году t вида (8).

$$\sum_{j=1}^{n} l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \le (\sum_{j=1}^{n} x_j(t))_{\max} \times 365. \qquad (8)$$

При этом величины $l_1^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $l_2^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$, …, $l_n^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ являются исходной информацией или нормативными коэффициентами третьего типа для статической оптимизационной модели. Величина $l_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ также характеризует профессиональные и организационные свойства загруженности медицинского учреждения с номером j в отчетном году t.

6. Если число m определяет общее количество статей затрат каждого медицинского учреждения, то ограничения по стоимости каждой статьи затрат с номером i в каждом отчетном году всеми медицинскими учреждениями можно записать в виде (9).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t) \le A_{i,\,\text{план}}(t)\,,\ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (9)$$

В соотношении (9) величина $A_{i,\,\text{план}}(t)$ определяет в отчетном году плановые затраты всех медицинских учреждений по статье с номером i. При фиксированных $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ величина $a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ является исходной информацией или нормативным коэффициентом четвертого типа для статической оптимизационной модели. Величина $a_{i,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ характеризует профессиональные и организационные особенности финансовых затрат по статье с номером i для больницы с номером j в отчетном году t. При этом суммарный объём $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)$ финансовых расходов по всем статьям затрат n сети медицинских учреждений в отчетном году t вычисляется с помощью формулы вида $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)$.

В приведённых ограничениях с использованием управляющих переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$ и нормативных коэффициентов $q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $g_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $l_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $a_{m,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega;\,t)$ приводятся формулы для вычисления основных показателей $Q^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $G^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)$), $L^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)$, $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)$ эффективности работы сети всех медицинских учреждений. Отсюда получаем, что эти показатели можно приближенно вычислять с помощью следующих линейных функций:

$$Q^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) \approx q^{(\varepsilon)}(\,\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} q_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\,,$$

$$G^{(\varepsilon)}(\omega;\,t)) \approx g^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} g_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\,, \quad (10)$$

$$L^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) \approx l^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} l_j^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\,, \qquad (10)$$

$$A_m^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) = a^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}^{(u;\varepsilon)}(\omega;t)x_j(t)\,.$$

Более того, показатель $A_m^{(\varepsilon)}(\omega;\,t) = a^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Поэтому можно считать, что для сети из n больниц линейные функции $q^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $g^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $l^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ и $a^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ отвечают за количество пролеченных больных, за количество умерших больных, за количество койко-дней и за суммарный объём финансовых затрат соответственно.

Для семейства линейных функций $q^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $g^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $l^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ и $a^{(\varepsilon)}(\omega;\,x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ можно ставить и решать различные оптимизационные многокритериальные задачи, которые зависят от физического смысла указанных целевых показателей. Например, будем определять такое распределение $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$

коек по каждому медицинскому учреждению, для которого выполняются хотя бы одно из следующих естественных соотношений или условий оптимальности:

$q^{(\varepsilon)}(\omega; x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)) = \max\{q^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)): (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\}$,

$g^{(\varepsilon)}(\omega; x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)) = \min\{g^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)): (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\}$.

В частном случае можно определять такое распределение $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ коек по каждому медицинскому учреждению, которое обеспечивает за отчетный год для всей сети отделений сестринского ухода максимальное число пролеченных больных.

Желательно найти такое распределение $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ коек по каждому медицинскому учреждению, которое обеспечивает за отчетный год для всей сети отделений сестринского ухода максимальное число пролеченных больных или минимальное количество умерших. Распределение $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ коек назовём оптимальным. Построенная статическая оптимизационная многокритериальная модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в каждом отчетном году t определяется соотношениями (4) – (10) и условиями оптимальности. Эти соотношения и условия содержат n управляющих переменных $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ и в общем случае не более $(2n + m + 5)$ линейных независимых ограничений.

3. Определение оптимального управления распределением коек

В настоящее время известно, что одним из наиболее важных критериев функционирования сети из медицинских учреждений является количество пролеченных больных. Оптимальное распределение коек по отделениям сестринского ухода обеспечивает максимальное количество пролеченных больных при выделенных объёмах финансовых ресурсов на каждый год $t = 1, 2, \ldots, k$ функционирования сети медицинских учреждений. Рассмотрим теперь однокритериальную оптимизационную модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в каждом отчетном году t с учётом ошибок измерений фактических показателей работы сети.

Для определения и анализа оптимальных значений $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ управляющих переменных в отчетном году только по условию максимума пролеченных больных необходимо при фиксированных значениях параметров $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и ω знать исходную информацию в виде значений величин $A_{1,j}^{(u)}(t), A_{2,j}^{(u)}(t), \ldots, A_{m,j}^{(u)}(t), Q_j^{(u)}(t), G_j^{(u)}(t), L_j^{(u)}(t), A_{1,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t), A_{2,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t), \ldots, A_{m,j}^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t), Q_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t), G_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t), L_j^{(u;\,\varepsilon)}(\omega; t)$. В этом случае статическая однокритериальная оптимизационная модель распределения числа коек по медицинским учреждениям в отчетном году t определяется соотношениями (4) – (9) и равенством

$q^{(\varepsilon)}(\omega; x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)) = = \max\{q^{(\varepsilon)}(\omega; x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)): (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in X^{(n)}(t)\}$.

Расчет оптимальных значений $x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_n^*(t)$ управляющих переменных проводился с использованием программы Microsoft Excel на основе экспериментальных данных [1] о функционировании за период с 2007 по 2015 годы ($t = 1, \ldots, 9$) сети из пяти медицинских учреждений ($j = 1, \ldots, 5$) Нижнего Новгорода. При этом число m всех статей расходов равно 25, число n всех медицинских учреждений сети равно 5, и число k всех периодов наблюдения равно 9. При расчетах фактическое распределение коек для больниц за каждый отчетный период t наблюдений определялось набором $x_1^{(u)}(t) = x_2^{(u)}(t) = x_3^{(u)}(t) = x_4^{(u)}(t) = 50$ и $x_5^{(u)}(t) = 25$.

Литература

1. Федоткин М.А. Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2018. 424 с.
2. Федоткин М.А., Пройдакова Е.В., Эделева А.Н. Математические и инструментальные методы построения модели экономики функционирования больницы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. 2019. № 4(56). С. 54–64.
3. Федоткин М.А., Пройдакова Е.В., Эделева А.Н. Математические и инструментальные методы построения модели экономики функционирования больницы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Социальные науки. 2020. № 2(58). С. 55–65.

4. Федоткин М.А., Федоткин А.М., Кудрявцев Е.В. Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях // Автоматика и телемеханика. РАН. 2020. № 8. С. 149–164.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ НАЧАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ ОШИБКИ В ИЗМЕРЯЕМОМ ВЫХОДЕ СИСТЕМЫ[1*]

А.А. Федюков

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача по оценке области допустимых начальных состояний системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Подход к решению основан на применении метода функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для нахождения границ этой области. В качестве примера рассмотрена задача стабилизации перевернутого маятника. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: стабилизация, линейные матричные неравенства, управление по состоянию

1. Введение

Существуют разные способы построения регуляторов [1-4], в том числе способ, основанный на применении аппарата линейных матричных неравенств [1]. В задаче стабилизации по состоянию предполагают, что состояние системы доступно измерению и управление строят в виде линейной обратной связи по состоянию. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов MATLAB [5]) можно получить параметры такого регулятора. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что синтез линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применен только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. Заметим, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничение на фазовые переменные объекта и управление. Проблема синтеза управления при заданных ограничениях является сложной и актуальной в настоящее время [2,3,6].

В работах [2,3] рассмотрена и решена задача синтеза управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию динамического объекта при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве получена область допустимых начальных состояний системы, при которых регулятор стабилизирует систему. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остается вопрос о возможности применения полученного в [2,3] регулятора в указанной ситуации.

В данной статье обсуждаются вопросы по оценке области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых регулятор, полученный в задаче синтеза управления по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии. Получены достаточные условия, позволяющие оценить множество допустимых начальных состояний динамической системы. Подход к решению основан на применении метода функций Ляпунова, аппарата линейных матричных неравенств и неущербности для квадратичных форм S-процедуры при двух ограничениях [7]. В качестве примера рассмотрена задача стабилизация перевернутого маятника. Численные эксперименты подтвердили теоретические результаты.

[1*] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90086.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu\ ,\ x(0) = x_0\ , \tag{1}$$

$$z_i = C_i x + D_i u\ ,\ i = 1,2,...,N\ , \tag{2}$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы; A, B, C_i и D_i – заданные матрицы соответствующих размеров.

Задача стабилизации объекта (1) с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx\ , \tag{3}$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1), (2), (3) и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i\ ,\ i = 1,2,...,N \tag{4}$$

обсуждалась в работах [2,3]. С помощью техники линейных матричных неравенств и неущербности S-процедуры для квадратичных неравенств [8] были сформулированы условия на множество начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1), замкнутой управлением (3), асимптотически приближались к нулевому состоянию и не выходили за границы множества, задаваемого ограничениями (4).

Предположим, что для объекта (1), (2) решена задача стабилизации с ограничениями на фазовые и управляющие переменные и найден закон управления по состоянию (3). В реальной ситуации состояние динамической системы измеряется с некоторой ошибкой. В связи с этим введем измеряемый выход системы

$$y = (I + \Delta(t))x\ , \tag{5}$$

где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных, и удовлетворяет условию $\Delta^T \Delta \le \delta^2 I$, $\delta > 0$ – заданный параметр. Рассмотрим задачу стабилизации системы (1), (2) регулятором

$$u = Ky\ . \tag{6}$$

при ограничениях на фазовые и управляющие переменные (4). Возникает вопрос о влиянии ошибок измерения фазовых переменных на выполнении ограничений (4). Другими словами вопрос о том, как изменится множество начальных состояний системы, для которых регулятор (6), обеспечивает стабилизацию при ограничениях (4) и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (5).

3. Оценка области допустимых начальных состояний

Представим измеряемый выход системы (5) в виде

$$y = x + w\ . \tag{7}$$

где $w = \Delta(t)x$. Так как матрица неопределенности $\Delta(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^T \Delta \le \delta^2 I$, то

$$w^T w \le \delta^2 x^T x\ . \tag{8}$$

Запишем замкнутую систему (1), (2), (6), (7) в виде

$$\dot{x} = \overline{A}x + \overline{B}w\ , \tag{9}$$

$$z_i = \overline{C}_i x + \overline{D}_i w\ ,\ i = 1,2,...,N\ ,$$

где $\overline{A} = A + BK$, $\overline{B} = BK$, $\overline{C}_i = C_i + D_i K$, $\overline{D}_i = D_i K$.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти множество допустимых начальных состояний, при которых управление (6) обеспечивает стабилизацию системы (9) для каждого i при одном ограничении $\max_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \overline{A}^T X_i + X_i \overline{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \overline{B} \\ \overline{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{C}_i^T \overline{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \overline{C}_i^T \overline{D}_i \\ \overline{D}_i^T \overline{C}_i & \overline{D}_i^T \overline{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \le 0.$$

Тогда все траектории замкнутой системы (9) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \le 1\}$ удовлетворяют ограничению $\max\limits_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$.

Обозначим через X_i множество всех матриц X_i, удовлетворяющих неравенствам (10). В качестве критерия минимальности X_i выберем критерий следа. Максимальную по всем $X_i \in \mathrm{X}_i$ область $E(X_i^*)$, находим путем минимизации следа матрицы X_i. Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab [5] с использованием приложениях CVX.

Сформулируем достаточные условия для поиска области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (6), с матрицей параметров регулятора K полученной в задаче синтеза управления при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Пусть матрицы X_i, $i = 1,2,...,N$ имеют минимальный след и являются решениями системы (10) для значений γ_i соответственно. Тогда все траектории замкнутой системы (9) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \le 1\}$ будут удовлетворять ограничению $\max\limits_{t \ge 0} |z_i(t)| \le \gamma_i$. Следовательно, для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} E(X_i)$, управление с заданной матрицей параметров регулятора K стабилизирует замкнутую систему при ограничениях (4).

4. Результаты численного моделирования

Рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u. \tag{11}$$

при ограничениях на φ – угол отклонения звена маятника от вертикали и u – управление:

$$\max_{t \ge 0} |\varphi(t)| \le 0.1, \ \max_{t \ge 0} |u(t)| \le 1. \tag{12}$$

Численное решение получено в пакете MATLAB. Для объекта (11) решен ряд задач. Для задачи стабилизации при отсутствии ошибки в измеряемом выходе получено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \tag{13}$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (11), (13) и выполнение ограничений (12) на фазовую переменную и управление.

На рис. 1 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \le 0.1, \ |u(t)| \le 1.$$

Оценим изменение оценки области допустимых начальных состояний динамической системы, при которых управление (6) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Обозначим Σ_δ оценку множества допустимых начальных состояний, для которых управление стабилизирует систему при значении δ. На рис. 1 приведены области Σ_0, $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$, $\Sigma_{0.2}$, соответствующие значениям $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$, $\delta = 0.2$, и

показано пересечение этих областей. Из рисунка следует, что область $\Sigma_{0.2}$ лежит внутри области $\Sigma_{0.1}$, которая в свою очередь лежит внутри области $\Sigma_{0.05}$, а область $\Sigma_{0.05}$ лежит внутри Σ_0.

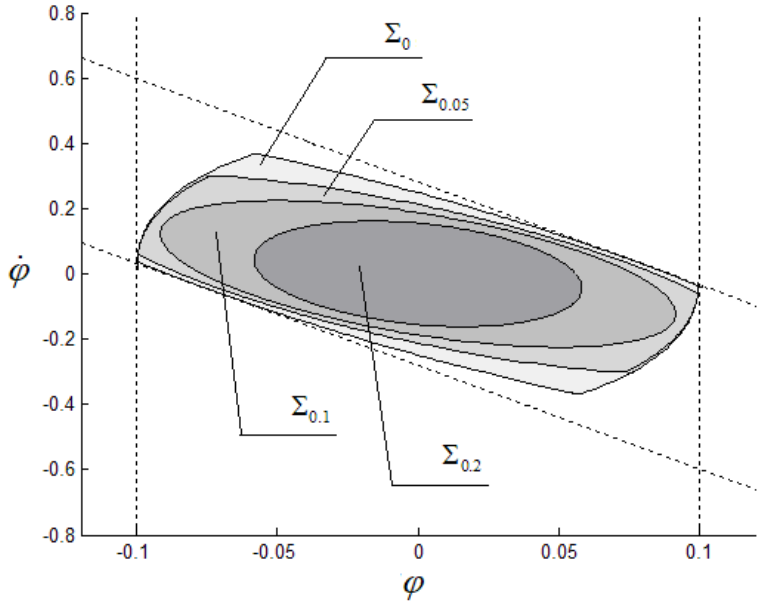


Рис. 1. Пересечение областей Σ_0, $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$ и $\Sigma_{0.2}$

Вычислим зависимость площади S области Σ_δ от величины δ, которая определяет величину ошибки в изменяемом выходе. На рис. 2 представлен график этой зависимости. В частности, получены значения $S(0) = 0.0819$, $S(0.05) = 0.0696$, $S(0.1) = 0.0541$, $S(0.2) = 0.0285$.

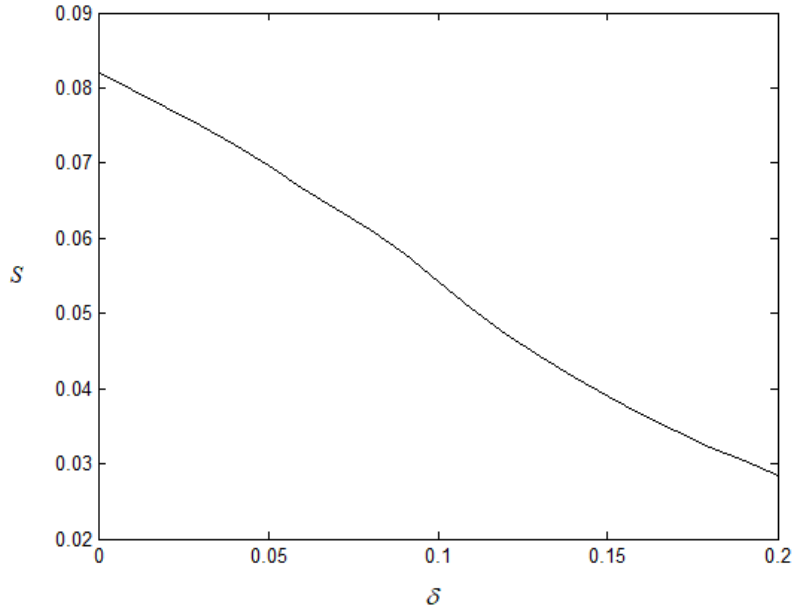


Рис. 2. График зависимости площади области Σ_δ

Проведенные вычисления показали, что эллипсы, отвечающие за ограничения на угол отклонения звена маятника при значениях $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$ и $\delta = 0.2$ близки друг к другу. Следовательно, на размер области Σ_δ допустимых начальных состояний главным образом оказывает влияние, как значение величины параметра δ, так и наличие в задаче ограничения на управление.

Литература

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007.
2. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика, 2009. – № 6. – С 48-57.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655-664.
4. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002.
5. Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. Natick, MA: The MathWorks, Inc. – 1995.
6. Федюков А.А. Синтез стабилизирующих регуляторов по выходу для динамических систем с ограничениями на фазовые переменные // Вестник ННГУ, Нижний Новгород, Издательство ННГУ, 2013. – № 2 (1). – С. 152–159.
7. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2019.
8. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННО-ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА К ЗАДАЧЕ ОДНОМЕРНОГО РАСКРОЯ

А.В. Филимонов, М.А. Быкова, Н.С. Скулкина

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В материале представлен эволюционно-генетический алгоритм для задачи одномерного раскроя с различными параметрами, изучена зависимость времени работы эволюционно-генетического алгоритма с задачами различной размерности.

Ключевые слова: задача одномерного раскроя, эволюционно-генетический алгоритм, эвристический алгоритм

1. Введение

В работе рассматривается задача одномерного раскроя [1]. Задача заключается в распределении заготовок по прутьям. Имеются прутья равной длины и заготовки заданной длины, которые необходимо нарезать из прутьев. Требуется построить вариант раскроя прутьев на заготовки, требующий минимального числа прутьев.

2. Математическая постановка задачи

Исходные параметры:
L – длина прутьев, $L \in N$.
n – количество заготовок, $n \in N$.
l_i – длина заготовки под номером i , $l_i \le L$, $l_i \in N$, $i=\overline{1,n}$.
Варьируемые параметры:
y – количество использованных прутьев, $y \in N$
x_i – номер прута, из которого будет изготовлена i-тая заготовка, $i=\overline{1,n}$.
Ограничения математической модели:
$x_i \in \{1,2,\ldots,y\}$, $i=\overline{1,n}$
$\sum_{i:xi=j} li \leqslant L, j=\overline{1,y}$
Критерий оптимальности:
$y \to \min$.

Задача одномерного раскроя относится к классу NP-трудных задач [2], т.к. к ней сводится за полиномиальное время NP-полная задача о разбиении.

3. Эволюционно-генетический алгоритм

В ходе работы был реализован эволюционно-генетический алгоритм (ЭГА) [3].

Способ кодирования: $\underline{Y}= (y_1\ y_2, \ldots, y_n)$, где Y - перестановка из номеров заготовок, объединённая в порядке вырезания их из прутьев, где сначала вырезаются все заготовки из одного прута.

В работе изучены и реализованы *методы формирования начальной популяции*: случайный метод и жадный алгоритм; случайный метод *выбора родительской пары*, положительное ассоциативное скрещивание и отрицательное ассоциативное скрещивание*;* порядковый *оператор кроссовера*; точечный *оператор мутации*; *стратегии формирования следующего поколения:* стратегия перекрывающихся поколений и элитарная стратегия; операторы селекции: *бета-турнир* и *рулетка.* ЭГА прекращает работу, если средняя приспособленность не меняется 4 поколения подряд.

4. Программная система и вычислительный эксперимент

Была реализована система, позволяющая получать точное решение с помощью полного перебора для задач размерности n <10; решать задачи большой размерности с помощью ЭГА. Был реализован эксперимент, в котором сравнивалось время работы ЭГА с задачами различной размерности. Применялся ЭГА с параметрами: генерация начальной популяции жадным алгоритмом, случайный выбор родительской пары, селекция бета-турниром. Учитывалось среднее количество поколений среди всех запусков, приспособленность лучшей особи среди всех запусков и средняя приспособленность лучших особей. Результаты экспериментов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты экспериментов

Номер эксперимента	Размерность задачи	Полный перебор		Эволюционно-генетический алгоритм		
		Оптимум	Время работы (сек)	Рекорд среди запусков	Среднее значение среди запусков	Среднее время работы (сек)
1	n = 9	5	02:07:04	5	5	00.0017
2	n = 9	4	02:06:45	4	4	00.0052
3	n = 15	-	>1ч	8	8	00.0049
4	n = 15	-	>1ч	7	7	00.0026
5	n = 21	-	>1ч	9	9,5	00.0081
6	n = 21	-	>1ч	8	8,6	00.0155
7	n = 30	-	>1ч	14	14,4	00.1059
8	n = 30	-	>1ч	9	9,2	00.0921
9	n = 60	-	>1ч	19	19,6	00.0352
10	n = 60	-	>1ч	15	15,2	00.0425
11	n = 500	-	>1ч	154	154,7	04.2514
12	n = 1000	-	>1ч	307	307,5	21.4119
13	n = 2000	-	>1ч	614	617,3	43:1238
14	n = 4000	-	>1ч	1233	1234,5	1:37:143

Из таблицы видно, что время работы ЭГА крайне мало, если сравнивать его со временем работы полного перебора даже для задач малой размерности. Также, время работы ЭГА возрастает с увеличением размерности задачи. Исходя из средних значений приспособленности среди всех запусков можно сказать, что ЭГА всегда находит один и тот же или близкий результат.

Литература

1. Канторович. Л.В. Математические методы организации и планирования производства. 1939 г.
2. Афраймович Л.Г., Учебно-методическая разработка «Информационные технологии в области принятия решений.». – Нижний Новгород: ННГУ, 2016 г.
3. Батищев Д.И., Е.А. Неймарк, Н.В. Старостин. Применение генетических алгоритмов к решению задач дискретной оптимизации. 2007 г.

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕМОДИНАМИКИ И БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ФАКТОРОВ РИСКА ПРИ КОМПЛЕКСНОМ СТЕНТИРОВАНИИ ГИГАНТСКОЙ ВЕРЕТЕНООБРАЗНОЙ АНЕВРИЗМЫ[1*]

С.В. Фролов, А.Ю. Потлов, С.В. Синдеев, Т.А. Фролова

Тамбовский государственный технический университет

Проведена оценка изменения кровотока в гигантской веретенообразной аневризме вертебробазилярного соединения. Обнаружена корреляция между численно предсказанными изменениями потока и известными результатами лечения, что показывает потенциал использования математического моделирования на основе индивидуальных данных пациента для планирования лечения и оценки возможных факторов риска, связанных с комплексным стентированием веретенообразных аневризм в клинической практике. Сравнение результатов математического моделирования пристеночного напряжения сдвига, с теоретическими расчетами, а также с результатами вычисления модуля сдвига для стенки фантома церебральной артерии подтвердило высокую достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: церебральное кровообращение, веретенообразная аневризма, потоконаправляющий стент, вычислительная гидродинамика, математическое моделирование.

1. Введение

Веретенообразная аневризма представляет собой локальное увеличение диаметра церебрального сосуда более чем в полтора раза от номинального. Для остановки роста аневризмы требуется дополнительное использование потоконаправляющих стентов [1]. Потоконаправляющий стент – это стент с высокой степенью плетения, предназначенный для восстановления естественного кровотока в мозговой артерии [2].

В представленном исследовании на основе математического моделирования церебральной гемодинамики рассчитано пристеночное напряжение сдвига в гигантской веретенообразной аневризме вертебробазилярного соединения, в которую были последовательно установлены три потоконаправляющих стента. Показано, что математическое моделирование кровотока потенциально может быть использовано в клинической практике для поддержки врачебных решениях при планирования комплексного стентирования церебральных артерий с веретенообразной аневризмой. Показана высокая степень корреляции получаемых результатов в области определения модуля сдвига для стенки кровеносного сосуда с результатами расчета пристеночного напряжения сдвига на основе математического моделирования церебральной гемодинамики, подтверждающая целесообразность использования компрессионной эластографии на основе интраваскулярной ОКТ для оценки биомеханических свойств стенок церебральных артерий с аневризмами.

2. Методы исследования

2.1. Описание клинического случая и виртуальная имплантация потоконаправляющих стентов

Для проведения исследования индивидуальные данные церебральных артерий пациента были получены с помощью трехмерной ротационной ангиографии, выполненной с помощью системы Philips Allura Xper FD20. Данные были в дальнейшем сегментированы с помощью

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-15-10327).

Vascular Modeling Toolkit 1.3 (http://www.vmtk.org) [3]. Поскольку использование лишь одного потоконаправляющего стента для лечения исследуемой гигантской веретенообразной аневризмы недостаточно, то вдоль базилярной и правой позвоночной артерии были последовательно установлены три стента.

Геометрические модели клинически использованных стентов были разработаны в соответствии со спецификациями производителя и имплантированы с использованием технологии быстрого виртуального стентирования [4], которая ранее была проверена на ряде реальных клинических случаев [5].

2.2. Численное моделирование

Скорость кровотока в левой и правой позвоночных артериях предполагалась равной. Кровь моделировалась ньютоновской жидкостью с динамической вязкостью 3.5 мПа и плотностью 1050 кг/м3. Вычислительная сетка состояла в основном из шестигранных элементов с размером основания 0.125 мм как для предоперационного случая, так и для случая с телескопическим стентированием.

Математическое моделирование кровотока до и после лечения аневризмы проводилось при физиологически нормальных условиях пульсирующего входного потока. Моделирование семи сердечных циклов было достаточно для достижения условия сходимости динамического решения с шагом дискретизации по времени равным 1 мс. Численные результаты для последнего (седьмого) сердечного цикла были использованы для дальнейшей обработки.

Для правильного сравнения предоперационного и послеоперационного случаев учитывался только объем самой аневризмы, исключая области с потоконаправляющими стентами. Были проанализированы следующие гемодинамические параметры до и после лечения: уменьшение кровотока, распределение пристеночного напряжения сдвига (WSS), TAWSS (усредненное по времени WSS), TAWSSV (усредненный по времени вектор WSS), индекс колебательного сдвига (OSI) и относительное время пребывания (RRT).

2.3. Физическое моделирование

Матриксом фантомов служили разные модификации двухкомпонентного прозрачного жидкого силикона на платиновой основе под торговой маркой «Sorta-Clear». Формы для литья изготавливались с использованием 3D-принтера «Anycubic Photon S» и фототополимерной смолы «eSUN». Геометрия имитируемых сосудов извлекалась из результатов компьютерной или магнитно-резонансной ангиографии, посредством сегментации совокупностей сканов и аппроксимации сосудов на них по методу конечных элементов. Для обеспечения большей достоверности получаемых результатов при физическом моделировании использовались те же геометрические модели что и в компьютерных экспериментах. Разница заключалась лишь в том, что эти модели для нужд 3D-печати дополнительно подвергались разбивке на слои. В качестве рассеивающих добавок использовался мелкодисперсный порошок диоксида титана, в качестве поглощающих – спектральный краситель «Indian Ink». Фантомы изготавливались послойно, массовые доли компонентов (мактрикс, диоксид титана, спектральный краситель) независимо подбирались для каждого слоя, также как и его толщина. Имитаторы кровеносных сосудов помещались в имитатор ткани с защитной оболочкой. Концы имитаторов кровеносных сосудов снабжались специальными раздвоенными катетерами (одно из отверстий узкое – для иголки, второе специально расширено для прохождения зонда).

3. Изменение гемодинамических параметров в аневризме до и после стентирования

3.1. Компьютерные эксперименты

Результаты, полученные с помощью математического моделирования, были дополнительно обработаны для вычисления производных гемодинамических параметров. В результате количе-

ственного сравнения были выявлены изменения следующих гемодинамических параметров после телескопического стентирования. TAWSS уменьшился как в левой (изолированной), так и в правой (стентированной) позвоночной артерии, а также наблюдалось снижение TAWSS на 85% для купола аневризмы. С другой стороны, изменения потока после стентирования привели к значительному повышению OSI и изменению характера его распределения. Наиболее высокие значения OSI наблюдались в изолированной левой позвоночной артерии и на куполе аневризмы с пиковым значением 0.45 и средним значением 0.18, что намного выше, чем для предоперационного случая со значениями 0.42 и 0.08 соответственно. Это демонстрирует увеличение колебаний вектора WSS во время сердечного цикла в этих конкретных областях. Кроме того, обнаружено значительное повышение RRT по сравнению с исходным уровнем, как для изолированной левой позвоночной артерии, так и для купола аневризмы (в 6,2 раза), что указывает на застой кровотока в аневризме и способствует формированию необходимых тромбогенных условий для окклюзии аневризмы, которая была обнаружена клинически в послеоперационном периоде.

3.2. Эксперименты с фантомами

В качестве кровеимитирующей жидкости применен однопроцентный раствор интралипида в воде, по своим оптическим свойствам сходный с человеческой кровью. Для закачки кровеимитирующей жидкости использованы отверстия под иголку в сдвоенных катетерах. Поток кровеимитирующей жидкости создавался шприцевым насосом «SPLab 01». Эта жидкость, протекая через трубку капельницы, попадала в фантом церебральной артерии с аневризмой и вытекала в емкость для отработанной кровеимитирующей жидкости. Интраваскулярный зонд проходил через расширенный катетер и в непрерывном режиме сканировал стенки фантома при разных уровнях расхода кровеимитирующей жидкости. Последовательности интерференционных сигналов сохранялись для дальнейшей обработки (получения структурных и функциональных изображений). В дополнительных экспериментах использовалась установка для формирования пульсирующих потоков (разработана ранее в рамках основной части гранта РНФ) и интраваскулярный зонд получал интерференционный сигнал от стенок исследуемых сосудов с разным уровнем деформаций. Данные также записывались для дальнейшей обработки.

Расчет модуля сдвига включал в себя следующие действия. Производилось считывание и сегментация методом управляемого водораздела структурных ОКТ-изображений исследуемого участка стенки кровеносного сосуда. Выполнялась идентификация основных слоев (медиа, адвентиция и интима) исследуемого объекта на всех сегментах. В идентифицированных слоях отслеживалось распространения сдвиговой волны, причем вычисление скорости ее распространения в каждом слое сосудистой стенки производится по углу наклона сдвиговой волны в привязке к моментам времени соответствующим достижению соответствующего сегментированного слоя передним фронтом пульсовой волны. Модуль сдвига вычислялся на основе скорости распространения сдвиговой волны и плотности исследуемой ткани. Эластограмма по модулю сдвига строится и визуализируются совместно с доплеровскими картограммами.

4. Сравнительный анализ результатов физических и компьютерных экспериментов

В исследованиях, проводимых несколькими научными медицинскими учреждениями, сообщалось об успешном исходе лечения в 80-90% случаев при использовании потоконаправляющих стентов, однако в основном приводились данные для мешотчатых аневризм [6]. Несмотря на недавние достижения, лечение веретенообразных аневризм с помощью потоконаправляющих стентов является довольно сложной задачей из-за высокого риска осложнений и относительно низкой частоты клинически успешных случаев. Более того, прогноз изменений потока после лечения все еще остается сложным, особенно для аневризм, при лечении которых использовалось несколько стентов. Поэтому необходимо проведение всестороннего анализа применения потоконаправляющих стентов, прежде чем они могут стать регулярной клинической практикой при лечении веретенообразных аневризм.

Эффективность потоконаправляющих стентов при лечении аневризм артерий заднего мозгового кровообращения была рассмотрена в ряде исследований [7]. Для самой большой на сегодня группы клинических случаев, которая включала 131 аневризму артерий заднего мозгового кровообращения, Griessenauer et al. [8] оценивали безопасность и эффективность лечения с помощью потоконаправляющих стентов индивидуально для каждого типа аневризм. Они не нашли клинических предикторов окклюзии (таких как возраст, пол, размер аневризмы, местоположение и т. д.), что затрудняет оценку риска разрыва и прогноз лечения аневризмы. Поэтому следует дополнительно учитывать гемодинамические параметры, что особенно важно в случае сложного стентирования, когда трудно предсказать изменения кровотока. Так, Lv et al. [9] недавно изучили гемодинамику веретенообразных аневризм позвоночной артерии, при лечении которых использовались три перекрывающихся стента Enterprise, и обнаружили благоприятные изменения гемодинамических параметров, приводящие к образованию тромбоза после стентирования. Однако влияние телескопической установки потоконаправляющих стентов в гигантскую веретенообразную аневризму вертебробазилярного соединения на кровоток еще не изучено, что является целью настоящего исследования.

В представленном исследовании были проанализированы гемодинамические характеристики нескольких потоконаправляющих стентов, имплантированных последовательно в гигантскую веретенообразную аневризму вертебробазилярного соединения, и установлена связь между изменениями кровотока и известным исходом лечения. Основные проанализированные гемодинамические параметры, такие как скорость и распределение WSS, а также параметры, полученные на основе WSS, такие как OSI, TAWSS, TAWSSV и RRT, были оценены до и после лечения. Наблюдалось значительное уменьшение потока на 78% в аневризме, а также значительные изменения в структуре потока, распределении WSS и других гемодинамических параметрах после лечения. Это вызвало застой крови и увеличило время ее пребывания в области аневризмы, что привело к возникновению тромбогенных условий. Результаты моделирования хорошо коррелируют с известным успешным клиническим результатом лечения. Кроме того, было обнаружено, что телескопическое стентирование эффективно для лечения гигантской веретенообразной аневризмы базилярной артерии в рассматриваемом случае без дополнительного входного кровотока в аневризму из областей контакта между соседними стентами.

Поскольку веретенообразные аневризмы связаны с дегенеративными процессами в стенке сосуда, то изменение распределения WSS представляют особый интерес. Известно, что величина и направление WSS связаны с регуляцией биохимических процессов в клетках эндотелия, которые составляют внутренний слой стенки сосуда, непосредственно подверженный влиянию движущейся крови. Как низкие, так и высокие значения WSS могут вызвать дегенеративные изменения в эндотелиальных клетках и привести к нарушению целостности клеточного матрикса. В представленном исследовании наблюдалось значительное снижение TAWSS в мешочке аневризмы, а также в обеих позвоночных артериях после имплантации потоконаправляющего стента, что хорошо согласуется с исследованием Xiang et al. [10], демонстрирующим отсутствие области с высоким WSS в куполе аневризмы после установки стента. Кроме того, было выявлено повышение OSI как в аневризме, так и в окклюзированной позвоночной артерии, что может быть результатом колебаний низкой скорости в этих областях. Значительное увеличение RRT как в аневризме, так и в окклюзированной позвоночной артерии демонстрирует желательный эффект стентирования, вызывающий застой потока и создающий необходимые условия для тромбообразования. Численное моделирование, с использованием быстрого виртуального стентирования, может быть использовано в клинической практике для оценки изменений кровотока, вызванных сложным стентированием с множественными имплантированными потоконаправляющими стентами, в аневризмах веретенообразной формы. Последующий анализ гемодинамических характеристик и изменений кровотока для каждой выбранной модели стента может применяться для выбора подходящего стента в каждом конкретном случае.

Представленное исследование имеет ограничения, которые могут повлиять на результаты. Во-первых, использовалась только обобщенная форма входного потока на входе в аневризму, так как индивидуализированные данные не были доступны для рассматриваемого клинического случая. Во-вторых, применяемая технология быстрого виртуального стентирования может привести к небольшим различиям для телескопического стентирования по сравнению с реальным клиническим случаем. В-третьих, предположение о ньютоновских свойствах крови может

привести к переоценке величины скорости и других гемодинамических параметров, таких как WSS, TAWSS и т. д. в мешочке аневризмы, где наблюдаются области с низкой скоростью сдвига [11].

Для анализа погрешностей при оценке модуля сдвига через скорость распространения сдвиговой волны были проведены: сравнение полученных результатов с результатами теоретических расчетов и результатами индивидуализированного математического моделирования [11-14]. Из-за существенной неоднородности в различных участках стенки исследуемого кровеносного сосуда его биомеханические свойства на макроскопическом уровне нельзя назвать изотропными. Однако для не больших участков (площадью менее 10 микрон) их можно упрощено считать изотропными. В связи с этим была проведена оценка величины модуля сдвига по уже известным величинам модуля Юнга и коэффициента Пуассона [14]. Сравнение результатов работы предложенного метода с теоретическими расчетами для всех вышеописанных физических экспериментов показало хорошую достоверность получаемых результатов (погрешность менее 10%) и высокую их воспроизводимость (минимальная погрешность была 3.4%, максимальная 12,6%). Среднее значение величины модуля сдвига для фантомов церебральных сосудов составило порядка 0.31 МПа. Проверка полученных результатов на основании индивидуализированного математического моделирования проводилась для результатов тех же экспериментов [13,14]. В случаях, потоков в фантомах кровеносных сосудов, геометрические модели, использованные при изготовлении этих сосудов напрямую использовались при математическом моделировании церебральной гемодинамики. Сравнение результатов компьютерного и физического моделирования также показало хороший уровень достоверности получаемых результатов, среднее значение величины модуля сдвига для фантомов церебральных сосудов составило порядка 0.33 МПа. Следует отметить, что сравнение пристеночного напряжения сдвига в потоке кровеимитирующей жидкости и модуля сдвига в тканях стенки фантома кровеносного сосуда проводилось косвенно, с поправкой на плотность. Оценочный диапазон величин модуля сдвига для церебральных сосудов составляет порядке 0.31-0.43 МПа. Несколько заниженные (но все же находящиеся в целевом диапазоне) величины модуля сдвига из вышеописанных экспериментов объясняются тем, что механические свойства тканей *in vivo*, выше чем *ex vivo*.

5. Заключение

Численное моделирование показало, что телескопическое стентирование эффективно для лечения гигантской веретенообразной аневризмы базилярной артерии. Наблюдаемое значительное уменьшение пристеночного напряжения сдвига на 85% и существенные изменения гемодинамических параметров создали необходимые условия окклюзии аневризмы. Обнаружена корреляция между численно предсказанными изменениями кровотока и известным клиническим результатом лечения, что показывает потенциал использования математического моделирования на основе индивидуальных данных пациента для планирования лечения и оценки возможных факторов риска, связанных с комплексным стентированием веретенообразных аневризм в клинической практике. Сравнение результатов математического моделирования пристеночного напряжения сдвига, с теоретическими расчетами, а также с результатами вычисления модуля сдвига для стенки фантома церебральной артерии подтвердило высокую достоверность полученных результатов. Среднее значение величины модуля сдвига для фантомов церебральных сосудов составило порядка 0.33 МПа.

Литература

1. Treatment of posterior circulation aneurysms with the pipeline embolization device / N. Chalouhi, S. Tjoumakaris, A.S. Dumont, L.F. Gonzalez, C. Randazzo, R.M. Starke [et al] // Neurosurgery. – 2013. – № 72. – PP. 883–9.
2. Flow-diverter devices in the treatment of intracranial aneurysms: A meta-analysis and systematic review / X. Lv, H. Yang, P. Liu, Y. Li // Neuroradiol J. – 2016. – № 29. – PP. 66–71.
3. An image-based modeling framework for patient-specific computational hemodynamics / L Antiga, M Piccinelli, L Botti, B Ene-Iordache, A Remuzzi, DA Steinman // Med Biol Eng Comput. – 2008. – № 46. – 1097–112.

4. Berg P, Daróczy L, Janiga G. Virtual Stenting for Intracranial Aneurysms / P. Berg, L. Daróczy, G. Janiga // Computing and Visualization for Intravascular Imaging and Computer-Assisted Stenting. Elsevier. – 2017. – PP. 371–411.
5. Endothelialization of over- and undersized flow-diverter stents at covered vessel side branches: An in vivo and in silico study / P. Berg, C. Iosif, S. Ponsonnard, C. Yardin, G. Janiga, C. Mounayer // J Biomech. – 2016. – № 49. – PP. 4–12.
6. Treatment of Intracranial Aneurysms With the SILK Embolization Device in a Multicenter Study. A Retrospective Data Analysis / J.M. Pumar, A. Banguero, H. Cuellar, L. Guimaraens, J. Masso, S. Miralbes [et al] // Neurosurgery. – 2017. – № 81. – PP. 595–601.
7. Meta-analysis of treatment outcomes of posterior circulation non-saccular aneurysms by flow diverters / S. Kiyofuji, C.S. Graffeo, A. Perry, M.H. Murad, K.D. Flemming, G. Lanzino [et al] // J Neurointerv Surg. – 2018. – Vol. 10, № 5. – PP. 493-499.
8. Pipeline embolization of posterior circulation aneurysms: a multicenter study of 131 aneurysms / C.J. Griessenauer, C.S. Ogilvy, N. Adeeb, A.A. Dmytriw, P.M. Foreman, H. Shallwani [et al] // J Neurosurg. 2018. – P. 1–13.
9. Hemodynamic Changes Caused by Multiple Stenting in Vertebral Artery Fusiform Aneurysms: A Patient-Specific Computational Fluid Dynamics Study / N. Lv, W. Cao, I. Larrabide, C. Karmonik, D. Zhu, J. Liu [et al] // AJNR Am J Neuroradiol. – 2018. – № 39. – PP. 118–22.
10. High-fidelity virtual stenting: modeling of flow diverter deployment for hemodynamic characterization of complex intracranial aneurysms / J. Xiang, R.J. Damiano, N. Lin, K.V. Snyder, A.H. Siddiqui, E.I. Levy [et al] // J Neurosurg. 2015. – № 123. – PP. 832–40.
11. Experimental and CFD flow studies in an intracranial aneurysm model with Newtonian and non-Newtonian fluids / S.V. Frolov, S.V. Sindeev, D. Liepsch, A. Balasso // Technol Health Care. – 2016. – № 24. – PP.317–33.
12. Frolov S. V. Biotechnical system for endovascular treatment of cerebral aneurysms using mathematical modeling of hemodynamics and endoscopic optical coherence tomography / S. V. Frolov, A. Yu. Potlov, S. V. Sindeev // WSEAS Transactions on Computer Research. – 2018. – Vol. 6(4). – P. 29–35.
13. Фролов, С.В. Оценка механических свойств стенок кровеносных сосудов и высокоточное математическое моделирование гемодинамики в задачах выбора потоконаправляющих стентов для проведения эндоваскулярных операций по стентированию церебральный артерий [Электронный ресурс] : монография / С. В. Фролов, А. Ю. Потлов, С. В. Синдеев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 34,2 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.
14. Frolov, S. V. Selection of Flow-Diverter Stent Models Using Optical Coherence Tomography and Mathematical Modeling of Hemodynamics / S. V. Frolov, A. Y. Potlov, S. V. Sindeev // Biomedical Engineering. – 2018. – Vol. 51(6). – pp. 381–384.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МИГРАЦИИ ФОТОНОВ И ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ ОПТИЧЕСКОЙ КОГЕРЕНТНОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМПРЕССИОННОЙ ЭЛАСТОГРАФИИ [1*]

С.В. Фролов, А.Ю. Потлов, Т.А. Фролова

Тамбовский государственный технический университет

Целью проводимых исследований является повышение достоверности математического моделирования интерференционного ОКТ-сигнала во временной и частотной области посредством учета анатомических особенностей исследуемого объекта и получения набора А-сканов зависимых от длины волны зондирующего излучения (спектроскопический подход). Для достижения поставленной цели разработаны математическая модель и программный продукт для описания процессов миграции фотонов и формирования при этом интерференционных сигналов в спектроскопической ОКТ. Математическая модель была практически реализована в среде LabVIEW в виде совокупности взаимосвязанных модулей.

Ключевые слова: оптическая когерентная томография (ОКТ), спектроскопические приложения, интерференционный сигнал, математическое моделирование, метод Монте-Карло, сильно рассеивающие.

1. Введение

Метод оптической когерентной томографии (ОКТ) является физическим способом исследования для визуализации внутренней структуры исследуемого биомедицинского объекта на основе зондирования образца оптическим фемтокоррелированным излучением. При моделировании ОКТ-сигнала известны три основных подхода к описанию процессов миграции фотонов в мягких биологических тканях: метод Кубелки-Мунка, диффузионное приближение к уравнению переноса излучения (УПИ), метод статистических испытаний Монте-Карло [1-3]. Многопотоковые методы (вариации метода Кубелки-Мунка) и диффузионное приближение к УПИ в основном используются для упрощенного описания фотонного транспорта сквозь толщу биологической ткани и целесообразны, например, для формирования начальных приближений и решения обратных задач по расчету величин оптических характеристик или локализации оптических неоднородностей. Метод статистических испытаний Монте-Карло отличается высокой точностью моделирования фотонного транспорта, как в толще мягкой биологической ткани, так и на ее границах [2,4]. Его главный недостаток – высокая требовательность к производительности вычислений. Но поскольку стенки кровеносных сосудов являются структурами с достаточно небольшими пространственными размерами, метод Монте-Карло может обеспечить достоверное моделирование распространения излучения ближнего инфракрасного диапазона за приемлемые временные интервалы с дифференциацией по длинам волн (спектроскопический подход).

ОКТ-системы принято классифицировать на работающие во временной и работающие в частотной области. Практически все современные ОКТ-системы работают в частотной области. Это связано с намного более высокой скорость сканирования, которая позволяет снизить артефакты тремора на получаемых структурных изображениях. Однако интерференционный сигнал ОКТ-систем во временной области несет в себе больше информации, которая потенциально может быть использована в задачах компрессионной эластографии. В связи с вышесказанным целесообразным является моделировать интерференционный сигнал на детекторах ОКТ-систем работающих как во временной, так и в частотной области. Принципиальная разница между этими двумя вариантами моделирования заключается в особенностях процессов детектирова-

[1*] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-15-10327).

ния излучения и формирования структурного изображения, в то время как формулы, описывающие распространение оптического излучения в среде в обоих случаях одинаковы [1, 5].

Целью проводимых исследований является повышение достоверности математического моделирования интерференционного ОКТ-сигнала во временной и частотной области посредством учета анатомических особенностей исследуемого объекта и получения набора А-сканов зависимых от длины волны зондирующего излучения (спектроскопический подход).

2. Формирование геометрических моделей

2.1. Алгоритм геометрического моделирования для нужд ОКТ

Мягкие биологические ткани, такие как стенки церебральных сосудов с аневризмами, характеризуются довольно сложным внутренним строением [6-9], в связи с чем, ручное формирование массивов данных, описывающих их геометрию и оптические свойства является излишне трудоемким и нецелесообразным. Предлагается оригинальный метод (рисунки 1 и 2) полуавтоматического формирования геометрических моделей исследуемых биообъектов с использованием эскизов их внутреннего строения, операций изогелии, идентификации и кодирования найденных структур.

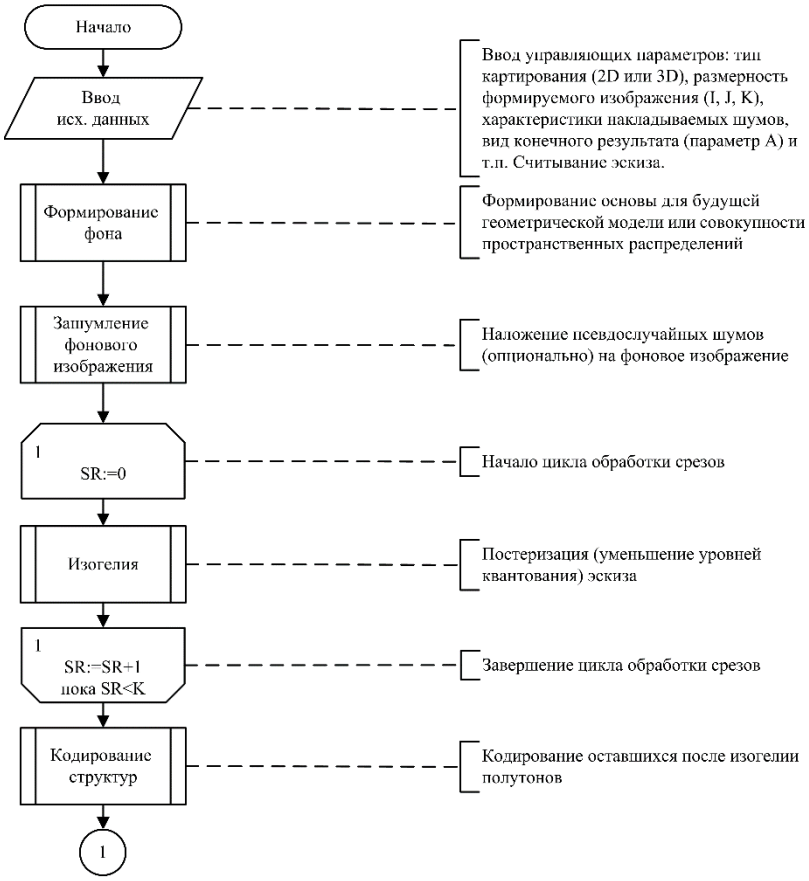


Рис. 1. Начальные этапы алгоритма формирования геометрической модели и пространственных распределений оптических характеристик в исследуемой мягкой биологической ткани

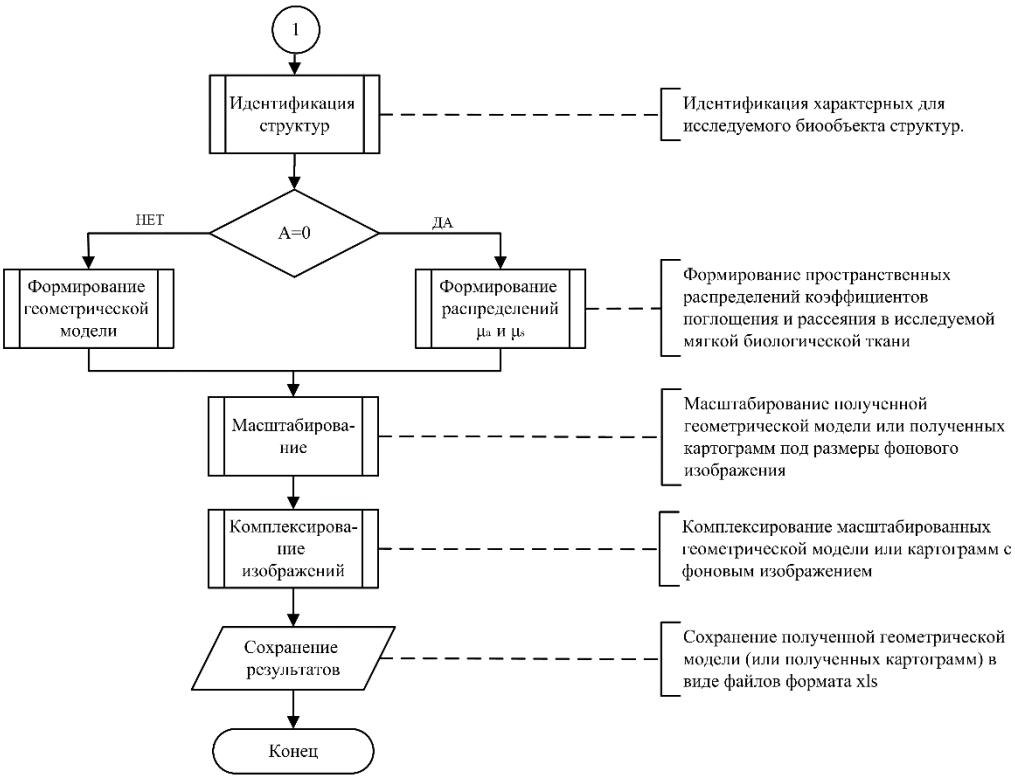


Рис. 2. Заключительные этапы алгоритма формирования геометрической модели и пространственных распределений оптических характеристик в исследуемой мягкой биологической ткани

Алгоритм по рисункам 1 и 2 из был практически реализован в виде специализированного программного продукта с помощью среды разработки и платформы для выполнения программ LabVIEW. Серия экспериментов с медицинским фантомами показала, что для обеспечения достоверности моделирования структур исследуемого объекта >90% требуется менее 20 полутонов.

3. Моделирование миграции фотонов методом статистических испытаний Монте-Карло

3.1. Алгоритм моделирования фотонного транспорта

Упрощенная блок-схема предложенного метода моделирования фотонного транспорта показана на рисунке 3.

Вышеописанный алгоритм по рисунку 3 был практически реализован в виде специализированного программного продукта с помощью среды разработки и платформы для выполнения программ LabVIEW.

Для проверки общей работоспособности алгоритма в режимах формирования интерференционного сигнал без и с учетом спекл-структуры был использован простейший объект – пятислойная (роговой слой, верхний эпидермис, эпидермис, дерма, нижняя дерма) модель верхних слоев кожи человека. Размеры изображений 2x2 мм, количество А-сканов составило 180 штук, моделируемая длина волны источника излучения – 1300 нм, длина когерентности – 14.5 микрон. Сформированные изображения доказывают работоспособность предложенного алгоритма, поскольку на них ткани, обладающие наименьшими показателями анизотропии и наибольшими коэффициентами рассеяния, отличаются наибольшими интенсивностями. В тоже время, ткани с высоким показателем коэффициента анизотропии имеют относительно небольшую интенсивность, в силу того, что сравнительно небольшая часть фотонов отражается (рассеивается) назад.

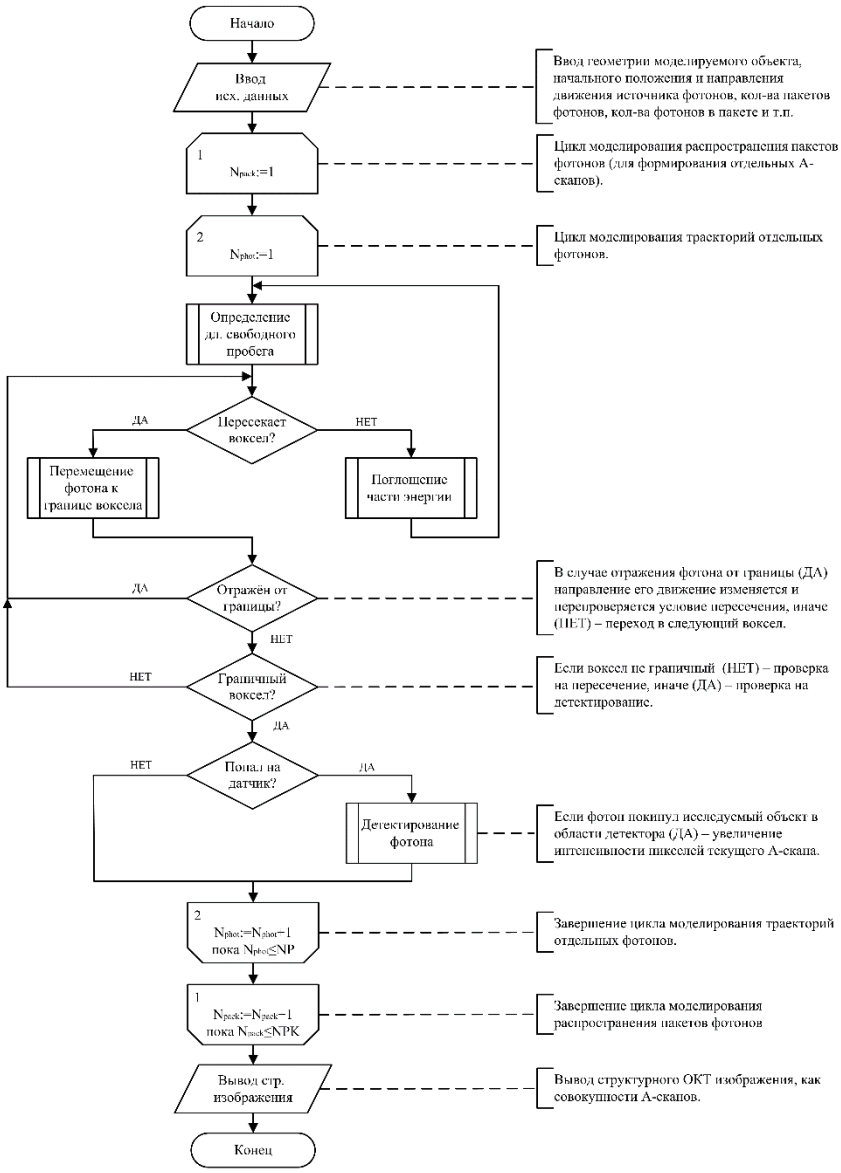


Рис. 3. Основные этапы алгоритма моделирования распространения в тканях стенки кровеносного сосуда непрерывного излучения ближнего инфракрасного диапазона

4. Заключение

Разработаны математическая модель и программный продукт для описания процессов миграции фотонов и формирования при этом интерференционных сигналов в спектроскопической ОКТ. Математическая модель характеризуется трехстадийным подходом, первая стадия – формирование геометрической модели исследуемого объекта, вторая стадия - статистическое описание траекторий движения большого количества фотонов, с учетм всех актов взаимодействия начиная от момента инжектирования в исследуемую ткань и до момента попадания фотона на детектор ОКТ-системы, либо его «гибели», третья стадия – формирование совокупности интерференционных сигналов и генерация по меньшей мере одного структурного ОКТ-изображения на их основе.

Первая стадия организована посредством считывания эскиза внутреннего строения (схема из медицинского атласа, фотоснимок хирургического разреза, результаты медицинской визуализации посредством ОКТ или УЗИ) исследуемого биобъекта, с последующими локализацией основных структур посредством изогелии (постеризации), идентификацией и кодированием этих структур с использованием справочных данных о характерных оптических свойствах.

Вторая стадия основывается на методе статистических испытаний Монте-Карло. Производится расчет траектории сканирующего движения источника излучения, испускающего в каждой новой позиции пакет фотон в заданный участок исследуемого биообъекта. На выбор пользователя предусмотрено использование точечного источника излучения, гауссовского пучка и коллимированного гауссовского пучка. Расчет траекторий движения для них производится с использованием специализированного программного продукта. Для каждого фотона вычисляется траектория псевдослучайного движения. Расчет длины свободного пробега между точками взаимодействия со средой осуществляется на основе коэффициента рассеяния. Поглощение энергии вычисляется на основе закона Бугера-Ламберта-Бера, и соответствует непрерывному поглощению энергии пучка излучения. Рассеяние характеризует изменение направления движения фотона в точках взаимодействия и рассчитывается на основе фазовой функции Хени-Гринштейна и полярного угла, который равномерно распределен в диапазоне от 0 до 360 градусов, при этом рассчитываются новые значения направляющих косинусов. В случае попадания фотона на детектор его остаточная энергия, координата точки детектирования и время пробега записываются в специальные массивы. В случае потери фотоном большей части своей энергии или его вылета в окружающую среду вне плоскости детектирования дальнейший расчет траектории этого фотона прекращается. Фотоны для которых разность пройденного оптического пути и оптического пути в опорном плече меньше длины когерентности также не учитываются. Третья стадия заключается в последовательном формировании интерференционных сигналов для множества заданных пользователем длин волн источника излучения, причем процесс формирования производится с учетом спекл-шумов, возникающих в результате интерференции вторичных волн. Получение структурного ОКТ-изображения биологической ткани производится посредством преобразования Фурье.

Вышеописанная трех-стадийная математическая модель была практически реализована в среде LabVIEW в виде совокупности взаимосвязанных модулей, причем для повышения быстродействия на самой ресурсоемкой, второй стадии были использованы параллельные вычисления на графических процессорах (GPU Analysis Toolkit). В частности, распараллелены расчеты направляющих косинусов для отдельных фотонов в составе фотонного пакета.

Литература

1. Avsievich, T. I. Role of the Carrier Frequency in Doppler OCT / T. I. Avsievich, A. Yu. Potlov, S. G. Proskurin // Asia-ARVO 2015: International Conference of the Association for Research in Vision and Ophthalmology (Yokohama, Japan), 16th – 19th February. – 2015. – V. 37 – 6. – P. 381.
2. Фролов, С.В. Оценка механических свойств стенок кровеносных сосудов и высокоточное математическое моделирование гемодинамики в задачах выбора потоконаправляющих стентов для проведения эндоваскулярных операций по стентированию церебральный артерий [Электронный ресурс] : монография / С. В. Фролов, А. Ю. Потлов, С. В. Синдеев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2018. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 34,2 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.
3. Bashkatov, A. N. Optical Properties of Skin, Subcutaneous, and Muscle Tissues / A. N. Bashkatov, E. A. Genina, V. V. Tuchin // Journal of Innovative Optical Health Sciences. – 2011. – Vol. 4. – P. 9 – 38.
4. Sing-sensitive Doppler Mapping Method of the Complex Flow / T. I. Avsievich, A. Yu. Potlov, S. G. Proskurin, K. E. S. Ghaleb, S. V. Frolov // 2nd OCT4NDT: International Symposium on Optical Coherence Tomography for Non-Destructive Testing (Dresden, Germany), 25th – 26th March. – 2015. – P. 24.
5. Monte-Carlo Simulation of OCT Structural Images of Human Skin using Experimental B-Scans and Voxel Based Approach to Optical Properties Distribution / S. V. Frolov, A. Yu. Potlov, D. A. Petrov, S. G. Proskurin // Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE. – 2017. – Vol. 10336, No. 103360Z.

6. An image-based modeling framework for patient-specific computational hemodynamics / L Antiga, M Piccinelli, L Botti, B Ene-Iordache, A Remuzzi, DA Steinman // Med Biol Eng Comput. – 2008. – № 46. – 1097–112.
7. Berg P, Daróczy L, Janiga G. Virtual Stenting for Intracranial Aneurysms / P. Berg, L. Daróczy, G. Janiga // Computing and Visualization for Intravascular Imaging and Computer-Assisted Stenting. Elsevier. – 2017. – PP. 371–411.
8. Frolov, S. V. Selection of Flow-Diverter Stent Models Using Optical Coherence Tomography and Mathematical Modeling of Hemodynamics / S. V. Frolov, A. Y. Potlov, S. V. Sindeev // Biomedical Engineering. – 2018. – Vol. 51(6). – pp. 381–384.
9. Moffitt, T. Preparation and Characterization of Polyurethane Optical Phantoms / T. Moffitt, Y. C. Chen, S. A. Prahl // Journal of Biomedical Optics. – 2006. – Vol. 11. – Is. 4. – No. 041103.

ВЛИЯНИЕ ШУМА НА ОБОБЩЕННУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ В СИСТЕМАХ СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ АТТРАКТОРА[1*]

В.А. Ханадеев[1,2], О.И. Москаленко[1,2]

[1]Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
[2]Региональный научно-образовательный математический центр «Математика технологий будущего»

Исследовано влияние шума на обобщенную синхронизацию в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора. На примере систем Лоренца установлено, что режим обобщенной синхронизации в таких системах оказывается устойчивым по отношению к внешнему шуму.

Ключевые слова: обобщенная синхронизация, шум, сложная топология аттрактора

1. Введение

Влияние шума на установление синхронизации является одним из наиболее важных вопросов при изучении поведения связанных хаотических систем [1-3]. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное воздействие на режимы полной и фазовой синхронизации [1,2], при этом режим обобщенной синхронизации оказывается, как правило, устойчивым по отношению к шумам [3].

Влияние шума на обобщенную синхронизацию изучено достаточно хорошо только в системах с относительно простой топологией аттрактора, как, например, у систем Ресслера. Однако, существует класс систем с так называемой сложной (двулистной) структурой аттрактора, механизмы установления обобщенной синхронизации в которых отличаются от случая систем с простой топологией аттрактора [4]. Исследованию влияния шума на установление обобщенной синхронизации в таких системах посвящена настоящая работа.

2. Исследуемая система

В качестве объекта исследования выбраны однонаправленно связанные системы Лоренца, динамика которых описывается следующей системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 &= -b z_1 + x_1 y_1, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(y_2 - x_2) + \varepsilon(x_1 - x_2) + D\zeta, \\ \dot{y}_2 &= r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2, \\ \dot{z}_2 &= -b z_2 + x_2 y_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих ведущей и ведомой систем, соответственно, $\sigma = 10$, $b = 2$, $r_1 = 40$ и $r_2 = 35$ – управляющие параметры, ε – параметр связи, D – интенсивность шума, ζ –случайный гауссовский процесс с нулевым средним и единичной дисперсией. Для определения наступления режима обобщенной синхронизации в системе (1) использовались метод вспомогательной системы и расчет спектра показателей Ляпунова.

3. Результаты исследования

На рисунке 1 приведена граница обобщенной синхронизации на плоскости параметров (D,ε). Из рисунка видно, что при относительно малых значениях интенсивности шума, сопоста-

[1*] Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых докторов наук (проект № МД-21.2020.2).

вимых с амплитудой собственных колебаний системы Лоренца, порог обобщенной синхронизации практически не меняется. Иными словами, режим обобщенной синхронизации в связанных системах Лоренца (1) оказывается устойчивым по отношению к шумам.

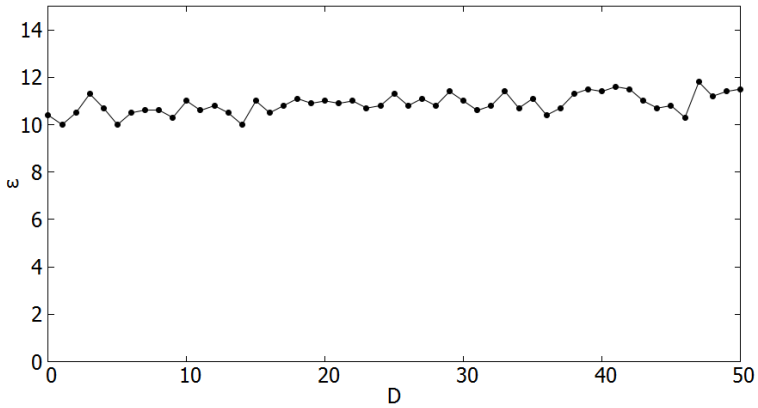


Рис. 1. Зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (1) от интенсивности шума

На рисунке 2 показано, как трансформируется аттрактор ведомой системы при добавлении шума интенсивности *D*=50. Видно, что внешнее шумовое воздействие оказывает незначительное влияние на ведомую систему, практически не изменяя её характеристик.

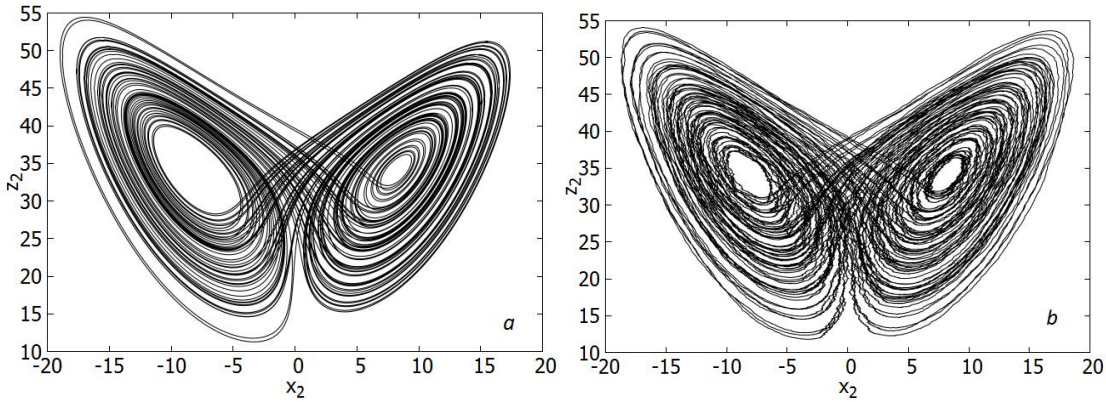


Рис. 2. Фазовые портреты ведомой системы Лоренца (1) в отсутствие (*a*) и при наличии шума интенсивности *D* = 50 (*b*)

Таким образом, режим обобщённой синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах Лоренца оказывается устойчивым по отношению к шумам, что обусловлено слабым влиянием шума на аттрактор системы Лоренца.

Литература

1. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L.M. Desynchronization by periodic orbits // Phys Rev E 52(2), R1253-R1256 (1995).
2. Zhou C.S., Kurths J., Kiss I.Z., Hudson J.L. Noise-Enhanced Phase Synchronization of Chaotic Oscillators // Phys. Rev. Lett. 89, 014101 (2002).
3. Moskalenko O.I., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al. Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment // Eur. Phys. J. B 82, 69–82 (2011).
4. Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A. et al. Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization // Phys. Rev. E 102, 012205 (2020).
5. Zheng Z., Wang X., Cross M.C. Transitions from partial to complete generalized synchronizations in bidirectionally coupled chaotic oscillators // Phys. Rev. E. 65, 056211 (2002).

КРАТКОВРЕМЕННАЯ РАБОЧАЯ ПАМЯТЬ В НЕЙРОН-АСТРОЦИТАРНОЙ СЕТИ[1*]

Ю.А. Цыбина[1], М.И. Кривоносов[1], А.А. Заикин[1,2], А.Н. Горбань[1,3], С.Ю. Гордлеева[1]

[1]Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
[3] University College London, United Kingdom,
[4]University of Leicester, United Kingdom

В данной работе исследована роль кальций-зависимой астроцитарной модуляции синаптической передачи в процессах обработки информации в нейронной сети. Показано, что локальная пространственная синхронизация активности в нейронной сети, индуцированная астроцитом на характерных временах повышения внутриклеточной концентрации Ca^{2+}, может являться механизмом формирования кратковременной рабочей памяти в нейрон-астроцитарной сети.

Ключевые слова: астроцит, рабочая память, нейронная сеть

1. Введение

На сегодняшний день моделирование кратковременной памяти в биофизических моделях нейронных сетей является важным инструментом для исследования процессов нейропластичности и обучения. Большинство работ по данной тематике основано на применении теории Хебба [1]. Недавние экспериментальные и теоретические исследования [2] показали, что астроцит может действовать как интегратор активности нейронной сети, определяя уровень пространственно-временной когерентности сигнализации нейронных ансамблей. В частности, такая пространственно-временная интеграция, основанная на быстрых и локальных событиях активации небольших нейронных подсетей, взаимодействующих с астроцитом, приводит к долгосрочным опосредованным астроцитами изменениям синаптической функциональности нейронной сети. Активация астроцита может вызывать пространственную синхронизацию в нейронных ансамблях, определяемых морфологической территорией астроцита. В данной работе мы исследуем роль кальций-зависимой астроцитарной модуляции синаптической передачи в процессах формирования кратковременной рабочей памяти в нейронной сети.

2. Модель и архитектура нейрон-астроцитарной сети

Представленная в данной работе нейрон-астроцитарная сеть состоит из 2 взаимодействующих между собой слоев: первого слоя нейронной сети (размерность 79x79) и второго слоя сети диффузионно связанных астроцитов (размерность 26x26). Каждый астроцит взаимодействует с 16 нейронами (ансамбль 4x4) с перекрытием в одном ряду.

Динамика мембранного потенциала каждого нейрона в сети описывается моделью Ижикевича [3]. Нейроны связаны друг с другом возбуждающими синаптическими связями. Динамика внутриклеточной концентрации кальция в каждом астроците описывается моделью Уллаха [4]. Астроциты связаны друг с другом диффузионно по ионам Ca^{2+} и молекулам инозитолтрифосфата (IP_3).

Связь между нейронами и астроцитами организована следующим образом: в случае генерации потенциала действия на пресинаптическом нейроне концентрация нейротрансмиттера (глутамата) в соответствующем синапсе кратковременно увеличивается. При достаточном уровне синхронной активности нейронного ансамбля, взаимодействующего с данным астроцитом, в нем происходит IP_3 зависимое повышение внутриклеточной концентрации кальция. Достижение концентрации кальция в астроците определенного порога индуцирует высвобожде-

[1*] Agreements No. 074-02-2018-330(1), by RFBR projects No. 20-32-70081, 18-29-10068.

ние глиапередатчика из астроцита в синапсы, что приводит к изменению эффективности синаптической передачи в ансамбле синапсов, взаимодействующих с данным астроцитом [5].

3. Результаты

Для исследования влияния астроцит-индуцированной модуляции синаптической передачи на процессы обработки информации в нейронной сети, мы реализовали задачу фильтрации изображений в разработанной нейрон-астроцитарной сети. Процесс обучения нейрон-астроцитарной сети состоял из предъявления случайным образом черно-белых изображений с добавлением случайного 5% шума (рис. 1а-б). Во время обучения каждый астроцит отслеживал активность взаимодействующего с ним нейронного ансамбля. Затем, пока концентрация Ca^{2+} в астроцитах превышала порог, активировалась обратная связь из астроцитарной сети, модулирующая синаптическую передачу (рис. 1в). Астроцитарная сеть хранит целевое изображение на временах существования соответствующего кальциевого импульса. В качестве теста изображение предъявлялось с добавлением случайного 20% шума (рис. 1г). В ответ на тестовое предъявление нейронная сеть фильтровала изображение, устраняя шум (рис. 1д).

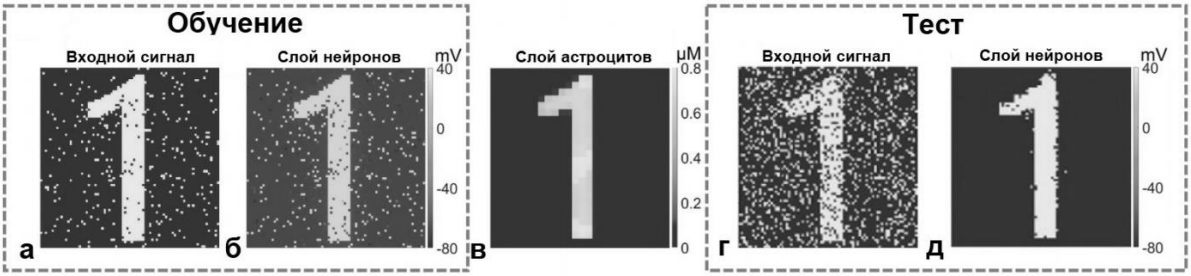


Рис. 1. Пример обучения и фильтрации изображения нейрон-астроцитарной сетью.

Литература

1. D.O. Hebb, The Organization of Behavior, John Wiley & Sons inc, 1949.
2. S.Y. Gordleeva, S.A. Lebedev, M.A. Rumyantseva, and V.B.Kazantsev, Astrocyte as a detector of synchronous events of a neural network, vol. 107(7) JETP Letters, 2018, pp. 440–445.
3. E. Izhikevich, Simple model of spiking neurons, vol. 14 IEEE transactions on neural networks, 2003, pp. 1569- 1572.
4. Ullah, G., Jung, P., Cornell-Bell, A., 2006. Anti-phase calcium oscillations in astrocytes via inositol (1, 4, 5)-trisphosphate regeneration. Cell Calcium 39, 197-208.
5. O. Kanakov, S. Gordleeva, A. Ermolaeva, S. Jalan, and A. Zaikin, Astrocyte-induced positive integrated information in neuron-astrocyte ensembles, vol. 99 PHYSICAL REVIEW E, 2019, pp. 012418.

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНОЛОГИЙ MPI-OPENMP[1*]

А.В. Чаплыгин

Институт вычислительной математики РАН

Гибридные модели, сочетающие в себе технологии передачи сообщений MPI для архитектур с распределенной памятью и многопоточной обработки данных OpenMP для архитектур с общей памятью, становятся все более популярными, поскольку современные высокопроизводительные вычислительные системы представляют собой набор многопроцессорных систем с общей памятью (вычислительных узлов), объединенных с помощью транспортной сети. Создание моделей, использующих эффективно ресурсы таких вычислительных систем, является актуальной задачей на сегодняшний день. Переносимость моделей на вычислительные системы различного типа и различных производителей во многом определяется правильным выбором ее програмной архитектуры, которая обеспечивала бы также гибкость и простоту поддержания кода. Целью данной работы является создание гибридной модели мелкой воды для эффективного использования на массивно-параллельных вычислительных системах.

В работе рассматривается модель мелкой воды, являющаяся блоком сигма-модели общей циркуляции океана INMOM (Institute of Numerical Mathematics Ocean Model), развиваемой в ИВМ РАН (Институт вычислительной математики имени Г. И. Марчука) [1]. Модель мелкой воды используется как в качестве блока модели INMOM, так и независимо, например, для расчетов прохождения волны цунами, приливов и ветрового нагона. Модель основана на системе нелинейных уравнений мелкой воды, которые формулируются в следующем виде:

$$\frac{\partial r_x r_y h u}{\partial t} + T_u(u,v) - F_u(u,v) - h r_x r_y l v + r_y h g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = RHS_u$$

$$\frac{\partial r_x r_y h v}{\partial t} + T_v(u,v) - F_v(u,v) + h r_x r_y l u + r_x h g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = RHS_v$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r_x r_y}\left(\frac{\partial u r_y h}{\partial x} + \frac{\partial v r_x h}{\partial y}\right) = 0$$

где u, v – компоненты скорости; r_x, r_y – метрические коэффициенты, возникающие при записи уравнений в произвольной ортогональной системе координат; l – параметр Кориолиса; g – ускорение свободного падения; ζ – отклонение уровня; $h = H + \zeta$ – эффективная глубина океана; H – глубина океана в состоянии покоя. Операторы вязкости F_u, F_v записываются как дивергенция тензора напряжений; операторы переноса T_u, T_vзаписываются в дивергентной форме. В общем виде в правых частях RHS_u, RHS_v рассчитываются градиенты атмосферного давления и напряжения трения ветра. На боковой поверхности для скорости задаются граничные условия непротекания и свободного скольжения. Дискретизация уравнений по пространству проводится со вторым порядком точности на разнесенной ‘C’-сетке по классификации Аракавы, для дискретизации по времени используется явная схема “чехарда со средней точкой”.

Была разработана новая программная архитектура для модели, основанная на принципе разделения обязанностей. Программная архитектура заключается в том, что весь программный комплекс разделяется на три уровня: самый низкий уровень, уровень «Ядер», содержит все подпрограммы, необходимые для вычисления нелинейных уравнений мелкой воды, так называемые ядра модели; самый высокий уровень, уровень «Алгоритмы», отвечает за порядок вызова ядер модели и задает схему работы модели по времени; уровень «Параллельные системы» выступает в качестве промежуточного уровня между первыми двумя и отвечает за параллельные методы и подходы, используемые в модели. Программные архитектуры такого типа позволяют выделить параллельные методы и подходы в обособленную часть программы с целью их адаптации для вычислительных систем различного типа и гибкой настройки программного комплекса на целевую вычислительную систему, без изменений частей программы, отвечающих за вычисления уравнений мелкой воды [4].

[1*] Работа выполнена в рамках научного проекта РФФИ № 20-31-90109.

В качестве основного метода распараллеливания в модели используется двумерный блочный метод декомпозиции области, суть которого в следующем: исходная расчетная область равномерно разбивается на прямоугольные блоки малого размера и каждому процессору ставятся в соответствие некоторое количество блоков, которые и формируют его расчётную подобласть. Такой подход имеет ряд преимуществ: возможность проводить балансировку нагрузки вычислений на процессоры и эффективная работа с кэш памятью. Также такой подход имеет и минус: затраты на копировании данных между блоками при синхронизации. Хотелось бы отметить, что из-за наличия в акваториях островов и берегов балансировка нагрузки вычислений на процессоры является особенно актуальной задачей. В качестве одного из таких методов был выбран метод балансировки нагрузки вычислений с использованием кривых Гильберта [2, 4].

В модели мелкой воды был реализован гибридный подход с использованием технологий MPI-OpenMP, при котором блоки из двумерного разбиения распределяются не по процессам, как в чистом MPI, а по потокам. Причем блоки сначала распределяются по MPI процессам с использованием метода балансировки нагрузки, а затем внутри MPI процесса распределяются по его доступным потокам, обеспечивая равномерную вычислительную нагрузку. Данный подход позволяет снизить нагрузку на сеть при синхронизации внерасчетных границ на большом количестве вычислительных узлов, потому что внутри узлов синхронизации не требуются из-за наличия общей памяти. В работе показано преимущество этого похода в сравнении с широко распространенным векторным подходом, в котором OpenMP используется только для распараллеливания двумерных циклов по подоблостям.

Было проведено тестирование гибридной модели мелкой воды, тестирование проводилось на кластере ИВМ РАН и суперкомпьютере МСЦ РАН (Межведомственный суперкомпьютерный центр). В работе было показано, что при выборе оптимального размера блока эффективная работа с кэш памятью компенсирует затраты на копировании данных между блоками, тем самым показана эффективность блочного подхода в сравнении с методом декомпозиции области без блочного разбиения. В работе было показано, что реализованная гибридная модель эффективнее широко распространенного векторного OpenMP подхода, показана эффективность гибридного подхода в сравнении с чистым MPI. Также была продемонстрирована эффективность метода балансировки нагрузки вычислений.

Литература

1. Дианский Н. А. Моделирование циркуляции океана и исследование его реакции на короткопериодные и долгопериодные атмосферные воздействия. М.: Физмалит, 2012.
2. Чаплыгин А.В., Дианский Н.А., Гусев А.В. Метод балансировки нагрузки вычислений с использованием кривых Гильберта применительно к параллельному алгоритму решения уравнений мелкой воды // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. С. 75-87.
3. John M. Dennis. Inverse Space-Filling Curve Partitioning of a Global Ocean Model. IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium, 2007.
4. Andrew R. Porter, Jeremy Appleyard, Mike Ashworth, Rupert W. Ford, Jason Holt, Hedong Liu and Graham D. Riley. Portable multi- and many-core performance for finite-difference or finite-element codes – application to the free-surface component of NEMO (NEMOLite2D 1.0). Geosci. Model Dev., 11, 3447–3464, 2018.

АЛГОРИТМ МАТРИЧНОГО УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ GPU, ОБЪЕДИНЕННЫХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫМИ КАНАЛАМИ СВЯЗИ

Е. Чой[1], В. П. Никольский[1,2], В. В. Стегайлов[1,2,3]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
[2]Объединенный институт высоких температур РАН
[3]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

В этой работе мы представляем оригинальный алгоритм параллельного умножения матрицы на матрицу только для графического процессора ($C = \alpha A * B + \beta C$) для серверов с несколькими графическими процессорами, подключенными через NVLink или Infinitty Fabric. Алгоритм реализован с использованием CUDA и HIP. Рассмотрены шаблоны передачи данных, перекрытие связи и вычислений, а также общая производительность алгоритма. Регулируя порядок вызова команд и размеры плиток, мы настраиваем непрерывную асинхронную передачу данных и выполнение ядра. Рассмотрены два случая: когда все данные хранятся в одном GPU и когда матрицы распределены между несколькими GPU. Эффективность выполнения этого нового алгоритма сравнивается с cuBLAS-XT из библиотеки Nvidia CUDA Toolkit.

Ключевые слова: параллельные вычисления, CUDA, HIP, GEMM, высокоскоростное соединение с графическим процессором

1. Введение

Недавний прогресс в области высокопроизводительных вычислительных систем показывает ведущую роль вычислений на GPU как одной из основных будущих тенденций технологического развития. Движущая сила - это высокая эффективность, необходимая для больших суперкомпьютеров, и замедление закона масштабирования Мура. Основным примером такого рода являются системы, разработанные в рамках проекта CORAL Summit и Sierra, которые решают проблемы проектирования с помощью гетерогенного подхода [1]. Ключевой особенностью узлов проекта CORAL является высокопроизводительное соединение NVLink 2.0, обеспечивающее бесшовную интеграцию GPU / CPU.

После появления вычислений GPGPU многие прикладные алгоритмы и программные коды были адаптированы для ускорения на графическом процессоре: коды молекулярной динамики, такие как GROMACS [2], коды электронной структуры, такие как Quantum Espresso [3, 4], PIC коды для моделирования плазмы, такие как PICADOR [5], коды астрофизической гидродинамики, такие как GPUPEGAS [6, 7]. Это ускорение основано на использовании графических процессоров для переноса определенных вычислительно-ресурсоемких частей кода из процессора. Наиболее широко используемой стратегией параллельного программирования является распараллеливание MPI между узлами и распараллеливание CUDA / OpenCL внутри каждого узла гибридного суперкомпьютера (например, см. [8, 9]). Эффективность такой загрузки ограничена полосой пропускания данных CPU-GPU, которая обычно существенно ограничивает уровень использования GPU. Передача данных CPU-GPU через NVLink помогает с автоматической загрузкой GPU. Однако соединение NVLink между ЦП и графическим процессором - уникальная функция, доступная только в процессорах IBM Power. Гораздо более распространенный тип серверов с несколькими графическими процессорами представлен серверами Nvidia DGX, которые основаны на 8-16 графических процессорах, соединенных между собой через NVLink и с процессорами с помощью соединений PCIe.

Высочайшие уровни вычислительной производительности графических процессоров и сверхвысокая пропускная способность и низкая задержка NVLink делают такие системы с несколькими графическими процессорами очень привлекательным вариантом для разработки новых высокопроизводительных вычислительных алгоритмов. Алгоритмы математического моделирования, которые выполняют все вычисления только внутри графических процессоров де-

монстрируют высокую эффективность. Несмотря на многообещающие возможности, до сих пор не так много программных пакетов для математического моделирования, которые используют высокоскоростные межсоединения графического процессора.

Большое количество задач математического моделирования полностью или частично основано на типовых вычислениях с использованием методов линейной алгебры, то есть на операциях с матрицами и векторами. Среди этих методов матричное умножение является наиболее затратным в вычислительном отношении. В этой работе мы описываем новый алгоритм параллельного умножения матриц только на GPU для систем с несколькими GPU с NVlink и аналогичной альтернативной технологией Infiniti Fabric.

Литература

1. W. A. Hanson, “The CORAL supercomputer systems,” IBM Journal of Research and Development, vol. 64, no. 3/4, pp. 1:1–1:10, 2020.
2. M. J. Abraham, T. Murtola, R. Schulz, S. P´all, J. C. Smith, B. Hess, and E. Lindahl, “GROMACS: High performance molecular simulations through multi-level parallelism from laptops to supercomputers,” SoftwareX, vol. 1-2, pp. 19 – 25, 2015.
3. F. Spiga and I. Girotto, “phiGEMM: A CPU-GPU library for porting Quantum ESPRESSO on hybrid systems,” in 2012 20th Euromicro International Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing, 2012, pp. 368–375.
4. J. Romero, E. Phillips, G. Ruetsch, M. Fatica, F. Spiga, and P. Giannozzi, “A performance study of Quantum ESPRESSO’s PWscf code on multicore and GPU systems,” in High Performance Computing Systems. Performance Modeling, Benchmarking, and Simulation, S. Jarvis, S. Wright, and S. Hammond, Eds. Cham: Springer International Publishing, 2018, pp. 67–87.
5. S. Bastrakov, R. Donchenko, A. Gonoskov, E. Efimenko, A. Malyshev, I. Meyerov, and I. Surmin, “Particle-in-cell plasma simulation on heterogeneous cluster systems,” Journal of Computational Science, vol. 3, no. 6, pp. 474 – 479, 2012.
6. I. Kulikov, “GPUPEGAS: A new GPU-accelerated hydrodynamic code for numerical simulations of interacting galaxies,” The Astrophysical Journal Supplement Series, vol. 214, no. 1, p. 12, sep 2014.
7. E. Akimova, V. Misilov, I. Kulikov, and I. Chernykh, “Hydrodynamical simulation of astrophysical flows: High-performance GPU implementation,” Journal of Physics: Conference Series, vol. 1336, p. 012014, nov 2019.
8. V. Stegailov, E. Dlinnova, T. Ismagilov, M. Khalilov, N. Kondratyuk, D. Makagon, A. Semenov, A. Simonov, G. Smirnov, and A. Timofeev, “Angara interconnect makes GPU-based desmos supercomputer an efficient tool for molecular dynamics calculations,” The International Journal of High Performance Computing Applications, vol. 33, no. 3, pp. 507–521, 2019.
9. V. P. Nikolskiy and V. V. Stegailov, “GPU acceleration of four-site water models in LAMMPS.” in Advances in Parallel Computing. Volume 36: Parallel Computing: Technology Trends. Proceedings of PARCO-2019, 2019, pp. 565–573.

РЕАЛИЗАЦИЯ СХЕМ НАУКАСТИНГА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

А.О. Шершакова[1], О.В. Калмыкова[2]

[1]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
[2]Федеральное государственное бюджетное учреждение
«Научно-производственное объединение «Тайфун»

Настоящая работа посвящена исследованию методов интеллектуального анализа данных и разработке эффективных алгоритмов их применения для реализации схем наукастинга. В ходе работы планируется построить ряд математических моделей классификации облачных ячеек по степени опасности формирования из них смерчей. В качестве основного языка разработки был выбран язык программирования Python. Работа имеет большое практическое значение в сфере прогнозирования погодных явлений. Ее новизна заключается в использовании современной методологии машинного обучения, взамен традиционного подхода к экстраполяции данных, широко применяемого в различных схемах наукастинга.

Ключевые слова: интеллектуальный анализ данных, машинное обучение, математическая модель, Python, наукастинг, смерчи, облачные ячейки.

1. Введение

Метеорологический термин наукастинг определяется как прогнозирование погодных явлений с местной детализацией любым методом, на период от настоящего времени до 6 часов вперед, включая подробное описание текущей погоды [1]. Наукастинг обычно применяется к прогнозу мезомасштабных или локальных явлений и дается на довольно короткий промежуток времени (несколько часов). Основной задачей наукастинга является выявление признаков образования конвективных облаков, генерирующих опасные явления, отслеживание их перемещения и прогнозирование возможного развития. Как правило, наукастинг оперирует в вероятностном пространстве – дается вероятностная оценка возникновения той или иной ситуации. Использование методов машинного обучения для наукастинга может способствовать выявлению скрытых особенностей и закономерностей протекания атмосферного процесса, учет которых в перспективе позволит повысить качество его прогнозирования. Подобный подход имеет явные преимущества по отношению к традиционному подходу простой экстраполяции данных, поэтому он и будет рассматриваться в настоящем докладе.

Выполнение работы планируется произвести в два этапа. На первом этапе, который относится к настоящему времени, требуется изучить математические алгоритмы, лежащие в основе современных методов интеллектуального анализа данных, и представить их обзор [2,3]. В частности, необходимо рассмотреть геометрические, вероятностные и логические методы, а также способы их реализации с помощью библиотек языка Python [4]. На втором этапе планируется применить полученные знания на практике для реализации конкретных схем наукастинга. С использованием специального подготовленного набора данных о смерчеобразующих ячейках в пределах черноморского региона требуется построить ряд математических моделей классификации облачных ячеек в режиме реального времени по степени опасности формирования из них смерчей. Поскольку работа в рамках первого этапа пока еще не завершена, в докладе будут представлены только те результаты, которые были получены на данный момент, а именно краткий обзор ранее упомянутых методов интеллектуального анализа данных, их отличительные черты, обзор библиотек языка Python, реализующих эти методы, примеры разработанных на базе этих библиотек программных средств подготовки данных для анализа.

Во втором разделе дано описание ранее упомянутого набора данных о смерчеобразующих ячейках, рассматривается более конкретная постановка имеющейся задачи. Третий раздел посвящен описанию ожидаемых результатов от выполнения работы.

2. Построение моделей

2.1. Исходные данные

Исходными данными для построения моделей являются:

- набор пространственных и временных данных с характеристиками облачных ячеек;
- перечень ячеек, из которых возникали смерчи.

Характеристики ячеек получены по результатам обработки спутниковых данных (со спутника Meteosat Second Generation – 10 (MSG3)). Спутник сканирует поверхность Земли каждые 15 минут. Характеристики ячеек содержатся в текстовых файлах. Ячейки идентифицируются по двум полям – порядковый номер ячейки в пределах текущего цикла сканирования и дата сканирования. Ячейки прослеживаются во времени – устанавливается связь между ячейками на различных циклах сканирования, выявляется номер и дата сканирования родителя (на предыдущем цикле), если он существует.

2.2. Постановка задачи

Предполагается исследовать возможные применения ряда математических моделей классификации облачных ячеек по степени опасности формирования из них смерчей на базе различных методов интеллектуального анализа данных (из перечисленного):

- геометрические методы (нейронные сети, линейная регрессия и т. д.);
- вероятностные методы (обобщенный метод моментов, наивный байесовский классификатор);
- логические методы (решающие деревья, ассоциативные правила).

Провести оценку эффективности моделей, выделить наиболее информативные модели.

3. Планируемые результаты

В ходе работы планируется построить распределения значений характеристик смерчеобразующих ячеек и их динамики, выделить наиболее часто встречаемые значения, провести анализ корреляции характеристик между собой. С использованием полученных результатов будут построены и применены различные модели (на базе разных методов интеллектуального анализа), классифицирующие ячейки по степени опасности возникновения из них смерчей. Модели в дальнейшем будут протестированы на независимом наборе данных. По результатам тестирования планируется выделить наиболее информативный модели. В перспективе при соответствующей доработке реализованная схема классификации может быть обобщена и на другие опасные явления.

Литература

1. Yong Wang. Guidelines for Nowcasting Techniques/ Yong Wang, Aitor Atencia [and others] / WMO. – November 2017. – 82 p.
2. Онлайн-курс по специализации «Машинное обучение и анализ данных» от Московского физико-технического института на платформе «Coursera».
3. Петер Флах. Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных. Москва: ДМК-Пресс, 2015. – 400 с.
4. Коэльо Луис Педро, Ричарт Вилли. Построение систем машинного обучения на языке Python. Москва: ДМК-Пресс, 2019. – 302 с.

СЦЕНАРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГИПЕРХАОСА В ТРЕХМЕРНОМ ОТОБРАЖЕНИИ МИРА[1*]

А.И. Шыхмамедов, Е.Ю. Каратецкая, А.О. Казаков, Н.В. Станкевич

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Ключевые слова: гиперхаотический аттрактор, гомоклиническая траектория, трехмерное отображение.

В данной статье изучаются сценарии возникновения хаотических и гиперхаотических аттракторов в трехмерном отображении Мира вида

$$\begin{cases} \bar{x} = y \\ \bar{y} = z \\ \bar{z} = Bx + Cy + Az - y^2 \end{cases}$$

где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ — фазовые переменные, а $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ — параметры системы. Заметим, что определитель матрицы Якоби равен параметру $\boldsymbol{B}$. В работах **[1]** и **[2]** было показано, что это отображение при определенных параметрах демонстрирует дискретный аттрактор Шильникова. Такие аттракторы возникают в соответствии со сценарием, предложенном в **[3, 1].** Основным этапом этого сценария является поглощение седло-фокусной неподвижной точки с двумерным неустойчивым многообразием, которая возникает после суперкритической бифуркации Неймарка-Сакера. В статье **[4]** этот сценарий был обобщен на системы, демонстрирующие вторичную бифуркацию Неймарка-Сакера с устойчивой периодической траекторией, возникающей внутри языка синхронизации. В соответствии с этим сценарием хаотический аттрактор сначала поглощает соответствующую периодическую седло-фокусную траекторию, которая возникает через вторичную бифуркацию Неймарка-Сакера, и возникает дискретный аттрактор типа Шильникова, содержащий эту периодическую траекторию. Также в работе **[4]** показано, что этот сценарий может приводить к рождению гиперхаотических аттракторов.

В этой работе мы показываем, что изложенный выше сценарий приводит к возникновению спирального хаоса и гиперхаоса в трехмерном отображении Мира. Были обнаружены различные типы дискретных аттракторов типа Шильникова. Также мы показываем, что в зависимости от соотношения количества седло-фокусных периодических орбит с двумерным неустойчивым многообразием, принадлежащих аттрактору, и седловых периодических орбит с одномерным неустойчивым многообразием, итоговые аттракторы типа Шильникова могут быть как хаотическими, так и гиперхаотическими.

Во второй части статьи мы показываем, что для некоторых значений параметров (например, для малого якобиана B) рассматриваемое отображение демонстрирует гиперхаотические аттракторы без седло-фокусных периодических траекторий. Мы предлагаем для этого случая новый сценарий. Ключевой особенностью этого сценария являются каскады бифуркаций удвоения периода периодических седловых траекторий, принадлежащих хаотическому аттрактору типа Эно, который в свою очередь возникает из устойчивой неподвижной точки в результате фейгембаумовского каскада с последующим каскадом гетероклинических бифуркаций слияния компонент. Заметим, что после каскада бифуркаций удвоения периода седловой траектории почти все периодические траектории, принадлежащие аттрактору, являются седловыми с двумерным неустойчивым многообразием, поэтому появившийся аттрактор является гиперхаотическим.

Литература

1. Gonchenko A. et al. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – Т. 24. – №. 08. – С. 1440005.

[1*] Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 19-71-10048.

2. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three- dimensional generalized Hénon maps //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2016. – Т. 337. – С. 43-57.
3. Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Shilnikov L. P. Towards Scenarios of Chaos Appearance in Three-Dimensional Maps, Nelin. – 2012.
4. Garashchuk I. R. et al. Hyperchaos and multistability in the model of two interacting microbubble contrast agents //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – Т. 29. – №. 6. – С. 063131.

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМИЗИРУЮЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

А.И. Эгамов

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского

Решается задача оптимального управления с критерием качества терминального типа. Математическое описание управляемого процесса колебаний тонкой струны сводится к решению интегро-дифференциального уравнения в частных производных с начальными и вторыми краевыми условиями. Такое специфичное управление подобрано для того, чтобы на протяжении всего воздействия выполнялось фазовое ограничение: интеграл по пространственной координате от квадрата решения равен единице. Кроме того, известно, что при такой специфике уравнения, его решение можно представить через решение стандартной линейной начально-краевой задачи гиперболического типа, что в свою очередь позволяет применить метод разделенных переменных. Показан переход от исходной распределенной задачи оптимизации к сосредоточенной оптимизационной задаче относительно коэффициентов Фурье решения линейной задачи. Решение исходной начально-краевой задачи сводится к счетной системе дифференциальных уравнений второго порядка, для которой имеет место переход к конечной усеченной системе дифференциальных уравнений первого порядка, решение которой, при увеличении размерности усеченной системы, можно получить сколь угодно близким к решению бесконечномерной системы. Дано описание алгоритма перебора управляющих коэффициентов для нахождения решения задачи оптимального управления усеченной системой и построения минимизирующей последовательности. Значение критерия качества для укороченной системы при увеличении размерности может быть получено сколь угодно близко к оптимальному.

Ключевые слова: вторая начально краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, фазовое ограничение, гиперболическое уравнение, бесконечномерная система дифференциальных уравнений, укороченная система, минимизирующая последовательность

1. Введение

Управляемые математические модели часто описываются с помощью систем с распределенными параметрами. Различные проблемы при работе с ними и возникающие при этом трудности представлены во введении монографии [1], в ней же приведена подробная библиография, связанная с данным направлением. Особую сложность таким задачам придают фазовые ограничения, наложенные на решение распределенных систем, например, на решение начально-краевых задач с частными производными, особенно, если в уравнении присутствуют частные производные второго порядка по обеим переменным (пространственной и временной). В ряде случаев, когда фазовое ограничение только одно, удается удовлетворить его с помощью управления с обратной связью, получая при этом нелинейные интегро-дифференциальные уравнения [2]. Преимущества этого подхода относительно других методов решения подобных задач описаны во введении [3]. Один из основных методов решения нелинейных задач состоит в сведении нелинейной задачи к известной линейной задаче, применительно к подобным уравнениям см. [4-6]. К подобному классу относится и уравнение, рассматриваемое в настоящей статье. Численные методы решения задач оптимального управления занимают важное место в теории оптимизации. Особую роль в ней играют методы, построенные на основе конечномерной аппроксимации посредством разложения соответствующих решений в ряд Фурье, например, [7,8]. В [9] представлен пример управляемого процесса нагревания стержня, в котором для поиска оптимального управления применен метод аналогичный представленному в настоящей статье, но там исходная задача сводится к линейной начально-краевой задаче для параболического типа. С целью решить бесконечномерную систему приходится сначала записать ее как бесконеч-

номерную систему первого порядка, а затем рассмотреть последовательность вспомогательных конечномерных задач достаточно большой размерности. Представлен алгоритм для вычисления оптимального значения критерия качества с достаточной точностью, в каждой из укороченных задач. Доказывается, что последовательность решений укороченных задач стремится к решению бесконечномерной задачи, воспользовавшись теорией, описанной в [10].

В настоящее время, задачи оптимального управления гиперболическими уравнениями второго порядка исследованы лишь частично, поэтому любое продвижение в сторону обоснования нового метода решения определенного класса таких задач или композиция известных методов, ранее не рассматривавшихся одновременно, применительно к некоторой оптимизационной задаче и предлагающих интуитивно понятное численное решение или алгоритм его нахождения, а также обосновывающее сходимость, соответствующих приближений, представляет собой определенный интерес и делает шаг вперед по направлению к их дальнейшему изучению и развитию общей теории.

2. Постановка основной начально-краевой задачи

Рассмотрим управляемый процесс колебаний тонкой однородной струны. На процесс колебаний струны осуществляется некое воздействие для достижения определённых целей. Запишем математическую постановку задачи.

На множестве $Q=(0,l)\times(0,T)$, $l>0,\ T>0$; найти функцию $y(x,t)$ – дважды непрерывно дифференцируемую по t и дважды непрерывно дифференцируемую по x; непрерывную дифференцируемую по t и непрерывно дифференцируемую по x в $\overline{Q}=[0,l]\times[0,T]$ – решение уравнения

$$y''_{tt}(x,t)=a^2y''_{xx}(x,t)+b(x)y(x,t)+u(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям второго рода

$$y'_x(0,t)=y'_x(l,t)=0, \tag{2}$$

и начальным

$$y(x,0)=\varphi(x),\quad \int_0^l\varphi^2(x)dx=1,\quad y'_t(x,0)=\psi(x),\quad \int_0^l\varphi(x)\psi(x)dx=0 \tag{3}$$

с условиями связи типа (2), наложенными на начальные функции. Здесь a – константа, $u(x,t)$ – некое управление с обратной связью. функции $\varphi(x)>0$, $\psi(x)$ задают начальные данные струны, $\varphi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$. Слагаемое $b(x)y(x,t)$ можно трактовать как член уравнения, отвечающий за взамодействие струны с внешней средой.

Пусть управление с обратной связью – непрерывная функция $u(x,t)$:

$$u(x,t)=-R[y]y(x,t)-2Q[y]y'_t(x,t), \tag{4}$$

где операторы $Q[y]:C^2(\overline{Q})\to C^1[0,T]$, $R[y]:C^2(\overline{Q})\to C[0,T]$.

3. Постановка оптимизационной задачи

Требуется за фиксированное время $T>0$ "оптимально выделить" функцию $Y(x)$ при условии, что $Y(x)$ непрерывно дифференциреума на отрезке $[0,l]$, причем

$$Y'_x(0)=Y'_x(l)=0. \tag{5}$$

При ограничениях, наложенных на решение и управляющую функцию $b(x)$:

$$\int_0^l y^2(x,t)dx=1 \tag{6}$$

и

$$\int_0^l b^2(x)dx \le K_1 , \qquad (7)$$

где K_1 – некоторая заданная положительная константа. Потребуем дополнительно условие на функцию $b(x)$: она удовлетворяет условиям (5). То есть, задача состоит в том, чтобы «приблизить» $y(x,T)$ к заданной функции $Y(x)$.

Математически формулировка требования оптимизационной задачи может быть описана так: при ограничениях (6), (7) минимизировать функционал терминального типа

$$J(b,T) = \int_0^l (y(x,T) - Y(x))^2 dx \to \min. \qquad (8)$$

Из [1] следует, что для выполнения условия (6) операторы с обратной связью $R[y]$, $Q[y]$ должны иметь вид:

$$R[y] = \int_0^l \left(b(x)y^2(x,t) - a^2 y_x'^2(x,t) + y_x'^2(x,t)\right)dx \equiv r(t), \qquad (9)$$

$Q[y] \equiv q(t)$ – решение задачи Коши

$$q_t'(t) + q^2(t) = r(t), \;\; q(0) = 0, \qquad (10)$$

где $y(x,t)$ – решение задачи (1)-(4) с операторами (9), (10).

4. Вспомогательная начально-краевая задача и ее связь с основной задачей

Пусть функция $z(x,t)$ – классическое решение гиперболического уравнения на множестве Q:

$$z_{tt}''(x,t) = a^2 z_{xx}''(x,t) + b(x)z(x,t), \qquad (11)$$

с граничными и начальными условиями

$$z_x'(0,t) = z_x'(l,t) = 0, \qquad z(x,0) = \varphi(x), \qquad z(x,0) = \varphi(x). \qquad (12)$$

Функции $b(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены выше. Известно [11], что существует единственное решение задачи (11), (12). При заявленной гладкости на начальные функции для нахождения решения задачи (11), (12) можно воспользоваться методом разделения переменных

Пусть $P(t) = \left(\int_0^l z^2(x,t)dx\right)^{1/2}$. Из [1] следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $P(t) \ne 0$ на отрезке $t \in [0,T]$. Решение нелинейной задачи (1)–(4) выражается через решение линейной задачи (11)–(12):

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{P(t)}. \qquad (13).$$

Учитывая (13), нетрудно видеть, что

$$Q[y] \equiv q(t) = \frac{P_t'(t)}{P(t)} = \frac{\int_0^l z(x,t) z_t'(x,t) dx}{\int_0^l z^2(x,t) dx}; \qquad R[y] \equiv r(t) = \frac{P_{tt}''(t)}{P(t)}. \qquad (14)$$

Эти формулы дают возможность выразить операторы $R[y]$, $Q[y]$, через решение задачи (11) и (12), постановка которой от них не зависит, то есть формулы (14) показывают, что постановка основной задачи корректна.

Обозначим $\| \eta(x) \|_2^2 = \int_0^l \eta^2(x) dx$, $\| \nu(x,t) \|_Q^2 = \int_0^T \int_0^l \nu^2(x,t) dx$.

Пусть $z_j(x,t)$ – решение задачи (11), (12) при $b(x) \equiv b_j(x)$, $j = \overline{1,2}$. Справедлива Теорема 2.

Теорема 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что из неравенства $\| b_2(x) - b_1(x) \|_2 < \delta$ следует $\| z_2(x,t) - z_1(x,t) \|_Q < \varepsilon$.

5. Приведение к бесконечномерной системе дифференциальных уравнений

Применяя метод разделения переменных к вспомогательной задаче, разложим функции $z(x,t)$, $b(x)$, $Y(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ по ортогональной системой косинусов, которая удовлетворяет условию (5):

$$\lambda_0 = 0, v_0(x) = 1; \;\; \lambda_n = \frac{\pi n}{l}; \; v_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l} \equiv \cos\lambda_n x, \;\; n = \overline{1,+\infty}.$$

И пусть $\xi_n(t)$, b_n, Y_n, φ_n, ψ_n – их коэффициенты Фурье соответственно. Для системы косинусов справедливы равенства: $\|v_0(x)\|_2^2 = l$, $\|v_i(x)\|_2^2 = \frac{l}{2}, i = \overline{1,+\infty}$.

Пользуясь стандартными преобразованиями, после подстановки разложения функций $z(x,t)$ и $b(x)$, в уравнение задачи (11), применяя формулу «произведение косинусов» и осуществляя некоторые преобразования, получим систему бесконечного числа дифференциальных уравнений

$$\xi_{0tt} = b_0 \xi_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \xi_k) \qquad (15)$$

$$\xi_{itt} = -\lambda_i^2 \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} (b_k \xi_{i-k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \xi_{i+k} + b_{i+k} \xi_k), \; i = \overline{1,+\infty} \qquad (16)$$

с начальными условиями $\xi_i(0) = \varphi_i$, $i = \overline{0,+\infty}$.

Можно переписать систему (15), (16) в матричном виде:

$$\xi_{tt} = C\xi, \;\; \xi_i(0) = \varphi_i, \; i = \overline{0,+\infty}, \qquad (17)$$

где C – стационарная матрица бесконечной размерности: $c_{00} = b_0$, $c_{0j} = \frac{1}{2} b_j$, при $j \neq 0$, $c_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i+j} + b_{|i-j|})$, при $i \neq j$, $c_{ii} = b_0 + \frac{1}{2} b_{2i} - \lambda_i^2$, при $i = j$.

Получена бесконечномерная линейная система дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

6. Укороченная задача

Для получения практического решения задачи оптимального управления необходимо понять: можно ли «укорачивать» бесконечную систему дифференциальных уравнений (17), делая из нее конечную ($N+1$)-мерную систему, принимая $\xi_j(t)$, $j = \overline{N+1, +\infty}$, равными тождественно нулю, чтобы найти коэффициенты Фурье с меньшими номерами и сравнить полученные решения с решением бесконечномерной системы. Обозначим решение задачи Коши укороченной задачи для задачи (17) через $\xi_i^N(t)$. Убрав все нулевые слагаемые, из правой части усеченной системы (17) видно, что в ней останутся только коэффициенты b_i с номерами от *0* до *2N* и, соответственно, коэффициенты b_i, начиная с (*2N+1*)-го номера, можно занулить. Поэтому для усеченной задачи достаточно использовать функцию $b(x) \equiv \breve{b}_N(x)$:

$$\breve{b}_N(x) = \sum_{n=0}^{2N} b_n v_n(x). \tag{18}$$

Заметим, что из равенства Парсеваля следует сходимость $\breve{b}_N(x) \to b(x)$ по квадратичной норме.

Один из способов получения численного решения задачи Коши для бесконечномерной системы дифференциальных уравнений второго порядка преобразовать ее в систему дифференциальных уравнений первого порядка, так как для нее известны свойства, при наличии которых имеется возможность перейти к последовательности конечных укороченных вспомогательных систем дифференциальных уравнений, решения которых стремятся к решению исходной бесконечномерной системы.

При сделанных предположениях $\xi_i^N(T) \to \xi_i(T)$, $i = \overline{0, +\infty}$, при $N \to +\infty$. Справедливость утверждения вытекает из общей теории решения бесконечномерных систем дифференциальных уравнений первого порядка [10].

7. Оптимизационная задача

Перепишем управление через управляющие параметры b_i, а критерий качества через $\xi_i(T)$. Нетрудно видеть, что ограничение на управляющую функцию (6) примет вид:

$$lb_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} b_i^2 \le K_1, \qquad lb_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{2N} b_i^2 \le K_1 \tag{19}$$

для исходной и укороченной задачи (см.(18)) соответственно. А критерий качества (8) с учетом (13) запишется как

$$J(b,T) = l\left(\frac{\xi_0(T)}{\| z(x,T) \|_2} - Y_0\right)^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{\xi_i(T)}{\| z(x,T) \|_2} - Y_i\right)^2 \to \min, \tag{20}$$

$$\| z(x,T) \|_2 = \sqrt{l\xi_0^2(T) + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{+\infty}\xi_i^2(T)}. \quad (21)$$

Таким образом для укороченной задачи критерий качества:

$$J^N(b,T) = l(\frac{\xi_0(T)}{\| z^N(x,T) \|_2} - Y_0)^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{N}(\frac{\xi_i(T)}{\| z^N(x,T) \|_2} - Y_i)^2 \to \min, \quad (22)$$

$$\| z^N(x,T) \|_2 = \sqrt{l\left(\xi_0^N(T)\right)^2 + \frac{l}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\xi_i^N(T)\right)^2} \quad (23)$$

Алгоритм нахождения минимизирующей последовательности и критерия качества (22), (23) в укороченной задачи аналогичен алгоритму нахождения, представленному в [9], в пределах второго множества (19) (очевидно, если управляющие коэффициенты удовлетворяют второму неравенству, занулив остальные, они будут удовлетворять и первому неравенству). При этом доказано, что значение критерия качества для укороченной системы при увеличении N может быть получено сколь угодно близко к оптимальному значению для (20), (21).

Заключение

В многих случаях легче придумать специфическое управление, чтобы фазовое ограничение выполнялось автоматически, и попробовать свести задачу к линейной, чем решать нелинейную, да еще при этом учитывать соблюдение фазового ограничения, если, конечно, такое специфическое управление удается реализовать на практике. В работе [2] дан метод подбора такого управления для некоторого класса фазовых ограничений. При этом решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения может существовать не только на конечном времени. Эту проверку существования проще проводить относительно решения вспомогательной линейной задачи, в данном случае достаточно выяснить не станет ли в конечный момент времени решение линейной задачи тождественным нулем. Таким образом, и метод подбора специфического управления, и алгоритм для нахождения минимизирующей последовательности имеют право на существование. А их объединение является одним их наиболее продвинутых вычислительных методов на данном этапе относительно численных методов решения подобных задач.

Литература

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. С.Пб.: Лань, 2017. 292с.
2. Бураго П.Н., Эгамов А.И. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.413-429
3. Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V. Optimal control of measure dynamics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation V.21, NN 1–3. April, 2015. PP 159-171. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.08.024.
4. Кузенков О.А., Эгамов А.И. Теорема существования решения одного класса интегро-дифференциальных уравнений и ее приложения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1997. С. 47-54.
5. Кузенков О.А. Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С.24-32.
6. Egamov A.I. The Existence and Uniqueness Theorem for Initial-Boundary Value Problem of the Same Class of Integro-Differential PDEs // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 315. Network Algorithms, Data Mining, and Applications. I.~Bychkov et al (eds). 2020. P.173-186. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37157-9_12

7. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 256с.
8. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1968. 143 с.
9. Эгамов А.И. Построение минимизирующей последовательности для задачи охлаждения заданных участков стержня с фазовым ограничением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, кн. 2. С. 193–210. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210.
10. Валеев К.Г. Жаутыков О.А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР. 1974. 416 с
11. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-ое издание. стреотип. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

ФОРМИРОВАНИЕ СОЛИТОНОВ САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ ПРИ ЦИКЛОТРОННО-РЕЗОНАНСНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИЗЛУЧЕНИЯ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ[1*]

Л.А. Юровский[1,2], А.С. Сергеев[1,2], Н.С. Гинзбург[1,2], И.В. Зотова[2], И.В. Железнов[2]

[1]Научно образовательный математический центр ННГУ
[2]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

По аналогии с известным процессом формирования солитонов самоиндуцированной прозрачности (СИП) при распространении оптического импульса через пассивную двухуровневую среду исследован эффект формирования микроволновых СИП-солитонов при циклотронно-резонансном взаимодействии излучения с первоначально прямолинейным электронным пучком. Показано, что с учетом релятивистской зависимости гирочастоты от энергии электронов система уравнений, описывающая такое взаимодействие, обладает устойчивыми солитоноподобными решениями. Амплитуда и длительность солитонов определяется их скоростью. В частном случае полученное решение сводится форме аналогичной для оптических СИП-солитонов.

Ключевые слова: Самоиндуцированная прозрачность (СИП), циклотронный резонанс, солитоны

1. Введение

В оптике хорошо известны эффекты формирования солитонов самоиндуцированной прозрачности (СИП-солитонов) [1,2] при распространении коротких (в масштабе времен релаксации) импульсов света в неинвертированной двухуровневой среде. Из-за нелинейных эффектов поглощающая среда становится прозрачной для интенсивного короткого светового импульса (2π импульса), который трансформируется в СИП-солитон. Механизм формирования солитона обусловлен тем, что энергия, поглощенная средой на переднем фронте импульса, полностью возвращается ему на заднем фронте за счет процесса индуцированного излучения.

Подобные эффекты могут наблюдаться в классической электронике, когда короткий электромагнитный импульс распространяется через изначально прямолинейный электронный пучок в условиях циклотронного резонанса [3,4]. В этом случае система уравнений, описывающих такое взаимодействие, обладает устойчивым солитоноподобным решением, которое при определенных условиях может быть сведено к виду оптического СИП-солитона.

Важно отметить, что описанные эффекты возникают только при учете релятивистской зависимости гирочастоты от энергии частицы. Эта зависимость существенна даже для нерелятивистских энергий, приобретаемых электронами в поле электромагнитного импульса. В таком предположении изначально прямолинейный электронный пучок можно рассматривать как нелинейную резонансную среду.

2. Солитоноподобные решения при взаимодействии с попутным прямолинейным электронным пучком

В предположении малых плотностей тока пучка и при достаточно большой отстройке фазовой скорости волны от скорости света, система уравнений, описывающая электронно-волновое взаимодействие, может быть сведена к виду (см. подробнее в [4]):

$$\frac{\partial a}{\partial Z} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = -p, \quad \frac{\partial p}{\partial Z} + ip(\delta + |p|^2) = a, \tag{1}$$

[1*] Работа поддержана Российским научным фондом (грант РНФ № 19-72-10119).

где Z и τ – нормированные координата и время соответственно, a – безразмерная амплитуда поля волны, $p \sim p_x + ip_y$ – комплексный безразмерный поперечный импульс частиц, δ – начальная расстройка циклотронного резонанса. Покажем далее, что система уравнений (1) имеет решение в виде солитона, т.е. локализованной волны, распространяющейся без изменения формы. Тогда, представляя огибающую поля и поперечный импульс частиц в виде:

$$a(Z,\tau) = a_0(\xi)e^{i\varphi(\xi)}, \quad p(Z,\tau) = p_0(\xi)e^{i\psi(\xi)}, \tag{2}$$

где $\xi = Z - U\tau$, U – скорость распространения солитона, преобразуем систему уравнений в частных производных (1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial a_0}{\partial \xi} = \frac{p_0}{s^2}\cos\chi, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \xi} = a_0\cos\chi, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \delta + \frac{C_0}{s^2} + p_0^2 - \left(\frac{a_0}{p_0} + \frac{p_0}{s^2 a_0}\right)\sin\chi, \tag{3}$$

где $\chi(\xi) = \varphi - \psi$ – разностная фаза, $s^2 = U - 1$. С учетом интегралов движения:

$$p_0 = sa_0, \quad \sin\chi = \sin\chi_0 + \frac{s^3}{4}a_0^2, \tag{4}$$

где $\sin\chi_0 = \frac{\delta s}{2} + \frac{C_0}{2s}$, солитоноподобное решение системы (3) может быть представлено как:

$$a_0(Z,\tau) = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{4}{s}\left(\sin\left(2\arctan\left[\frac{\tan(\chi_0/2)+Exp\{2(Z-U\tau)s^{-1}\cos\chi_0\}}{1+\tan(\chi_0/2)Exp\{2(Z-U\tau)s^{-1}\cos\chi_0\}}\right]\right) - \sin\chi_0\right)}. \tag{5}$$

Данное решение, при $\sin\chi_0 \to 0$ может быть записано в форме аналогичной для оптических СИП-солитонов [1]. Заметим, что решение (5) имеют смысл только для $U > 1$. В физических переменных это означает, что скорость солитона V_s удовлетворяет неравенству $V_0 < V_s < V_{gr}$, где V_0 и V_{gr} – продольная скорость электронов и групповая скорость волны соответственно. Таким образом, формирующиеся солитоны являются медленными по отношению к невозмущенной групповой скорости излучения. При этом согласно (5), амплитуда солитоноподобного решения: $a_{0,max} = (2/s)^{3/2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\chi_0}{2}\right)\right|$ растет, а его длительность по полувысоте уменьшается при $U \to 1$, т.е. при уменьшении отстройки его скорости от групповой скорости. Аналогичной зависимостью параметров от скорости обладают оптические солитоны.

В заключении отметим, что в общем случае амплитуда солитоноподобного решения зависит не только от его скорости, но и от параметра χ_0, определяющегося начальными условиями. Таким образом, для фиксированной скорости солитона амплитуда устойчивого решения может изменяться в зависимости от параметров системы, что может объяснять возникающий эффект самокомпрессии, приводящий к увеличению пиковой амплитуды импульса в процессе формирования солитона [4].

Литература

1. McCall S. L., Hahn E. L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys.Rev.Lett. 1967. V.18, No.21. P. 908–911. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.18.908.
2. Полуэктов И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С. Эффект самоиндуцированной прозрачности // Успехи физ. наук. 1974. Т.114, №1. С. 97–131. DOI: 10.3367/UFNr.0114.197409e.0097
3. Ginzburg N. S., Sergeev A. S., Zotova I.V . Self-Induced transparency and electromagnetic pulse compression in a plasma or an electron beam under cyclotron resonance conditions // Phys. Rev. Lett. 2010. V.105, No.26. Art. no. 265001. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.265001
4. Гинзбург Н. С., Зотова И. В., Сергеев А. С. Самоиндуцированная прозрачность, компрессия и остановка электромагнитных импульсов при взаимодействии с пучками невозбужденных классических осцилляторов // ЖЭТФ. 2011. Т.140, № 5. С. 890–899. https://doi.org/10.1134/S1063776111140147.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАРКОВОСТИ ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ[1*]

И.И. Юсипов[1], В.Д. Волокитин[1], И.Б. Мееров[1], С.В. Денисов[1,2]

[1]ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия
[2]Oslo Metropolitan University, Oslo, Norway

Стробоскопическая эволюция периодически модулируемой во времени открытой квантовой системы при некоторых условиях может быть описана эффективным Марковским мастер-уравнением с независимым от времени Флоке-Линдбладианом. Данное свойство называется марковостью. Определение марковости системы – очень сложная вычислительная задача. Оценка сложности экспоненциально растет от квадрата размера системы в гильбертовом пространстве. В данной работе будет продемонстрировано как классические нейронные сети, осуществляющие классификацию изображений, позволят определить границы марковости открытой квантовой системы на плоскости параметров модуляции системы.

Ключевые слова: открытые квантовые системы, марковость, классификация изображений

1. Введение

Положительно определённые отображения с сохранением следа (CPT – completely positive, trace preserving) и основное уравнение Линдблада являются двумя самыми распространенными методами описания динамики открытых квантовых систем, связь между которыми весьма нетривиальна [1-3] и продолжает активно изучаться. Вопрос о существовании эффективного, независимого от времени Флоке-Линдбладиана $\mathcal{L}_F$, который соответствует CPT-отображению стробоскопической эволюции системы, называется марковостью.

Определение марковости квантовой системы является вычислительно сложной задачей, которая сводится к выпуклому целочисленному полуопределенному программированию [4]. Количество положительно определенных матриц, на пересечении конусов которых ищется решение, экспоненциально растет с размерностью гильбертова пространства открытой квантовой системы. Для ускорения вычисления проверки на существование Марковости в данной работе будет использоваться классификация изображений при помощи классических моделей нейронных сетей.

2. Модель

Одним из наиболее популярных способов описания динамики открытых квантовых систем (взаимодействующих с окружающей средой) является основное уравнение Линдблада [1, 2]. Данное уравнение описывает эволюцию оператора матрицы плотности $\rho(t)$ с периодически-модулируемым оператором Линдблада (линдбладианом) $\mathcal{L}(t+T)=\mathcal{L}(t)$, где T – период модуляции. GKSL (Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad) форма [3] данного уравнения, гарантирующая сохранение следа и положительную определенность, выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\rho}=\mathcal{L}(t)\rho=-i[H(t),\rho]+\mathcal{D}(t)\rho,\\ \mathcal{D}(t)\rho=\sum_{k=1}^{K}\gamma_k\left(V_k\rho(t)V_k^{\dagger}-\frac{1}{2}\{V_k^{\dagger}V_k,\rho(t)\}\right),\end{gathered}\tag{1}$$

где первое слагаемое – коммутатор гамильтониана $H(t)$ и матрицы плотности – отвечает за унитарную эволюцию системы, а диссипативное слагаемое $\mathcal{D}(t)$ описывает взаимодействие си-

[1*] Работа выполнена при поддержке грантов РНФ №19-72-20086 (разработка и реализация алгоритма для сбора данных) и государственного задания № 0729-2020-0055 (проведение вычислительных экспериментов).

стемы с окружающей средой посредством набора из K диссипативных операторов V_k $(k = 1, \dots, K)$ со скоростью диссипации γ.

Рассматриваемая в работе открытая квантовая система описывается следующим гамильтонианом, моделирующим динамику двух кубитов:

$$H(t) = \frac{1}{2}(\sigma_1^z + \sigma_2^z) + \sigma_1^y \sigma_2^y + E\, cos(\omega t)\, \sigma_1^x, \tag{2}$$

где σ_j^x, σ_j^y, σ_j^z b σ_j^- – матрицы Паули [5] для j-го кубита, E – амплитуда модуляции, ω – частота. В данной системе имеется два канала диссипации, задающиеся соответствующими операторами:

$$V_k = \sigma_k^- \quad (k = 1,2). \tag{3}$$

Количество состояний рассматриваемой квантовой системы $N = 4$, размер гильбертова пространства N^2.

Уравнение (1) подразумевает существование стробоскопического оператора эволюции:

$$\mathcal{P} = \exp\left[\int_0^T \mathcal{L}(t)dt\right], \tag{4}$$

который сохраняет след и является положительно определенным отображением (CPT). В системе есть марковость в том случае, если существует Флоке-Линдбладиан [6] – независящий от времени оператор $\mathcal{L}_F$, соответствующий оператору $\mathcal{P}$ (4):

$$\mathcal{P} = \exp[T\mathcal{L}_F]. \tag{5}$$

Классический алгоритм определения существования $\mathcal{L}_F$ [3] сводится к задаче выпуклого полуопределённого целочисленного программирования по поиску целочисленного набора $\{m_c\}$:

$$\exists \mathcal{L}_F \leftrightarrow \exists \left\{ m_c : A_0 + \sum_{r=1}^{R} m_r A_r \geq 0 \right\}, \tag{6}$$

где матрицы A_i $(i = 0, \dots, R)$ имеют размерность $N^2 \times N^2$, R – количество комплексно-сопряженных пар собственных чисел оператора $\mathcal{P}$ (4). Максимальное количество таких матриц:

$$R_{max} = \frac{N^2}{2} - 1. \tag{7}$$

Детальный алгоритм получения матриц A_i описан в работе [3].

3. Классификация изображений

Вместо трудоемкого решения задачи выпуклого полуопределенного целочисленного программирования (6) в данной работе процесс определения марковости будет сведен к задаче классификации изображений с использованием глубоких нейронных сетей [7].

В качестве входных изображений для нейронных сетей будут использоваться матрицы оператора $\mathcal{P}$, полученные при помощи численного интегрирования на периоде методом Магнуса-Чебышева [8]. Все, используемые в данной работе нейронные сети, изначально разработанные для классификации изображений в базе ImageNet [9], в качестве входных данных ожидают RGB-изображения с минимальным размером 224 на 224 пикселя. Для этого, сначала оператор $\mathcal{P}$ перемасштабируется в размеры 224 на 224, затем вещественная компонента полученной матрицы кодирует R сигнал входного изображения, мнимая компонента – G сигнал, аргумент комплексного числа матрицы – B сигнал. При этом значения в каналах должны располагаться в диапазоне [0,1] и быть нормализованными с использованием вектора средних значений для каналов: $mean = [0.485, 0.456, 0406]$ и вектора стандартных отклонений $std = [0.229, 0.224, 0.225]$. Примеры матриц $\mathcal{P}$, транслируемых в виде изображений, для разных значений параметров модуляции открытой квантовой системы, представлены на Рис.1(б, в, г, д). На Рис.1а представлена карта режимов марковости в зависимости от параметров амплитуды модуляции E и частоты ω. Данное изображение было получено при помощи алгоритма, описанного в работе [3], и впоследствии будет использовано в качестве тестовой выборки для вычисления точности нейронных сетей на новых данных.

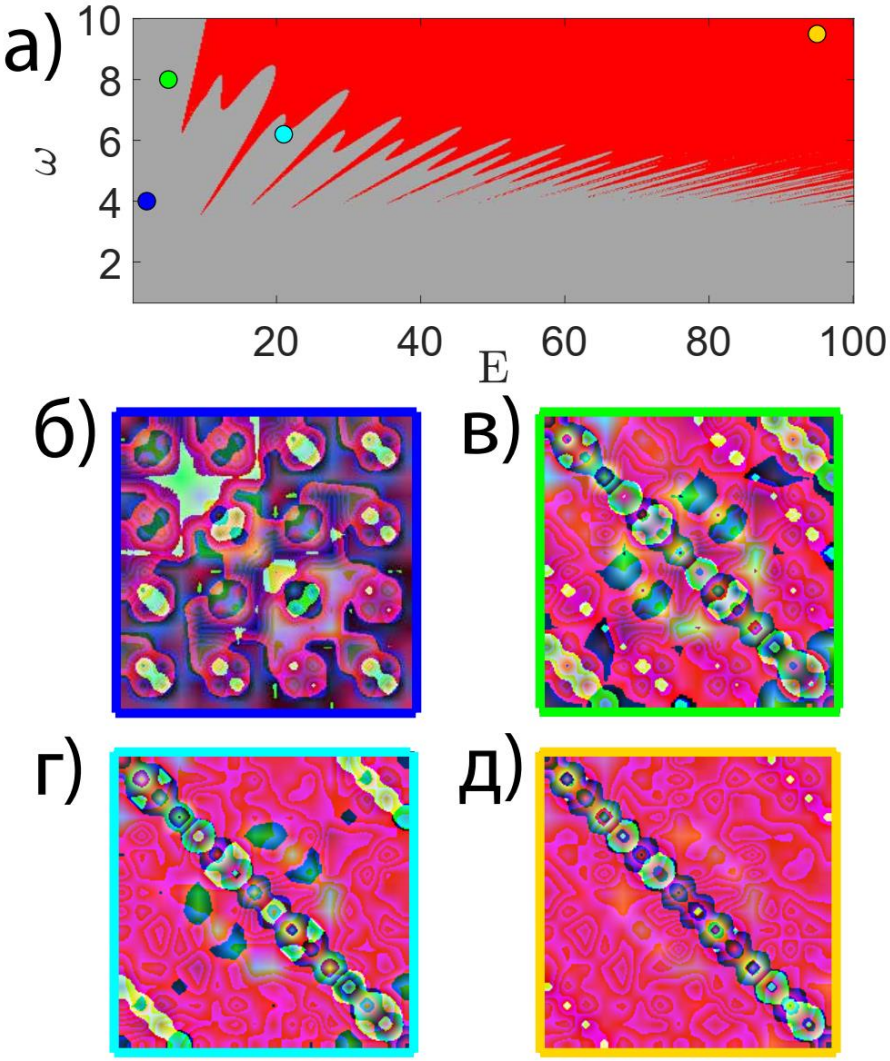


Рис. 1. (а) Карта режимов марковости в зависимости от параметров амплитуды модуляции E и частоты ω. Красный цвет – марковость есть, серый – марковости нет. Выделенным точкам на плоскости параметров соответствуют операторы $\mathcal{P}$ в виде изображений для нейронных сетей:
(б) – синяя точка $E = 2$, $\omega = 4$; (в) – зеленая точка $E = 5$, $\omega = 8$; (г) – бирюзовая точка $E = 21$, $\omega = 6.2$; (д) – оранжевая точка $E = 95$, $\omega = 9.5$

Число точек на плоскости параметров Рис.1а равно 500×500. В качестве тренировочных данных для нейронных сетей использовалась сетка параметров в том же диапазоне E и ω, но размерностью 50×50 (Рис.2а). Матрицы операторов $\mathcal{P}$ на данной плоскости параметров были разделены случайным образом на тренировочную (80%) и валидационную выборку (20%).

4. Результаты

В работе рассматривались следующие классические нейронные сети, применяемые для классификации изображений: AlexNet [10], Inception v3 [11], DenseNet [12], ResNet [13]. В каждой архитектуре количество выходных нейронов задавалось равным двум. В качестве функции ошибки использовалась кросс-энтропия. Метод Adam [14] использовался для стохастической оптимизации. В качестве тестовой выборки использовалась плоскость параметров, представленная на рис. 1а, значения на которой не совпадают с точками на плоскости параметров обучающей выборки (рис. 2а). Наилучшую точность продемонстрировала сеть ResNet [13] с числом слоев 152. На Рис.2б сплошными линиями показана точность классификации и ошибка на валидационной выборке, пунктирными линиями – на тренировочной выборке для данной нейронной сети. Максимальная достигнутая точность на валидационной выборке равна 97%,

также как и точность на тестовой выборке. На рис. 2в изображен результат работы данной нейронной сети на тестовой выборке. Наибольшая ошибка нейронной сети достигается на границах марковости (рис. 2г).

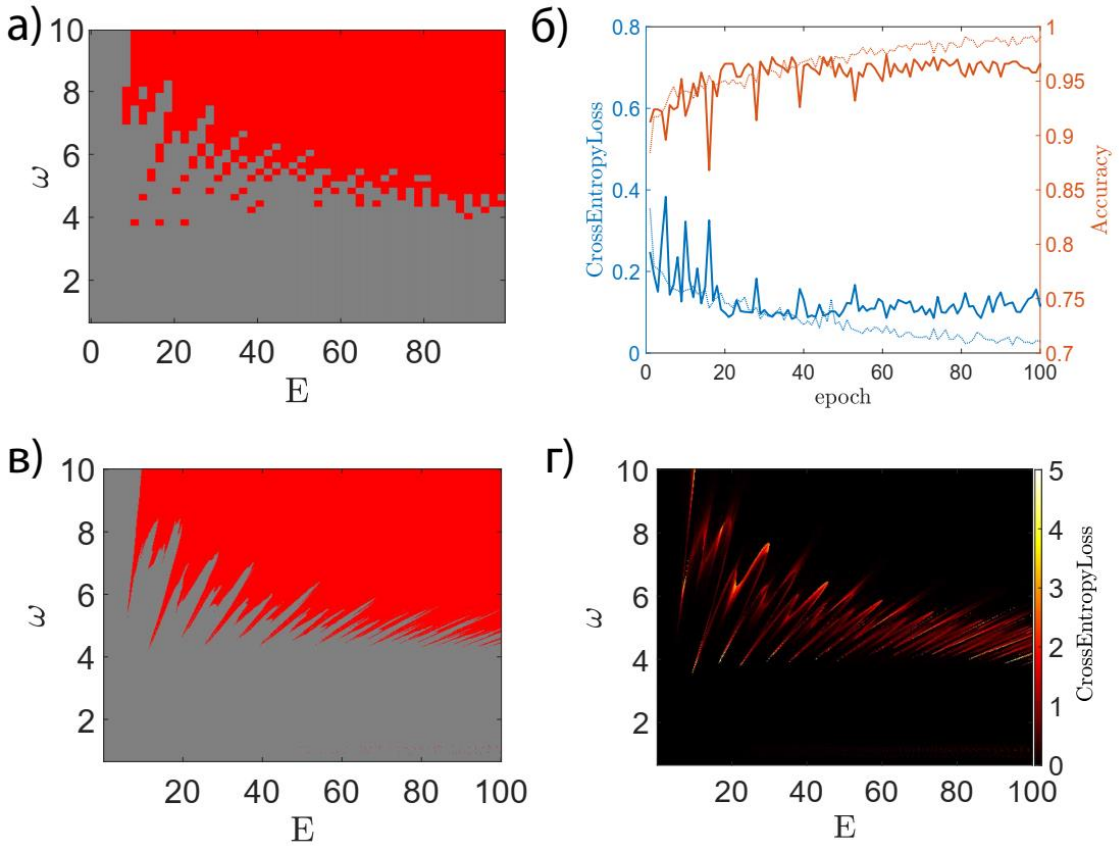


Рис. 2. (а) Карта режимов марковости в зависимости от параметров амплитуды модуляции E и частоты ω – тренировочные данные. Красный цвет – марковость есть, серый – марковости нет; (б) Точность классификации и ошибка на валидационной выборке (сплошные линии) и на тренировочной выборке (пунктирные) для нейронной сети ResNet; (в) Результат ResNet на тестовой выборке; (г) Ошибка ResNet на тестовой выборке

5. Выводы

Было продемонстрировано, как классические нейронные сети, осуществляющие классификацию изображений, позволяют определить границы марковости открытой квантовой системы, моделирующей динамику двух кубитов на плоскости параметров модуляции. Достигнута точность определения марковости в 97%.

Литература

1. Breuer, H. P., & Petruccione, F. (2002). The theory of open quantum systems. Oxford University Press.
2. Carmichael, H. (2009). An open systems approach to quantum optics: lectures presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991 (Vol. 18). Springer Science & Business Media.
3. Gorini, V., Kossakowski, A., & Sudarshan, E. C. G. (1976). Completely positive dynamical semigroups of N-level systems. Journal of Mathematical Physics, 17(5), 821-825.
4. Wolf, M. M., Eisert, J., Cubitt, T. S., & Cirac, J. I. (2008). Assessing non-Markovian quantum dynamics. Physical review letters, 101(15), 150402.
5. Nielsen, M. A., & Chuang, I. (2002). Quantum computation and quantum information.

6. Schnell, A., Eckardt, A., & Denisov, S. (2020). Is there a Floquet Lindbladian? Physical Review B, 101(10), 100301.
7. Rawat, W., & Wang, Z. (2017). Deep convolutional neural networks for image classification: A comprehensive review. Neural computation, 29(9), 2352-2449.
8. Laptyeva, T. V., Kozinov, E. A., Meyerov, I. B., Ivanchenko, M. V., Denisov, S. V., & Hänggi, P. (2016). Calculating Floquet states of large quantum systems: A parallelization strategy and its cluster implementation. Computer Physics Communications, 201, 85-94.
9. Deng, J., Dong, W., Socher, R., Li, L. J., Li, K., & Fei-Fei, L. (2009, June). Imagenet: A large-scale hierarchical image database. In 2009 IEEE conference on computer vision and pattern recognition (pp. 248-255). Ieee.
10. Krizhevsky, A. (2014). One weird trick for parallelizing convolutional neural networks. arXiv preprint arXiv:1404.5997.
11. Szegedy, C., Vanhoucke, V., Ioffe, S., Shlens, J., & Wojna, Z. (2016). Rethinking the inception architecture for computer vision. In Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition (pp. 2818-2826).
12. Huang, G., Liu, Z., Van Der Maaten, L., & Weinberger, K. Q. (2017). Densely connected convolutional networks. In Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition (pp. 4700-4708).
13. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. In Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition (pp. 770-778).
14. Kingma, D. P., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. arXiv preprint arXiv:1412.6980.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Kulikov, I. Chernykh, E. Vorobyov, V. Elbakan, L. Vshivkova
M2H3D code: moving mesh hydrodynamics by means AVX-2 technology 4

A.B. Mussina, S.S. Aubakirov, P. Trigo
Highly loaded event detection system architecture 10

D.E. Shaposhnikov, J.M. Makarova
Multicriteria problem of calculation of wireless system parameters using qualitative information on the decision maker's preference 16

A.A. Tsupak
Galerkin Method for Solving Hypersingular Integral Equation in the Problem of Acoustic Scattering from a Non-planar Smooth Screen 22

Н.Ю.Агафонова, С.З. Козлов
Об одном методе оптимизации биннинга кредитных данных 27

Н.Д. Агеев, О.И. Поддаева, П.С. Чурин, А.Н. Федосова
Численное моделирование ветрового резонанса моста на основе вихреразрешающих подходов 30

И.Н. Арапов, Ю.Н. Бухарев
Результаты верификации алгоритмов и моделей ПП ЛОГОС на примерах решения ряда задач удара стержневых металлических ударников по прочным преградам со скоростями до 2100 м/с 34

Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган
Локализация множества Парето в многокритериальных минимаксных задачах 36

Н.В. Барабаш, Т.А. Леванова, В.Н. Белых
Аттракторы-призраки в мигающей системе Лоренца и модели нейрона 42

Баркалов К.А., Усова М.А.
Сравнение методов решения задач глобальной оптимизации с разрывными функциями 48

П.Д. Басалин, А.Е. Тимофеев
Оболочка гибридной системы интеллектуальной поддержки процессов принятия решений в качестве средства формирования компетентности пользователя 51

Ю.В. Баханова
Гомоклинический хаос в системе Розенцвейга-Макартура 57

Бобровский А.А., Казаков А.О., Сафонов К.А.
О границе области существования аттрактора Лоренца в системе Шимицу-Мориока 60

М.И. Болотов, Л.А. Смирнов, Г.В. Осипов, А. Пиковский
Синхронизация химерных структур внешним периодическим воздействием в среде идентичных нелокально связанных осцилляторов 62

Д.И. Большаков, М.А. Мищенко, В.В. Матросов
Исследование аппаратной реализации нейроноподобного генератора с возбудимым и автоколебательным режимом 64

М.А. Боронина, В.А. Вшивков, И.Г. Черных
Модификация параллельного алгоритма расчета динамики плазмы в открытых магнитных ловушках 67

Бриккель Д.М., Ерофеев В.И.
Влияние поврежденности материала на параметры нелинейной изгибной волны, распространяющейся в балке 72

Е.С. Бубнова
Обобщённый H_2-консенсус в многоагентной системе с непрерывной линейной неидентичной динамикой 78

А.А. Бусалов
Нелинейная стационарная задача теории переноса в диффузионном приближении 81

Т.К. Бурдыгина, А.А. Бобровский, С.М. Малых
О структуре кривых гомоклинических бифуркаций в трехмерных системах, демонстрирующих аттракторы Шильникова 83

М.А. Быкова, С.А. Желтов, А.В. Филимонов
Решение квадратичной задачи о назначениях методом ветвей и границ 85

М.А. Быкова, Н.А. Хлопцев, С.В. Небайкин
Решение квадратичной задачи о назначениях с помощью эволюционно-генетического алгоритма 87

Е.П. Васильев, В.Д. Кустикова, В.Д. Волокитин, Е.А. Козинов, И.Б. Мееров
Анализ производительности вывода в сверточных нейронных сетях в системах с процессорами поколения Intel Cascade Lake 89

А.С. Васин, М.А. Мищенко
Исследование синхронизации двух нейронов с различным типом пачечной активности, связанных однонаправленной импульсной связью 97

В.Д. Волокитин, А.В. Линев, И.И. Юсипов, М.В. Иванченко, И.Б. Мееров, С.В. Денисов
Об одном алгоритме решения задачи «марковского погружения» для открытых квантовых систем 99

В.В. Воробьева, Е.М. Володин
Сезонные ретроспективные прогнозы, выполненные на основе климатической модели ИВМ РАН 105

В.П. Гергель, А.В. Иванов, С.В. Стрижак
К задаче выбора оптимальных параметров работы ВЭУ в составе ветропарка в поселке Тикси, Республика Саха 111

Е.В. Глазунова, А.А. Деулин, М.С. Куликов, Н.В. Старостин
Применение методов многомерной интерполяции при планировании сложных вычислительных экспериментов с суперкомпьютерными двойниками 116

С.В. Гонченко
Три типа динамического хаоса 120

С.В. Гонченко, О.В. Гордеева
О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с трансверсальным пересечением многообразий сложного седла 124

А.С. Гонченко, Е.А. Самылина
О дискретных гомоклинических аттракторах и сценариях их возникновения 130

С.Ю. Городецкий
Применение диагонального DIRECT-подобного метода глобальной оптимизации с ограничениями к задаче оптимальной настройки параметров регулятора по нелинейным критериям качества 136

А.В. Грезина
Математическое моделирование нелинейной динамики одной распределенной системы 142

В.З. Гринес, А.О. Казаков, Д.И. Минц
Построение однопараметрических семейств диффеоморфизмов двумерного тора с бифуркационными значениями параметра, отвечающими рождению нетривиальных базисных множеств различной размерности 148

А.А. Гудков , С.П. Сидоров
Алгоритм построения 3-монотонной регрессии на основе активного множества 150

Г.А. Гуйо
Применение нейросетевых методов для распознавания зашумленных сигналов 154

Е.В. Евстифеев, О.И. Москаленко
Применение локальных показателей Ляпунова для анализа характеристик перемежающейся обобщенной синхронизации 156

В.Е. Запевалов, А.С. Зуев, Е.С. Семенов
Анализ устойчивости работы терагерцовых гиротронов 158

А.И. Ивлева, С.В. Смирнов
Алгоритмы онлайн СППРдля выбора закона распределения положительно определенной случайной величины 163

Л.А. Игумнов, В.С. Метрикин, И.В. Никифорова
Математическое моделирование и численно-аналитическое исследование динамики многомерных сильно-нелинейных динамических систем 170

К.С. Исупов, В.С. Князьков, И.П. Бабешко, А.К. Крутиков
Параллельная CUDA-реализация разреженного матрично-векторного умножения многократной точности 175

А.О. Казаков, А.С. Пиковский, В.Г. Чигарев
Расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между аттрактором и репеллером 181

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина
Иерархия моделей квазистационарных электромагнитных полей 183

Е.Ю. Каратецкая, Е.В. Курыжов, Д.И. Минц, А.О. Казаков
Гиперхаос и дискретные аттракторы лоренцевского типа в отображении двух связанных парабол 189

Н.С. Ковалева, М.А. Мищенко, В.В. Матросов
Исследование емкости рабочей памяти нейронной сети 192

Е.А. Козинов
Опыт применения деревьев решения для ускорения алгоритма глобального поиска 194

В.Е. Кононова, В.Н. Дюпин
Модель нейронной среды противодействия коронавирусу 198

А.Г. Коротков
Динамика модели популяции клеток 200

А.Г. Коротков, Т.А. Леванова
Экстремальные события в модели нейронного ансамбля с мемристорной связью 204

А.Г. Коротков, Т.А. Леванова, М.А. Закс, Г.В. Осипов
Ансамбль возбуждающе связанных элементов Адлера 207

М.А. Кривов, Н.Г. Ирошников, А.А. Бутылин, А.Е. Филиппова, П.С. Иванов
Сравнение микроархитектур AMD Zen2 и Intel Cascade Lake на задаче моделирования деления клеток млекопитающих 210

О.А. Кузенков
Идентификация функции фитнеса для двухвозрастной популяционной модели методами классификации 216

О.А. Кузенков, Е.А. Рябова, А. Гарсиа Гарсиа, А.Ю. Дегтярёв
Моделирование вертикальных миграций зоопланктона на основе методов оптимального управления 222

А.С. Кулешов, Д.В. Соломина
Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о качении тяжелого однородного шара по поверхности вращения 228

Т.В. Куприянова, Д.И. Кислицын
Применение методов машинного обучения в строительных процессах 234

С.Р. Лаврова
Моделирование квазистационарных электрических полей 238

Л.М. Лерман, К.Н. Трифонов
Динамика обратимой гамильтоновой системы в окрестности симметричного гетероклинического контура 240

А.А. Лисин, И.Ю. Демин
Численное моделирование сфокусированных ультразвуковых волн в мягких биологических тканях с последующей генерацией сдвиговой волны 242

С.Ю. Маковкин, С.Ю. Гордлеева, М.В. Иванченко
Астроцитарно-индуцированная перемежающаяся синхронизация нейронов в малых ансамблях 247

С.М. Малых
О структуре расширенной границы области существования хаотических аттракторов в системе Рёсслера 251

В.Ф. Масягин
Применение энтропийного ограничителя наклонов для решения задач газовой динамики с использованием неявной схемы разрывного метода Галеркина 253

И.Г. Милешин
Метод ортогонального проектирования в моделировании глобальной электрической цепи в атмосфере Земли 259

С.В. Миронов, С.П. Сидоров
Об одной модификации модели триадного замыкания 261

Т.В. Моисеева, Н.Ю. Поляева
Поддержка принятия решений акторами на базе теории интерсубъективного управления: структурирование терминосистемы 265

К.Е. Морозов, А.Д. Морозов
О вырожденных резонансах в квазипериодических системах, близких к двумерным гамильтоновым 270

А.В. Мукосей, А.А. Третьяков, А.С. Семенов, Д.В. Макагон
Адаптивная маршрутизация в высокоскоростной сети Ангара второго поколения 273

В.О. Муняев, Л.А. Смирнов, В.А. Костин, Г.В. Осипов, А.С. Пиковский
Синхронные состояния в ансамблях глобально связанных фазовых осцилляторов с инерцией и шумом 275

А.В. Мухин
Оптимальная стабилизация ротора в системе электромагнитного подвеса с помощью нечетких моделей Takagi-Sugeno 278

В.В. Назаров, И.А. Исаев, И.Г. Лебедев
Умная энергетика в моделировании учебного класса 284

В.П. Никольский, В.В. Стегайлов
Проблемы переносимости и производительности мультиплатформенных молекулярно-динамических приложений для ГПУ 287

А.Н. Павлов
Методы флуктуационного анализа в исследованиях ЭЭГ 289

Е.А. Панова, В.Д. Волокитин, Е.С. Ефименко, И.Б. Мееров, А.А. Гоносков
Оптимизация спектрального метода для решения задачи острой фокусировки лазерного импульса 293

С.С. Петров
Методы суперкомпьютерного конечно-элементного моделирования динамики морского льда с вязко-пластичной реологией 299

Е.Н. Пицик
Исследование возрастных изменений сложности сенсомоторного ритма ЭЭГ на основе рекуррентного анализа 305

Ю.С. Половинкина, И.Ю. Шаршов
Разработка математической модели перемещения подвижной платформы дельта-робота для микроконтроллера 309

С.А. Проханов, М.В. Агафонцев, Д.П. Касымов, А.И. Фильков, В.В. Рейно, К.Е. Орлов
Использование нейронных сетей для детектирования и определения характеристик горящих частиц 315

М.М. Пугавко, О.В. Масленников, В.И. Некоркин
Пространственно-временная динамика сети дискретных моделей нейронов при контролируемом обучении 319

М.А. Рожнова, Д.В. Банденков, В.Б. Казанцев, Е.В. Панкратова
Возникновение хаотической динамики концентрации молекул внеклеточного матрикса мозга при изменяющемся во времени среднем уровне нейронной активности 321

Р.М. Розенталь, О.Б. Исаева, А.Г. Рожнев, Н.С. Гинзбург, И.В. Зотова, А.С. Сергеев
Хаос и гиперхаос в моделях гирорезонансных источников на основе винтовых гофрированных волноводов при введении запаздывающей обратной связи 325

В.П. Савельев, Н.И. Сутягина
Простые модели динамики малого бизнеса 329

Ю.Б. Савкин
Библиотека организации параллелизма уровня задач на системах с распределённой памятью 333

А.С. Самсонов, А.М. Пухов, И.Ю. Костюков
Подавление Черенковской неустойчивости в схеме численного решения уравнений Максвелла за счёт сверхсветовых волн 336

Я.А. Середа, Е.А. Новикова
Проблемы репрезентации данных в глубоких сверточных нейронных сетях на примере электрокардиограмм 338

Д.И. Силенко, И.Г. Лебедев
Совместное решение алгоритмами глобальной и локальной оптимизации, задач глобальной оптимизации 343

М.С. Синицина, С.Ю. Гордлеева, В.Б. Казанцев, Е.В. Панкратова
Возникновение бистабильности в динамике концентрации астроцитарного кальция 349

И.Н. Солдатов, С.Р. Лаврова
Обобщенная задача Кельвина 1880г. о колоннообразном вихре и точные решения линеаризованного уравнения Навье-Стокса 353

М.С. Сорокина
Применение множеств достижимости в оптимальном оценивании линейных нестационарных систем и 359

А.Е. Спивак, И.Ю. Демин
Supersonic Shear Imaging: описание модели и написание алгоритма реализации для работы с системой Verasonics 362

В.В. Стегайлов
Опыт создания и практического использования суперкомпьютеров на основе сети Ангара 367

А.С. Суркова, С.С. Скорынин
Повышение быстродействия объединенной модели для классификации текстовых данных 371

А.М. Федоткин
Численное исследование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками 375

М.А. Федоткин, Е.В. Пройдакова
Оптимизация динамики функционирования сети больниц с учётом ошибок результатов наблюдений 380

А.А. Федюков
Оценка области допустимых начальных состояний в случае наличия ошибки в измеряемом выходе системы 386

А.В. Филимонов, М.А. Быкова, Н.С. Скулкина
Применение эволюционно-генетического алгоритма к задаче одномерного раскроя 391

С.В. Фролов, А.Ю. Потлов, С.В. Синдеев, Т.А. Фролова
Модельные исследования гемодинамики и биомеханических свойств для оценки факторов риска при комплексном стентировании гигантской веретенообразной аневризмы 393

С.В. Фролов, А.Ю. Потлов, Т.А. Фролова
Моделирование процессов миграции фотонов и формирования интерференционных сигналов в системах оптической когерентной томографии для задач компрессионной эластографии 399

В.А. Ханадеев, О.И. Москаленко
Влияние шума на обобщенную синхронизацию в системах со сложной топологией аттрактора 405

Ю.А. Цыбина, М.И. Кривоносов, А.А. Заикин, А.Н. Горбань, С.Ю. Гордлеева
Кратковременная рабочая память в нейрон-астроцитарной сети 407

А.В. Чаплыгин
Гибридная модель мелкой воды с использованием технологий MPI-OpenMP 409

Е. Чой, В. П. Никольский, В. В. Стегайлов
Алгоритм матричного умножения для нескольких GPU, объединенных высокоскоростными каналами связи 411

А.О. Шершакова, О.В. Калмыкова
Реализация схем наукастинга с использованием методов интеллектуального анализа данных 413

А.И. Шыхмамедов, Е.Ю. Каратецкая, А.О. Казаков, Н.В. Станкевич
Сценарии возникновения гиперхаоса в трехмерном отображении Мира 415

А.И. Эгамов
Построение минимизирующей последовательности для оптимизационной задачи колебания струны с фазовым ограничением 417

Л.А. Юровский, А.С. Сергеев, Н.С. Гинзбург, И.В. Зотова, И.В. Железнов
Формирование солитонов самоиндуцированной прозрачности при циклотронно-резонансном взаимодействии излучения с прямолинейным электронным пучком 424

И.И. Юсипов, В.Д. Волокитин, И.Б. Мееров, С.В. Денисов
Классификация изображений в задаче определения марковости открытых квантовых систем 426

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Труды XX Международной конференции

Нижний Новгород, 23–27 ноября 2020 г.

Под ред. проф. В.П. Гергеля

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

Публикуется в авторской редакции

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.
603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23.