

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗИСОВ ГРЕБНЕРА

С.А. Малащенко

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: malashenko_sergei@yahoo.com

Модель Фитцхью-Нагумо является одной из классических моделей в биофизике и часто используется при описании распространения волн в активных биологических средах. В статье ставится задача определения частоты периодических решений исходной модели в зависимости от одного из параметров системы.

Введение

Модель Фитцхью-Нагумо является одной из классических моделей в биофизике и часто используется при описании распространения волн в активных биологических средах, таких как сердечная мышца, или мозговая ткань. Уравнения модели содержат две переменные v и w и имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \tau \left(v - \frac{v^3}{3} - w \right) + I_{ext}, \\ \tau \dot{w} &= v + a - bw.\end{aligned}\tag{1}$$

где τ, a, b, I_{ext} – параметры модели, которые при некоторых значениях допускают существование периодических решений [1]. В работе для таких решений строится зависимость частоты от некоторых параметров модели.

Метод решения

Общим методом поиска периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений является метод гармонического баланса [2]. Основная идея метода состоит в представлении решения уравнения в виде усеченного разложения в ряд Фурье $v(t) = \sum_{n=-N}^N c_k e^{-ik\omega t}$. Подстановку предполагаемого решения в исходное дифференциальное уравнение и последующее решение результирующей системы уравнений $p_0(c_1, \dots, c_N, \omega), \dots, p_N(c_1, \dots, c_N, \omega)$ относительно коэффициентов разложения $c_1, \dots, c_N$ и ω .

Исходную модель (1) преобразуем к дифференциальному уравнению относительно v получим

$$\ddot{v} + \tau \dot{v}(v^2 - 1) + \frac{b}{\tau} \dot{v} + v - b \left(v - \frac{v^3}{3} + I_{ext} \right) + a = 0.\tag{2}$$

Для упрощения рассмотрим случай, когда $a = 0, b = 0$. Решение представляем в виде $v(t) = \sum_{n=-3}^3 c_k e^{-ik\omega t}$, учитывая, что $\bar{c}_k = c_{-k}$. Получаем следующую систему уравнений относительно $c_1, c_{3i}, c_{3r}, \tau$ искомой частоты ω :

$$\begin{aligned}f_1 &= -c_1 \omega^2 - \tau c_1^2 c_{3i} \omega + c_1, \\ f_2 &= 2\tau c_1 c_{3r}^2 \omega + \tau c_1^2 c_{3r} \omega + 2\tau c_1 c_{3i}^2 \omega + \tau c_1^3 \omega - \tau c_1 \omega, \\ f_3 &= -9c_{3r} \omega^2 - 3\tau c_{3i} c_{3r}^2 \omega - 3\tau c_{3i}^3 \omega - 6\tau c_1^2 c_{3i} \omega + 3\tau c_{3i} \omega + c_{3r}, \\ f_4 &= 3\tau c_{3r}^3 \omega - 9c_{3i} \omega^2 + 3\tau c_{3i}^2 c_{3r} \omega + 6\tau c_1^2 c_{3r} \omega - 3\tau c_{3r} \omega + \tau c_1^3 \omega + c_{3i}.\end{aligned}\tag{3}$$

Для системы полиномиальных уравнений (3) построим базис Гребнера с lexic-упорядочиванием $\omega < \tau < c_1 < c_{3i} < c_{3r}$, такое упорядочивание позволит выделить зависимость частоты ω от $\tau, c_1, c_{3i}, c_{3r}$. Базис строится в параллельном режиме с использованием библиотеки parallelGBC [3]. В результате один из полиномов базиса Гребнера имеет следующий вид

$$3249\omega^{10} + (549\tau^2 - 6213)\omega^8 + (3754 - 567\tau^2)\omega^6 + (159\tau^2 - 842)\omega^4 + (53 - 13\tau^2)\omega^2 - 1 = 0. \quad (4)$$

Отметим что при любом $\tau > 0$ уравнение (4) относительно ω^2 имеет один действительный корень. Представим ω^2 в виде разложения по степеням τ^2 , коэффициенты вычислим, используя уравнение (4), тогда получим следующее разложение:

$$\omega^2 = 1 - \frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{512}a^6 + O(a^8). \quad (5)$$

Результаты расчетов

Построение базиса Гребнера для системы (3) занимает несколько секунд в однопроцессорном режиме, поэтому эффективность распараллеливания исследуется на системе алгебраических уравнений, полученной при $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Для такой, существенно большей, системы алгебраических уравнений ищется базис Гребнера в параллельном режиме с использованием библиотеки parallelGBC [3], которая реализует алгоритм [4] с использованием технологий OpenMP и MPI. В таблице приводятся времена расчетов базиса, а также демонстрируется эффективность распараллеливания.

Таблица 1. Результаты масштабируемости MPI-версии

Количество процессоров	Время расчета, сек	Эффективность, %
1	91.88	100
2	106.2	85
4	132.1	68
8	189.7	48

Заключение

В работе получена зависимость частоты периодического решения модели Фитцхью-Нагумо от параметра τ . Одним из этапов получения результата является вычисление базиса Гребнера, которое выполняется посредством библиотеки parallelGBC [3]. В среднем ускорение составляет 4.3 раза на 8 процессах, время работы уменьшено в среднем до 21 секунды для указанного числа процессов. Полученное ускорение неплохой результат при условии, что распараллелены не все этапы алгоритма, а только этап редуцирования системы уравнений.

Литература

1. Елькин Ю.Е. Автоволновые процессы // Математическая биология и биоинформатика. 2006. Т.1, № 1. С. 27-40.
2. Anderson C., Geer J. Power series expansions for the frequency and period of the limit cycle of the van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. 42. 1982. P. 678-693.
3. Neumann S. A modified parallel F4 algorithm for shared and distributed memory architectures, SCSS, 2013. 15. P. 70-80.
4. Faugere J.-Ch. A new efficient algorithm for computing Grobner bases (F4) // Journal of Pure and Applied Algebra. 1999. 139(1-3): P. 61-88.