

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет**

**Программа повышение конкурентоспособности
ННГУ им. Н.И. Лобачевского**

**Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций
в области суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных
вычислений»**

**Основная образовательная программа
01.03.03 – Механика и математическое моделирование**

**Учебное пособие по дисциплине
Численное моделирование и вычислительный эксперимент**

Яковлев Е.И., Игумнов Л.А.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА СУПЕР-ЭВМ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ

**Нижний Новгород
Нижегородский госуниверситет
2014**

УДК 515.14+519.6

ББК В152.4+В19

Я 47

Я 47. Яковлев, Е.И. Методы вычисления на супер-ЭВМ топологических характеристик триангулированных объектов: учебное пособие. Е.И. Яковлев, Л.А. Игумнов. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 85 с.

ISBN

Излагаются методы вычисления топологических характеристик полиэдров, в прикладных науках называемых триангулированными объектами. Основное внимание уделяется полиэдрам размерностей 1, 2 и 3, которые наиболее часто используются в компьютерном моделировании. Рассматриваются вычисление компонент связности и сильной связности, поиск особенностей и проверка критериев многообразия, проверка ориентируемости многообразий и задание ориентации на них, коллапсирование. Центральное место занимают геометрические алгоритмы для вычисления базисов групп гомологий.

Учебное пособие предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, изучающих и использующих вычислительную топологию.

ББК В213-8

ISBN

© Яковлев Е.И., Игумнов Л.А.

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

Оглавление

Оглавление	3
Введение	5
Топологические конструкции и алгоритмы	7
1. Симплексы и полиэдры	7
2. Группы гомологий.....	10
3. Связность	13
Алгоритм 3.1. Построение компонент связности	15
Алгоритм 3.2. Построение компонент сильной связности однородного полиэдра	18
4. Симплициальные схемы	19
5. Многообразия	20
6. Двумерные многообразия.....	23
Алгоритм 6.1. Нахождение особых вершин и ребер двумерного полиэдра...	24
7. Трехмерные многообразия	26
Алгоритм 7.1. Нахождение особых вершин трехмерного полиэдра в пространстве R^3	29
Алгоритм 7.2. Нахождение особых вершин произвольного трехмерного полиэдра	32
8. Ориентации	36
Алгоритм 8.1. Построение ориентации двумерного псевдомногообразия.....	40
9. Коллапсирование.....	43
Алгоритм 9.1. Коллапсирование m -мерного полиэдра	45
10. Гомологии графов	47
Алгоритм 10.1. Вычисление ранга и базиса группы гомологий графа	47
11. Вычисление базисов групп гомологий двумерных псевдомногообразий ...	50
Алгоритм 11.1. Вычисление базиса группы $H_2(P)$ для двумерного псевдомногообразия P	52

Алгоритм 11.2. Вычисление базиса группы $H_1(P)$ для двумерного псевдомногообразия P	56
12. Вычисление базисов групп гомологий разветвленных поверхностей	59
Алгоритм 12.1. Вычисление двумерных базисных циклов разветвленной поверхности	59
Алгоритм 12.2. Вычисление базиса одномерной группы гомологий разветвленной поверхности	66
13. Группы относительных гомологий	69
14. Вычисление базисов групп гомологий трехмерных полиэдров в пространстве R^3	72
Алгоритм 14.1. Вычисление базиса двумерной группы гомологий трехмерного полиэдра в R^3	75
Контрольные вопросы.....	78
Заключение.....	80
Литература	81

Введение

Первые вычислительные алгоритмы в топологии были созданы еще в 30-е годы 20 века. Они предназначались для вычисления групп гомологий симплициальных комплексов (целочисленных и по модулю 2) [2,9]. Также к этой тематике можно отнести алгоритм построения фундаментальных циклов графа [5]. Но действительно активное развитие вычислительной топологии началось только в 1990-х годах. Объясняется это, во-первых, развитием вычислительной техники, а во-вторых, появлением большого числа приложений. Среди последних отметим обнаружение и удаление топологического шума в компьютерных моделях [27,26,32,35,36,24], применения топологии в задачах оптимального размещения графов на поверхности, разводки печатных плат и размещения элементов на интегральной схеме, сегментации изображений и объёмов, визуализации и анализа данных [15], моделирования сенсорных сетей [20]. Несомненно, этот список неполон и в дальнейшем будет только расширяться.

Многие задачи компьютерной топологии являются весьма трудоемкими. Например, отмеченные выше классические алгоритмы вычисления групп гомологий и их базисов из [2], основаны на приведении матриц инцидентий к нормальной форме Смита. Эти матрицы могут состоять из сотен миллионов строк и столбцов, что предъявляет большие требования к ресурсам используемых для вычислений компьютеров. Алгоритмы, предназначенные для минимизации путей и циклов в заданных гомологических классах, имеют сложность, экспоненциальную по рангу группы гомологий [3,4,31,32,30]. Задача построения минимальных циклов, порождающих заданный базис одномерной группы гомологий, является NP-трудной [14].

Для преодоления указанных трудностей имеются два пути. С одной стороны, необходима разработка новых более эффективных алгоритмов, с другой стороны, желательно использование более мощных вычислительных средств, к которым относится имеющаяся в ННГУ супер-ЭВМ.

Отметим, что в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского научное направление по вычислительной топологии возникло в начале 2000-х годов при поддержке компании "Интел". Итоги этого этапа были подведены в книге [11]. С тех пор работа существенно продвинулась, было получено много новых результатов. Кроме того, компьютерная топология прочно вошла в программу обучения студентов магистратуры механико-математического факультета. Поэтому назрела необходимость в издании новых учебных пособий по данному предмету.

Всюду далее используются симплициальные группы гомологий с коэффициентами из поля Z_2 . Такой выбор объясняется тем, что для полиэдров из пространства R^3 группы целочисленных гомологий свободны, следовательно, в данном случае приведение по модулю 2 к существенной потере информации в большинстве задач не приводит. Вместе с тем, вычисления с коэффициентами из Z_2 заведомо являются наиболее экономными.

Теория излагается в максимально упрощенном и сжатом виде, причем только там, где это необходимо для корректной постановки задач, а также для описания и обоснования алгоритмов.

Рассмотрены методы вычисления компонент связности и сильной связности, поиска особенностей и проверки критериев многообразия, проверки ориентируемости многообразий и задания ориентации на них, коллапсирования. Центральное место занимают геометрические алгоритмы для вычисления базисов групп гомологий полиэдров размерностей 1, 2 и 3.

Знаний, выходящих за пределы стандартных курсов математического анализа и алгебры от читателя не требуется.

Топологические конструкции и алгоритмы

1. Симплексы и полиэдры

Один из основных способов решения топологических задач состоит в выполнении следующей последовательности действий:

- 1) перевод топологической задачи на язык алгебры,
- 2) решение полученной после первого шага алгебраической задачи,
- 3) топологическая интерпретация результатов второго шага.

Для реализации первого из указанных действий разработано много различных методов. В приложениях наиболее часто используется разбиение исследуемого объекта на элементарные части. Эти части устроены очень просто с точки зрения топологии. Например, в двумерном случае они представляют собой многоугольники, чаще всего имеющие 3 или 4 стороны. При этом вся сложность изучаемого объекта скрывается во взаимном расположении элементарных частей.

В данном пособии используется разбиение на симплексы. Оно называется триангуляцией объекта. В двумерном случае говорят также о задании треугольной сетки.

Определение 1.1. Пусть $v_0, v_1, \dots, v_n \in R^N$ и ассоциированная система векторов $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ линейно независима. Тогда мы будем говорить, что набор точек $v_0, v_1, \dots, v_n$ невырожден.

Определение 1.2. Если $v_0, v_1, \dots, v_n$ — невырожденный набор точек пространства R^N , то выпуклая оболочка

$$[v_0 v_1 \dots v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n s_i v_i \mid s_0, s_1, \dots, s_n \in [0, 1], \sum_{i=0}^n s_i = 1 \right\}$$

называется (прямолинейным) n -мерным симплексом или (короче) n -симплексом с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_n$. Точка $w = (v_0 + v_1 + \dots + v_n)/(n+1)$ считается барицентром симплекса $\sigma^n = [v_0 v_1 \dots v_n]$.

Легко видеть, что нульмерный симплекс $[v_0]$ состоит из одной точки v_0 , одномерный симплекс $[v_0 v_1]$ является отрезком, соединяющим вершины v_0 и v_1 , двумерный симплекс $[v_0 v_1 v_2]$ есть треугольник с вершинами v_0, v_1 и v_2 , а $[v_0 v_1 v_2 v_3]$ – тетраэдр.

Определение 1.3. Предположим, что $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ – невырожденный набор точек из R^N , k – целое неотрицательное число и $0 \leq k \leq n$. Тогда для любого набора индексов $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subset \{0, 1, \dots, n\}$ симплекс $\sigma^k = [v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_k}]$ называется k -мерной гранью n -симплекса $\sigma^n = [v_0 v_1 \dots v_n]$. При этом симплексы σ^k и σ^n считаются инцидентными друг другу.

Согласно определению 1.3 любая часть множества вершин симплекса $\sigma^n = [v_0 v_1 \dots v_n]$ определяет его грань, являющуюся симплексом, натянутым на выбранные вершины. В частности, каждая вершина симплекса представляет собой его нульмерную грань. Сам симплекс σ^n также не исключается, считаясь своей n -мерной гранью. Одномерные грани принято называть ребрами симплекса.

Определение 1.4. Пусть σ^m и σ^n – симплексы пространства R^N , имеющие размерности m и n соответственно. Мы будем говорить, что они пересекаются правильно, если имеет место один из двух следующих случаев:

- $\sigma^m \cap \sigma^n = \emptyset$
- $\sigma^m \cap \sigma^n = \sigma^k$ – k -мерная грань симплексов σ^m и σ^n , $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$.

Определение 1.5. Конечная совокупность K симплексов пространства R^N называется симплициальным комплексом, если она удовлетворяет двум условиям:

(K1) вместе с любым симплексом $\sigma^n \in K$ набор K содержит все его грани;

(K2) произвольные симплексы $\sigma^m, \sigma^n \in K$ пересекаются правильно.

Размерностью комплекса K считается наибольшая размерность всех его симплексов. Подмножество $K' \subset K$ называется подкомплексом комплекса K , если само является симплициальным комплексом.

Определение 1.6. Если K – n -мерный симплициальный комплекс в R^N , то объединение P всех его симплексов называется n -мерным полиэдром пространства R^N . При этом K называют симплициальным комплексом полиэдра P и полагают $K = K(P)$. Симплексы комплекса $K = K(P)$ называются симплексами полиэдра P .

Определение 1.7. Пусть P и P' – полиэдры, $K(P)$ и $K(P')$ – их симплициальные комплексы, причем $K(P')$ – подкомплекс комплекса $K(P)$. Тогда P' называется подполиэдром полиэдра P .

Таким образом, подполиэдр P' полиэдра P является его подмножеством, состоящим из целых симплексов.

Определение 1.8. Пусть P и Q – полиэдры пространства R^N . Мы будем говорить, что они пересекаются правильно, если имеет место один из двух следующих случаев:

- $P \cap Q = \emptyset$
- $P \cap Q$ – подполиэдр полиэдров P и Q .

Если полиэдры P и Q пересекаются правильно, то объединение $K(P) \cup K(Q)$ является симплициальным комплексом. Поэтому $P \cup Q$ – полиэдр.

Пусть P – полиэдр, а $K(P)$ – его симплициальный комплекс. Для любого n , $0 \leq n \leq \dim P$, множество его симплексов размерности n мы обозначаем символом $K^n(P)$.

Рассмотрим симплекс $\sigma^n \in K^n(P)$ и целое число i , $0 \leq i < n$. Тогда множество i -мерных симплексов, инцидентных $\sigma^n \in K^n(P)$, совпадает с $K^i(\sigma^n)$. Но в

большинстве вычислительных задач используется аналогичное множество для $i > n$. Поэтому введем следующее обозначение.

Определение 1.9. Пусть P – полиэдр, $0 \leq n < \dim P$ и $0 < j \leq \dim P - n$. Тогда множество всех $(n + j)$ -мерных симплексов комплекса $K(P)$, инцидентных симплексу $\sigma^n \in K^n(P)$, мы будем обозначать символом $\partial^{-j}(\sigma^n, P)$ и называть $(n + j)$ -мерным списком инциденций симплекса σ^n .

2. Группы гомологий

Для того, чтобы различать полиэдры, не являющиеся топологически эквивалентными, используются инварианты. Их построение состоит в том, чтобы каждому полиэдру поставить в соответствие алгебраические объекты (числа, группы, модули, векторные пространства, многочлены и т.д.) таким образом, чтобы для эквивалентных полиэдров соответствующие объекты либо совпадали (числа и многочлены), либо были изоморфны (группы, модули, векторные пространства).

Простейшим топологическим инвариантом является характеристика Эйлера. Пусть P – полиэдр размерности m . Для каждого $i = 0, 1, \dots, m$ символом k_i обозначим количество i -мерных симплексов комплекса $K(P)$. Тогда число $\chi(P) = \sum_{i=0}^m (-1)^i k_i$ называется характеристикой Эйлера полиэдра P . Но этот инвариант в данном пособии подробно изучаться не будет по двум причинам. Во-первых, способ его вычисления очевиден. А во-вторых, характеристика Эйлера вторична по отношению к группам гомологий, то есть может быть выражена через ранги этих групп.

При первом знакомстве построение групп гомологий может показаться абстрактным и достаточно сложным для понимания. Но именно эти группы наиболее интересны с точки зрения вычислительной топологии. Дело в том, что с

одной стороны они представляют собой очень мощный инструмент решения топологических задач, а с другой стороны всегда эффективно вычислимы.

Определение 2.1. Пусть $K(P)$ – симплициальный комплекс полиэдра $P \subset R^N$ и $K^n(P)$ – множество его симплексов размерности n , $0 \leq n \leq \dim P$. Тогда любое подмножество $c = \{\sigma_1^n, \dots, \sigma_p^n\} \subset K^n(P)$ называется n -мерной цепью полиэдра P . Совокупность всех его n -цепей обозначается символом $C_n(P)$.

Определение 2.2. Для двух n -цепей $c, c' \in C_n(P)$ положим

$$c + c' = (c \cup c') \setminus (c \cap c').$$

Этим определена n -цепь $c + c' \in C_n(P)$, которая считается суммой цепей c и c' .

Введенная операция сложения n -цепей превращает множество $C_n(P)$ в абелеву группу, нейтральным элементом которой является пустая цепь $0 = \emptyset$, а противоположным элементом для цепи $c \in C_n(P)$ является она сама, то есть $-c = c$. Далее мы не будем различать симплекс σ^n и состоящую из него цепь $\{\sigma^n\}$. При этом $\{\sigma_1^n, \dots, \sigma_p^n\} = \{\sigma_1^n\} + \dots + \{\sigma_p^n\} = \sigma_1^n + \dots + \sigma_p^n$.

Если определить умножение элементов группы $C_n(P)$ на элементы поля Z_2 , полагая $c \cdot 0 = 0$ и $c \cdot 1 = c$, то $C_n(P)$ превратится в векторное пространство над Z_2 .

Определение 2.3. Границей n -мерного симплекса $\sigma^n \in K(P)$ считается цепь $\partial\sigma^n$, образованная всеми его $(n-1)$ -мерными гранями. Границей цепи $c = \{\sigma_1^n, \dots, \sigma_p^n\} = \sigma_1^n + \dots + \sigma_p^n$ называется сумма $\partial c = \partial\sigma_1^n + \dots + \partial\sigma_p^n$.

Определение 2.4. Цепь $c \in C_n(P)$, у которой граница равна нулю, называется циклом. Множество всех n -мерных циклов полиэдра P обозначается символом $Z_n(P)$.

Определение 2.5. Цепь $c \in C_n(P)$ называют n -мерной границей, если найдется такая $(n+1)$ -цепь $c' \in C_{n+1}(P)$, что $\partial c' = c$. Совокупность n -мерных границ полиэдра P принято обозначать символом $B_n(P)$.

По построению $Z_n(P)$ и $B_n(P)$ – подгруппы группы цепей $C_n(P)$. Более того, группа n -мерных границ $B_n(P)$ является подгруппой группы n -циклов $Z_n(P)$. Поэтому имеет смысл следующее фундаментальное определение.

Определение 2.6. Фактор-группа $H_n(P) = Z_n(P)/B_n(P)$ группы n -мерных циклов полиэдра P по подгруппе n -мерных границ называется его n -мерной группой гомологий.

Очевидно, что $Z_n(P)$ – линейное подпространство пространства $C_n(P)$ над Z_2 , а $B_n(P)$ – линейное подпространство пространства $Z_n(P)$. Поэтому группа гомологий $H_n(P) = Z_n(P)/B_n(P)$ является и векторным пространством над полем Z_2 .

Если $z \in Z_n(P)$, то смежный класс $z + B_n(P)$ называется гомологическим классом цикла z и обозначается символом $[z]$. При этом любые два цикла из $[z]$ считаются гомологичными.

Набор гомологических классов $[z_1], \dots, [z_r] \in H_n(P)$ является базисом группы (пространства) $H_n(P)$, если выполняется условия:

- 1) $[z_{i_1}] + \dots + [z_{i_k}] \neq 0 \quad \forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, r\};$
- 2) $\forall [z] \in H_n(P) \exists i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, r\}$ такие, что $[z] = [z_{i_1}] + \dots + [z_{i_k}].$

Определение 2.7. Циклы $z_1, \dots, z_r \in Z_n(P)$, для которых гомологические классы $[z_1], \dots, [z_r]$ образуют базис группы $H_n(P)$, мы будем называть n -мерными базисными циклами полиэдра P .

Определение 2.8. Пусть P и Q – топологические пространства, $f : P \rightarrow Q$ и $g : P \rightarrow Q$ непрерывные отображения. Если найдется непрерывное отображение $H : P \times [0, 1] \rightarrow Q$, удовлетворяющее равенствам $H(w, 0) = f(w)$ и $H(w, 1) = g(w)$ для всех $w \in P$, то отображения f и g называются гомотопными, а отображение H – гомотопией связывающей f и g . При этом гомотопность обозначают символом $f \sim g$.

Определение 2.9. Пусть P и Q – топологические пространства, $f: P \rightarrow Q$ и $g: Q \rightarrow P$ непрерывные отображения, для которых $g \circ f \sim id_P$ и $f \circ g \sim id_Q$, где $id_P: P \rightarrow P$ и $id_Q: Q \rightarrow Q$ – тождественные отображения P и Q на себя. Тогда пространства P и Q считаются гомотопически эквивалентными, а отображения f и g называются взаимно обратными гомотопическими эквивалентностями. При этом гомотопическую эквивалентность обозначают символом $P \sim Q$.

Имеет место [8,11]

Теорема 2.1. Если полиэдры P и Q гомотопически эквивалентны, то $H_n(P) \cong H_n(Q)$ для всех $n > 0$.

Утверждение теоремы 2.1 называют гомотопической инвариантностью групп гомологий. Из определения 2.9 следует, что гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны. Поэтому согласно теореме 2.1 группы гомологий гомеоморфных полиэдров также изоморфны для всех размерностей.

Определение 2.10. Рассмотрим случай, когда Q – подполиэдр полиэдра P , а $i: Q \rightarrow P$ – включение. Тогда $C_n(Q) \subset C_n(P)$ и потому определено включение $i: C_n(Q) \rightarrow C_n(P)$. Так как $\partial(i(c)) = i(\partial c)$ для всех цепей $c \in C_n(Q)$, то формула $i_*([c]) = [i(c)]$ корректно определяет гомоморфизм $i_*: H_n(Q) \rightarrow H_n(P)$. Договоримся называть i_* гомоморфизмом, индуцированным включением $i: Q \rightarrow P$.

Теорема 2.2. Если Q – подполиэдр полиэдра P , а включение $i: Q \rightarrow P$ является гомотопической эквивалентностью, то индуцированный гомоморфизм $i_*: H_n(Q) \rightarrow H_n(P)$ является изоморфизмом.

3. Связность

Связность является достаточно простым топологическим свойством. Но, как мы увидим ниже, она также может выражена в терминах групп гомологий. А

именно, согласно теоремам 3.1 и 3.2 количество компонент связности полиэдра P совпадает с рангом группы нульмерных гомологий $H_0(P)$.

Кроме того, в данном разделе мы изучим понятие сильной связности, имеющее важное значение для различных задач вычислительной топологии, а также научимся вычислять компоненты сильной связности однородного полиэдра.

Определение 3.1. Пусть $u_0, \dots, u_p$ – последовательность вершин полиэдра P , причем для каждого $i = 1, \dots, p$ одномерный симплекс (ребро) $[u_{i-1}u_i]$ принадлежит комплексу $K(P)$. Тогда последовательность ребер $x = \{[u_0u_1], \dots, [u_{p-1}u_p]\}$ называется (реберным) путем в P , вершина u_0 – началом пути x , а вершина u_p – его концом. При этом говорят, что путь x идет из u_0 в u_p или (если направление несущественно) соединяет эти вершины. Путь $\{[u_pu_{p-1}], \dots, [u_1u_0]\}$ считается обратным для x и обозначается символом $-x$.

По определению путь $x = \{[u_0u_1], \dots, [u_{p-1}u_p]\}$ является одномерной цепью. Поэтому имеет смысл равенство $x = [u_0u_1] + \dots + [u_{p-1}u_p]$. Но для произвольных путей $x = [u_0u_1] + \dots + [u_{p-1}u_p]$ и $y = [v_0v_1] + \dots + [v_{q-1}v_q]$ цепь $x + y$ является путем тогда и только тогда, когда $u_p = v_0$.

Определение 3.2. Полиэдр P называется связным, если для любых его различных вершин $u, v \in K^0(P)$ существует соединяющий их путь $x \in C_1(P)$.

Очевидно, что любой симплекс является связным полиэдром.

Для произвольной вершины $u \in K^0(P)$ обозначим символом $P(u)$ объединение всех симплексов полиэдра P , у которых хотя бы одну вершину можно соединить путем с u . При этом $P(u)$ – максимальный по включению связный подполиэдр полиэдра P , содержащий вершину u . Кроме того, для любых вершин u и v подполиэдры $P(u)$ и $P(v)$ либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому полиэдр P представляет собой объединение попарно непересекающихся максимальных связных подполиэдров $P_1, \dots, P_l$.

Определение 3.3. Подполиэдры $P_1, \dots, P_l$ называются компонентами связности полиэдра P .

Теорема 3.1. Если $P_1, \dots, P_l$ – компоненты связности полиэдра P , то для всех n имеет место изоморфизм

$$H_n(P) \cong H_n(P_1) \times \dots \times H_n(P_l).$$

Доказательство. Для любых $c \in C_n(P)$ и $c_i \in C_n(P_i)$, $i = 1, \dots, l$, положим

$$f_i(c) = c \cap K^n(P_i), \quad f(c) = (f_1(c), \dots, f_l(c)) \quad \text{и} \quad g(c_1, \dots, c_l) = c_1 + \dots + c_l.$$

Этим определены взаимно обратные изоморфизмы $f : C_n(P) \rightarrow C_n(P_1) \times \dots \times C_n(P_l)$ и $g : C_n(P_1) \times \dots \times C_n(P_l) \rightarrow C_n(P)$. Поскольку $f_i \circ \partial = \partial \circ f_i$ и $g \circ \partial = \partial \circ g$, то формулы $f_*([c]) = ([f_1(c)], \dots, [f_l(c)])$ и $g_*([c_1], \dots, [c_l]) = [g(c)]$ определяют изоморфизмы $f_* : H_n(P) \rightarrow H_n(P_1) \times \dots \times H_n(P_l)$ и $g_* : H_n(P_1) \times \dots \times H_n(P_l) \rightarrow H_n(P)$. $\square$

Для произвольного конечного множества A символом $\text{card } A$ договоримся обозначать количество его элементов.

Теорема 3.2. Для любого связного непустого полиэдра P имеет место изоморфизм $H_0(P) \cong \mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Очевидно $Z_0(P) = C_0(P)$. Кроме того, набор вершин $c = v_1, \dots, v_q$ является границей тогда и только тогда, когда число q чётно. Таким образом $B_0(P) = \{c \in C_0(P) \mid \text{card } c \in 2\mathbb{Z}\}$. Следовательно, $Z_0(P)/B_0(P) \cong \mathbb{Z}_2$. $\square$

Рассмотрим метод нахождения компонент связности.

Алгоритм 3.1. Построение компонент связности

Вход: Список вершин $V = K^0(P)$ и списки $\partial^{-n}(v, P)$ для всех $v \in V$ и $n = 1, \dots, m$.

Выход: Натуральное число l и списки $K^n(P_i)$, $n = 0, \dots, m$, $i = 1, \dots, l$.

Шаг 1. Положим $i := 1$.

Шаг 2. Положим $V_i = K^0(P_i) := \emptyset$.

Шаг 3. Выберем вершину $u \in K^0(P)$ и создадим очередь $R := \{u\}$.

Шаг 4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 4.1 – 4.2.

4.1. Выберем вершину $v \in R$, добавим ее в список $V_i = K^0(P_i)$ и удалим из $K^0(P)$ и R .

4.2. Для каждого ребра $a \in \partial^{-1}(v, P)$ выполним следующие действия: найдем вершину $w \in \partial a \setminus \{v\}$ и добавим ее в очередь R , удалим a из списка $\partial^{-1}(w, P)$.

Шаг 5. Для всех $n = 1, \dots, m$ положим $K^n(P_i) := \bigcup_{v \in V_i} \partial^{-n}(v, P)$.

Шаг 6. Если $K^0(P) \neq \emptyset$, то положим $i := i + 1$ и вернемся к шагу 2.

Шаг 7. Положим $l := i$.

Конец алгоритма.

Теорема 3.3. Для каждого $i = 1, \dots, l$ объединение

$$K(P_i) = K^0(P_i) \cup K^1(P_i) \cup \dots \cup K^m(P_i)$$

представляет собой симплициальный комплекс компоненты связности P_i полиэдра P . Следовательно, $H_0(P) \cong Z_2^l$.

Доказательство. Согласно шагам 2 – 4 $V_i = K^0(P_i)$ – множество вершин полиэдра P , которые можно соединить путями с i -ой начальной вершиной $u \in K^0(P)$. Поэтому объединение P_i симплексов из $K(P_i)$ совпадает с компонентой связности $P(u)$ вершины u . По теореме 3.2 $H_0(P_i) \cong Z_2$, откуда в силу теоремы 3.1 следует, что $H_0(P) \cong Z_2^l$. $\square$

Определение 3.4. Полиэдр P размерности m называется однородным, если для любого его k -мерного симплекса σ^k , $k < m$, найдется m -мерный симплекс $\sigma^m \in K^m(P)$, для которого σ^k является гранью.

Для однородных полиэдров целесообразно обобщить понятие связности. Для этого введем следующие определения.

Определение 3.5. Пусть $m > 0$ и $X = \{\sigma_0, \dots, \sigma_p\}$ – последовательность m -мерных симплексов однородного m -мерного полиэдра P , причем для каждого $i = 1, \dots, p$ пересечение $\sigma_{i-1} \cap \sigma_i$ является симплексом размерности $m-1$. Тогда X называется m -мерным путем в P с началом σ_0 и концом σ_p . Путь $\{\sigma_p, \dots, \sigma_0\}$ считается обратным для X и обозначается символом $-X$.

Поскольку $X = \{\sigma_0, \dots, \sigma_p\} \in C_n(P)$, то $X = \sigma_0 + \dots + \sigma_p$. Для произвольных m -мерных путей $X = \sigma_0 + \dots + \sigma_p$ и $Y = \tau_0 + \dots + \tau_q$ цепь $X + Y$ является m -мерным путем тогда и только тогда, когда $\sigma_p \cap \tau_0 \in K^{m-1}(P)$.

Определение 3.6. Однородный m -мерный полиэдр P называется сильно связным, если для любых его симплексов $\sigma, \tau \in K^m(P)$ существует соединяющий их m -мерный путь $X \in C_n(P)$.

Например, любой симплекс является однородным и сильно связным полиэдром.

Для $m = 1$ понятия связности и сильной связности совпадают.

Для произвольного симплекса $\sigma \in K^m(P)$ однородного m -мерного полиэдра P обозначим символом $P(\sigma)$ объединение всех симплексов из $K^m(P)$, которые можно соединить с σ некоторым m -мерным путем. При этом $P(\sigma)$ – максимальный по включению сильно связный и содержащий σ подполиэдр полиэдра P . Как и выше, для любых $\sigma, \tau \in K^m(P)$ подполиэдры $P(\sigma)$ и $P(\tau)$ либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому полиэдр P представляет собой объединение попарно непересекающихся максимальных сильно связных подполиэдров $P_1, \dots, P_l$.

Определение 3.7. Подполиэдры $P_1, \dots, P_l$ называются компонентами сильной связности однородного m -мерного полиэдра P .

Алгоритм 3.2. Построение компонент сильной связности однородного полиэдра

Вход: Списки симплексов $K^m(P)$ и $K^{m-1}(P)$, списки инциденций $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ для всех $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$.

Выход: Натуральное число l и списки $K^m(P_i)$, $i = 1, \dots, l$.

Шаг 1. Положим $i := 1$.

Шаг 2. Положим $K^m(P_i) := \emptyset$.

Шаг 3. Выберем симплекс $\sigma_0^m \in K^m(P)$ и создадим очередь $R := \{\sigma_0^m\}$.

Шаг 4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 4.1 – 4.3.

4.1. Выберем симплекс $\sigma^m \in R$, добавим его в список $K^m(P_i)$ и удалим σ^m из $K^m(P)$ и R .

4.2. Для каждой грани $\sigma^{m-1} \in \partial\sigma^m$ удалим σ^m из списка $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$. Если после этого $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P) \neq \emptyset$, то выполним действие 4.3.

4.3. Каждый симплекс $\tau^m \in \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ добавим в очередь R .

Шаг 5. Если $K^m(P) \neq \emptyset$, то положим $i := i + 1$ и вернемся к шагу 2.

Шаг 6. Положим $l := i$.

Конец алгоритма.

Теорема 3.4. Для каждого $i = 1, \dots, l$ объединение P_i симплексов из списка $K^m(P_i)$ является компонентой сильной связности полиэдра P .

Доказательство. Согласно шагам 4.2 и 4.3 симплекс τ^m добавляется в очередь R тогда и только тогда, когда имеет общую $(m-1)$ -мерную грань с каким-либо симплексом σ^m , побывавшим в R ранее. В силу 4.1 в список $K^m(P_i)$ можно попасть только из очереди R . Следовательно, $K^m(P_i)$ – множество m -мерных симплексов полиэдра P , которые можно соединить m -мерными путями с i -ым

начальным симплексом $\sigma_0^m \in K^m(P)$. Поэтому объединение P_i симплексов из $K^m(P_i)$ совпадает с компонентой сильной связности $P(\sigma_0^m)$ симплекса σ_0^m . $\square$

4. Симплициальные схемы

Нетрудно заметить, что в алгоритмах 3.1 и 3.2 координаты вершин полиэдров нигде не используются. Эта ситуация типична для топологических задач. Значение имеют только множества симплексов и отношения инцидентности между симплексами. По этой причине имеет смысл следующая терминология.

Определение 4.1. Пусть V – конечное множество, а K – семейство его подмножеств, обладающее свойством: для всех $s \in K$ любое подмножество $s' \subset s$ также принадлежит семейству K . Тогда пара $S = (V, K)$ называется симплициальной схемой.

Рассмотрим полиэдр P и его симплициальный комплекс $K(P)$. Положим $V(P) = K^0(P)$ и $VK(P) = \{V(\sigma) \mid \sigma \in K(P)\}$, где $V(\sigma)$ – набор вершин симплекса σ . Тогда пара $S(P) = (V(P), VK(P))$ является симплициальной схемой полиэдра P . При этом говорят, что P – реализация схемы $S(P)$.

Произвольная симплициальная схема обладает многими реализациями, но все они являются гомеоморфными полиэдрами. Поэтому в топологических задачах важна именно схема. Реализации могут быть полезными для визуального отображения, но в этих целях допустимо использовать даже некорректные реализации. Например, схему бутылки Клейна в трехмерном пространстве можно изобразить только с самопересечениями. Но на исследование ее топологии это обстоятельство никак не влияет.

Симплициальные схемы $S = (V, K)$ также называют абстрактными полиэдрами, а подмножества $s \in K$ – абстрактными симплексами.

Предположим, что полиэдр P однороден и имеет размерность m . Положим $V^d(P) = K^m(P)$. В $K^d(P)$ включим $V^d(P)$, а также все пары $\{\sigma^m, \tau^m\} \subset V^d(P)$, для

которых пересечение $\sigma^m \cap \tau^m$ является $(m-1)$ -мерным симплексом комплекса $K(P)$. Тогда $S^d(P) = (V^d(P), K^d(P))$ симплициальная схема. Этот абстрактный одномерный полиэдр называется дуальным графом полиэдра P .

Нетрудно видеть, что алгоритм 3.2, предназначенный для вычисления компонент сильной связности однородного полиэдра P , получен применением алгоритма 3.1 к дуальному графу $S^d(P)$.

5. Многообразия

Многообразия являются в некотором смысле "хорошими" полиэдрами. Кроме того, они наиболее часто используются в приложениях. Поэтому имеет смысл изучить их более подробно. Сначала приведем стандартное определение. Пусть

$$R_+^m = \{(x^1, \dots, x^m) \in R^m \mid x^m \geq 0\}.$$

Определение 5.1. Полиэдр P называется многообразием размерности m , если у любой точки $u \in P$ имеется окрестность, гомеоморфная пространству R^m или полупространству R_+^m .

К сожалению, это определение не алгоритмично, то есть выполнение его условий нельзя проверить за конечное число шагов. Поэтому нужны более подходящие критерии, хотя бы для важных частных случаев. Для их формулировки нам понадобятся новые термины.

Определение 5.2. Объединение симплексов цепи $c \in C_n(P)$ называется ее телом и обозначается символом $|c|$.

Определение 5.3. Для любого симплекса $\sigma^n \in K(P)$ объединение всех содержащих σ^n симплексов полиэдра P обозначается символом $St(\sigma^n, P)$ и называется звездой симплекса σ^n в P . Объединение симплексов звезды $St(\sigma^n, P)$, не пересекающихся с σ^n , называется линком симплекса σ^n в P и обозначается символом $Lk(\sigma^n, P)$.

Пусть P – однородный m -мерный полиэдр. Тогда для любого симплекса $\sigma^n \in K(P)$, $0 \leq n \leq m$, имеется непустая цепь $st(\sigma^n, P) \in C_m(P)$, состоящая из всех m -мерных симплексов звезды $St(\sigma^n, P)$. При этом $St(\sigma^n, P) = |st(\sigma^n, P)|$.

Если, кроме того, $v \in V(P) = K^0(P)$, то граница цепи $st(v, P) \in C_m(P)$ распадается в сумму $\partial(st(v, P)) = bk(v, P) + lk(v, P)$, где $bk(v, P)$ состоит из $(m-1)$ -мерных симплексов, содержащих v , а $lk(v, P)$ – из $(m-1)$ -мерных симплексов звезды $St(\sigma^n, P)$, не содержащих вершину v . Очевидно, в этой ситуации линк $Lk(v, P)$ совпадает с телом цепи $lk(v, P)$.

Определение 5.4. Пусть P – однородный полиэдр размерности m . Тогда объединение симплексов $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$, для которых $\text{card } \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P) = 1$, мы будем называть его краем и обозначать символом ∂P .

Определение 5.5. Если компактный полиэдр является многообразием и не имеет края, то он называется замкнутым многообразием.

Имеет место [7]

Теорема 5.1. Полиэдр P размерности m является многообразием в том и только том случае, если линк $Lk(v, P)$ каждой вершины $v \in V(P) = K^0(P)$ гомеоморфен либо сфере $S^{m-1} = \{x \in R^m \mid |x| = 1\}$, либо замкнутому шару $D^{m-1} = \{y \in R^{m-1} \mid |y| \leq 1\}$. Если для всех вершин реализуется первый случай, то P – замкнутое многообразие. Если же для некоторой вершины $v \in V(P)$ имеет место второй вариант, то $v \in K^0(\partial P)$.

Одномерный полиэдр P является графом. Если он связан, то однороден. При этом степень $\deg(v, P)$ вершины $v \in V(P)$ совпадает с числом элементов цепи $st(v, P) \in C_1(P)$.

Нульмерная сфера S^0 состоит из двух точек, а нульмерный шар D^0 – из одной точки. Отсюда и из теоремы 5.1 следует, что граф P является

многообразием тогда и только тогда, когда любая его вершина $v \in V(P)$ имеет степень $\deg(v, P) \in \{1, 2\}$.

Очевидно, полиэдры, гомеоморфные сфере или шару являются однородными и сильно связными полиэдрами. Теорема 5.1 позволяет распространить эти свойства на все связные многообразия.

Теорема 5.2. Любое многообразие является однородным полиэдром.

Доказательство. Допустим, что полиэдр P является многообразием размерности m , и рассмотрим целое число l , $0 \leq l \leq m-1$, и произвольный симплекс $\sigma^l \in K^l(P)$. Выберем вершину $v \in K^0(\sigma^l)$. Тогда $(l-1)$ -мерная грань σ^{l-1} симплекса σ^l , противолежащая вершине v , лежит на линке $Lk(v, P)$. По теореме 5.1 $Lk(v, P)$ – однородный полиэдр размерности $(m-1)$. Следовательно, найдется симплекс $\tau^{m-1} = [w_0 \dots w_{m-1}] \in K^{m-1}(Lk(v, P))$, для которого σ^{l-1} является гранью. Согласно определению 5.3 симплекс τ^{m-1} обязан быть гранью симплекса $\tau^m = [w_0 \dots w_{m-1} v]$ из звезды $St(v, P)$. Но тогда и σ^l является гранью симплекса τ^m . $\square$

Теорема 5.3. Для любой вершины $v \in K^0(P)$ многообразия P звезда $St(v, P)$ сильно связна.

Доказательство. Сильная связность звезды $St(v, P)$ равносильна сильной связности линка $Lk(v, P)$. Последняя следует из теоремы 5.1. $\square$

Теорема 5.4. Для многообразий связность эквивалентна сильной связности.

Доказательство. Предположим, что P – связное многообразие размерности m . Рассмотрим произвольные симплексы $\sigma_0^m, \sigma_1^m \in K^m(P)$ и их вершины $u \in K^0(\sigma_0^m)$ и $v \in K^0(\sigma_1^m)$. Тогда существует реберный путь $x = [w_0 w_1] + \dots + [w_{q-1} w_q]$ в P с началом $w_0 = u$ и концом $w_q = v$. По теореме 5.2 P – однородный полиэдр. Поэтому для каждого $i = 1, \dots, q$ найдется m -мерный симплекс $\tau_i^m \in K(P)$, инцидентный ребру $[w_{i-1} w_i]$. Положим $\tau_0^m = \sigma_0^m$ и $\tau_{q+1}^m = \sigma_1^m$. Согласно теореме 5.3 для $i = 0, 1, \dots, q$ в звездах $St(w_i, P)$ существуют m -мерные пути $X_i = \theta_{i0}^m + \dots + \theta_{ik_i}^m$ с началом $\theta_{i0}^m = \tau_i^m$ и концом

$\theta_{ik_i}^m = \tau_{i+1}^m$. Положим $X_i^* = \theta_{i1}^m + \dots + \theta_{ik_i}^m$ для всех i . Тогда сумма $X = \theta_{00}^m + X_0^* + \dots + X_q^*$ является m -мерным путем, соединяющим симплексы σ_0^m и σ_1^m .

Пусть теперь P – однородный сильно связный полиэдр размерности m . Если $u, v \in K^0(P)$ – произвольные вершины, то согласно однородности имеются симплексы $\sigma_0^m, \sigma_1^m \in K^m(P)$, для которых $u \in K^0(\sigma_0^m)$ и $v \in K^0(\sigma_1^m)$. Из сильной связности следует существование соединяющего σ_0^m и σ_1^m m -мерного пути X в P . Но из ребер симплексов, образующих путь X , легко составить одномерный путь, соединяющий вершины u и v . $\square$

6. Двумерные многообразия

Теорема 6.1. Двумерный полиэдр P является многообразием в том и только том случае, если выполнены два условия:

- Для любого ребра $a \in K^1(P)$ список инциденций $\partial^{-1}(a, P)$ удовлетворяет неравенствам $1 \leq \text{card } \partial^{-1}(a, P) \leq 2$.
- Для любой вершины $v \in K^0(P)$ звезда $St(v, P)$ есть сильно связный двумерный полиэдр.

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $v \in K^0(P)$. Ее линк $Lk(v, P)$ гомеоморфен либо окружности, либо отрезку тогда и только тогда, когда является связным многообразием размерности 1.

Но равенство $\dim Lk(v, P) = 1$ эквивалентно равенству $\dim St(v, P) = 2$. Если же эти условия выполнены, то $Lk(v, P)$ – граф. При этом связность линка $Lk(v, P)$ равносильна сильной связности звезды $St(v, P)$, а для того, чтобы граф $Q = Lk(v, P)$ являлся многообразием, необходимо и достаточно выполнения неравенств $1 \leq \deg(w, Q) \leq 2$ для всех вершин $w \in K^0(Q)$. Последнее условие эквивалентно неравенствам $1 \leq \text{card } \partial^{-1}(a, P) \leq 2$ для $a = [vw]$. Согласно теореме 5.1 отсюда следует доказываемое утверждение. $\square$

Определение 6.1. Вершины и ребра двумерного полиэдра P , не обладающие свойствами из теоремы 6.1, называются особыми. Особая вершина, не лежащая на особом ребре, считается изолированной особенностью.

Определение 6.2. Связный и однородный двумерный полиэдр P принято называть поверхностью.

Определение 6.3. Одномерный симплекс $a \in K^1(P)$ двумерного полиэдра P называется ребром ветвления, если он является гранью более чем двух двумерных симплексов (треугольников) комплекса $K(P)$. Поверхность P считается разветвленной, если содержит хотя бы одно ребро ветвления. В противном случае P называют псевдомногообразием.

Из теоремы 6.1 вытекает

Следствие 6.1. Поверхность P является многообразием в том и только том случае, если не содержит ребер ветвления и изолированных особых вершин.

Следующий алгоритм основан на теореме 5.5 и позволяет найти все особенности двумерного полиэдра P . Если особенности отсутствуют, то P — многообразие.

Алгоритм 6.1. Нахождение особых вершин и ребер двумерного полиэдра

Вход: Списки симплексов $K^i(P)$, $i = 0, 1, 2$, списки инциденций $\partial^{-1}(a, P)$ и $\partial^{-2}(v, P)$ для всех $a \in K^1(P)$ и $v \in K^0(P)$.

Выход: Списки особых вершин V_0 и V_* и особых ребер E_0 и E_* .

Шаг 1. Положим $V_0 := \emptyset$, $V_* := \emptyset$, $E_0 := \emptyset$ и $E_* := \emptyset$.

Шаг 2. Для каждого ребра $a \in K^1(P)$ выполним процедуры 2.1 и 2.2.

2.1. Если $\partial^{-1}(a, P) = \emptyset$, то добавим a в список E_0 и удалим из $K^0(P)$ вершины $w \in \partial a$.

2.2. Если $\text{card}(\partial^{-1}(a, P)) > 2$, то добавим a в список E_* и удалим из $K^0(P)$ вершины $w \in \partial a$.

Шаг 3. Для каждой вершины $v \in K^0(P)$ выполним процедуры 3.1 – 3.4.

3.1. Если $\partial^{-2}(v, P) = \emptyset$, то добавим v в список V_0 .

3.2. Выберем треугольник $t_0 \in \partial^{-2}(v, P)$ и создадим очередь $R := \{t\}$.

3.3. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 3.3.1 – 3.3.3

3.3.1. Выберем треугольник $t \in R$ и удалим его из $\partial^{-2}(v, P)$ и R .

3.3.2. Для каждой стороны $b \in \partial t$, содержащей вершину v , удалим t из списка $\partial^{-1}(b, P)$. Если после этого $\partial^{-1}(b, P) \neq \emptyset$, то выполним действие 3.3.3.

3.3.3. Треугольник $\tau \in \partial^{-1}(b, P)$ добавим в очередь R .

3.4. Если $\partial^{-2}(v, P) \neq \emptyset$, то добавим вершину v в список E_* .

Конец алгоритма.

Очевидно, что после завершения работы алгоритма 5.1 списки E_0 и V_0 состоят из ребер и вершин, не инцидентных ни одному симплексу большей размерности. Таким образом, при $E_0 \neq \emptyset$ или $V_0 \neq \emptyset$ нарушается однородность полиэдра P . Каждая вершина $v \in V_0$ совпадает со своей компонентой связности, то есть является изолированной вершиной. Список E_* будет состоять из ребер ветвления, а список V_* из особых вершин, не лежащих на ребрах из E_0 и E_* , и не принадлежащих множеству V_0 . Следовательно, произвольная вершина $v \in V_*$ является изолированной особенностью, но не изолированной вершиной полиэдра P .

В результате, равенства $E_0 = \emptyset$ и $V_0 = \emptyset$ означают, что P – однородный полиэдр и потому каждая его компонента связности представляет собой поверхность. Если дополнительно $E_* = \emptyset$, то P – псевдомногообразие, а при

равенстве пустому множеству всех построенных списков полиэдр P является многообразием.

7. Трехмерные многообразия

Здесь будем предполагать, что P – трехмерный полиэдр. При этом определить, является P многообразием или нет, несколько сложнее. Более того, решение зависит от того, вложено P в R^3 или в пространство большей размерности.

Сначала рассмотрим случай, когда $P \subset R^3$. Имеет место [7]

Теорема 7.1. Для любого полиэдра $P \subset R^3$ существует полиэдр $Q \subset R^3$ размерности 3, обладающий свойствами: Q – многообразие, P – подполиэдр полиэдра Q , имеет место включение $P \subset Q \setminus \partial Q$.

Эта теорема позволяет упростить изучение линков вершин полиэдров пространства R^3 .

Теорема 7.2. Пусть P – трехмерный полиэдр в R^3 и Q – многообразие из теоремы 7.1. Тогда линк $Lk(v, P)$ любой вершины $v \in K^0(P)$ является подполиэдром поверхности $M \subset Q$, гомеоморфной сфере S^2 .

Доказательство. Рассмотрим произвольную вершину $v \in K^0(P)$. По теореме 5.1 ее линк $M = Lk(v, Q)$ является поверхностью, гомеоморфной либо сфере S^2 , либо кругу D^2 .

Допустим, что $M \approx D^2$. Так как $\partial D^2 \neq \emptyset$, то имеется ребро $a = [uw] \in K^1(M)$, инцидентное только одному треугольнику $t \in K^2(M)$ поверхности M . Но тогда треугольник $[vuw] \in K^2(Q)$ инцидентен только одному трехмерному симплексу полиэдра Q . Следовательно, $[vuw] \in \partial Q$. Поскольку $v \in K^0(P)$, то полученное включение противоречит условию $P \subset Q \setminus \partial Q$. Таким образом, наше допущение неверно и, на самом деле, $M \approx S^2$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что из $P \subset Q$ следует $Lk(v, P) \subset Lk(v, Q) = M$. $\square$

Теорема 7.3. Предположим, что P – однородный трехмерный полиэдр в R^3 . Тогда линк $Lk(v, P)$ любой вершины $v \in K^0(P)$ гомеоморфен сфере S^2 тогда и только тогда, когда $\partial(Lk(v, P)) = \emptyset$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что по условию $Lk(v, P)$ – однородный полиэдр и потому для него определен край $\partial(Lk(v, P)) = \emptyset$. Если при этом $Lk(v, P) \approx S^2$, то очевидно $\partial(Lk(v, P)) \approx \partial S^2 = \emptyset$.

По теореме 7.2 линк $Lk(v, P)$ лежит на некоторой поверхности M , гомеоморфной сфере S^2 . Допустим, что $Lk(v, P) \neq M$.

Из однородности P следует, что линк $Lk(v, P)$ представляет собой однородный двумерный подполиэдр поверхности M . В частности, это означает, что $Lk(v, P)$ совпадает с объединением треугольников из списка $K^2(Lk(v, P))$. То же самое верно для поверхности M . Поэтому неравенство $Lk(v, P) \neq M$ эквивалентно неравенству $K^2(Lk(v, P)) \neq K^2(M)$. В силу $Lk(v, P) \subset M$ последнее равносильно тому, $K^2(M) \setminus K^2(Lk(v, P)) \neq \emptyset$.

Таким образом, при нашем предположении найдутся треугольники $t_0 \in K^2(Lk(v, P))$ и $t_1 \in K^2(M) \setminus K^2(Lk(v, P))$. По теореме 5.4 M – сильно связный полиэдр. Поэтому в M существует двумерный путь $X = \tau_0 + \dots + \tau_q$ с началом $\tau_0 = t_0$ и концом $\tau_q = t_1$. Пусть k – наибольшее число из списка $\{0, 1, \dots, q\}$, для которого $\tau_k \in K^2(M)$. По выбору начала и конца пути X имеют место неравенства $0 < k < q$. Следовательно, путь X содержит треугольник τ_{k+1} . Согласно выбору числа k имеем $\tau_{k+1} \in K^2(M) \setminus K^2(Lk(v, P))$. Так как M – двумерное замкнутое многообразие, то для ребра $a = \tau_k \cap \tau_{k+1}$ справедливо равенство $\partial^{-1}(a) = \{\tau_k, \tau_{k+1}\}$. По доказанному выше $\tau_{k+1} \notin K^2(Lk(v, P))$, а потому $a \subset \partial(Lk(v, P))$.

Итак, нами доказано, что неравенство $Lk(v, P) \neq M$ влечет за собой неравенство $\partial(Lk(v, P)) \neq \emptyset$. Но тогда из равенства $\partial(Lk(v, P)) = \emptyset$ следует, что $Lk(v, P) = M \approx S^2$. $\square$

Теорема 7.4. Пусть P – однородный трехмерный полиэдр в R^3 . Тогда линк $Q = Lk(v, P)$ произвольной вершины $v \in K^0(P)$ гомеоморфен диску D^2 тогда и только тогда, когда $\partial Q \approx S^1$.

Доказательство. Если $Q \approx D^2$, то очевидно $\partial Q \approx S^1$.

Пусть далее известно, что $\partial Q \approx S^1$. Положим $z = \partial(Lk(v, P))$. Тогда $\partial Q = |z|$. Рассмотрим произвольную вершину $u \in K^0(Q)$, а также ее линки $Lk(u, Q)$ и $Lk(u, M)$, где M – поверхность из теоремы 7.2, для которой Q является подполиэдром. Поскольку $M \approx S^2$, то $Lk(u, M) \approx S^1$. При этом цепь, для которой линк $Lk(u, M)$ является телом, имеет вид $lk(u, M) = \sum_{i=0}^{l-1} [w_i w_{i+1}]$, где индексы i считаются элементами группы Z_l , а также при $i \neq j$ вершины w_i и w_j различны.

Предположим сначала, что $u \notin K^0(\partial Q)$, и докажем, что в этом случае $Lk(u, Q) = Lk(u, M)$. Действительно, если последнее равенство не выполнено, то $lk(u, Q) \neq lk(u, M)$. Тогда найдется такое $k \in Z_l$, что одно из ребер $[w_{k-1} w_k]$ и $[w_k w_{k+1}]$ принадлежит цепи $lk(u, Q)$, а другое нет. Но в этом случае только один из треугольников $[uw_{k-1} w_k]$ и $[uw_k w_{k+1}]$ лежит в подполиэдре $Q \subset M$. Так как M – двумерное замкнутое многообразие, то других инцидентных ребру $[uw_k]$ треугольников на M быть не может. Следовательно, $[uw_k] \subset \partial Q$, что противоречит выбору вершины u .

Теперь допустим, что $u \in K^0(\partial Q)$. Тогда найдутся такие $i, j \in Z_l$, $i \neq j$, что $[uw_i], [uw_j] \in z$ и цикл z не содержит ребер $[uw_k]$ при $k \notin \{i, j\}$. При этом с точностью до перестановки пары $\{i, j\}$ можно считать, что $[w_k w_{k+1}] \in lk(u, Q)$ для всех

$k = i, \dots, j-1$ и $[w_k, w_{k+1}] \notin lk(u, Q)$ для $k = j, \dots, i-1$. В такой ситуации имеет место равенство $lk(u, Q) = \sum_{k=i}^{j-1} [w_k, w_{k+1}]$, откуда следует, что $Lk(u, Q) = |lk(u, Q)| \approx D^1$.

Согласно теореме 5.1 и результатам предыдущих двух абзацев Q – двумерное многообразие с краем, причем край $\partial Q = |z|$ состоит из одной компоненты связности.

Положим $Y = lk(v, P) + K^2(M)$ и $Q' = |Y|$. Тогда точно так же доказывается, что и Q' – двумерное многообразие с краем, причем по построению $\partial Q' = \partial Q = |z|$.

Согласно классификации двумерных компактных многообразий [11] Q – сфера с одной дыркой, p ручками и q пленками Мебиуса, $p \geq 0$, $q \geq 0$. Аналогично, Q' – сфера с одной дыркой, p' ручками и q' пленками Мебиуса, $p' \geq 0$, $q' \geq 0$. Но тогда их объединение $M = Q \cup Q'$ представляет собой сферу с $p + p'$ ручками и $q + q'$ пленками. Так как $M \approx S^2$, то $p + p' = 0$ и $q + q' = 0$. Следовательно, $p = 0$ и $q = 0$. А это значит, что $Q \approx D^2$. $\square$

На теоремах 5.1, 7.3 и 7.4 основан следующий алгоритм.

Алгоритм 7.1. Нахождение особых вершин трехмерного полиэдра в пространстве R^3

Вход: Списки симплексов $K^i(P)$, $i = 0, 1, 2, 3$, списки инциденций $\partial^{-1}(v, P)$, $\partial^{-2}(v, P)$, $\partial^{-1}(a, P)$, и $\partial^{-1}(t, P)$ для всех $v \in K^0(P)$, $a \in K^1(P)$ и $t \in K^2(P)$.

Выход: Список особых вершин V_* .

Шаг 1. Положим $V_* := \emptyset$.

Шаг 2. Для каждой вершины $v \in K^0(P)$ положим $X := \emptyset$, $Y := \emptyset$ и выполним шаги 3 – 9.

Шаг 3. Если в наборе $\{\partial^{-1}(v, P)\} \cup \{\partial^{-1}(a, P) \mid a \in \partial^{-1}(v, P)\} \cup \{\partial^{-1}(t, P) \mid t \in \partial^{-2}(v, P)\}$ найдется хотя бы одно пустое множество, то добавим v в список V_* и вернемся к шагу 2.

Шаг 4. Для каждого треугольника $t \in \partial^{-2}(v, P)$ выполним процедуры 4.1 – 4.3.

4.1. Если $\text{card}(\partial^{-1}(t, P)) = 2$, то вернемся к шагу 4.

4.2. Добавим треугольник t в список X .

4.3. Для сторон $a \in \partial t$, содержащих вершину v , выполним действия 4.3.1 – 4.3.2.

4.3.1. Если $a \notin Y$, то добавим ребро a в список Y , положим $\partial^{-1}(a, |X|) := \{t\}$ и вернемся к 4.3.

4.3.2. Добавим треугольник t в список $\partial^{-1}(a, |X|)$.

Шаг 5. Если $X = \emptyset$, то вернемся к шагу 2.

Шаг 6. Для каждого ребра $a \in Y$ выполним 6.1.

6.1. Если $\text{card}(\partial^{-1}(a, |X|)) > 2$, то добавим v в список V_* и вернемся к шагу 2.

Шаг 7. Выберем треугольник $t_0 \in X$ и создадим очередь $R := \{t_0\}$.

Шаг 8. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 8.1 – 8.3.

8.1. Выберем треугольник $t \in R$ и удалим его из списков X и R .

8.2. Для каждой стороны $a \in \partial t$, содержащей вершину v , удалим t из списка $\partial^{-1}(a, |X|)$. Если после этого $\partial^{-1}(a, |X|) \neq \emptyset$, то выполним действие 8.3.

8.3. Каждый симплекс $t' \in \partial^{-1}(a, |X|)$ добавим в очередь R .

Шаг 9. Если $X \neq \emptyset$, то добавим v в список V_* .

Конец алгоритма.

Теорема 7.5. Построенный с помощью алгоритма 7.1 список V_* состоит из особых вершин полиэдра P . При $V_* = \emptyset$ полиэдр P является трехмерным многообразием с краем.

Доказательство. Список V_* пополняется на шагах 3, 6.1 и 9.

В первом случае это происходит из-за того, что в звезде $St(v, P)$ нарушается однородность полиэдра P . В такой ситуации либо линк $Q = Lk(v, P)$ пуст, либо также неоднороден. При этом по теореме 5.2 он не может быть двумерным многообразием и, следовательно, полиэдром, гомеоморфным сфере S^2 или диску D^2 . Таким образом, v – особая вершина.

Если в процессе работы алгоритма мы добрались до шага 6, то Q – однородный двумерный полиэдр с непустым краем $\partial Q = |z|$. При этом попадание v в список V_* на шаге 6.1 означает, что некоторой вершине $w \in K^0(|z|)$ инцидентно более двух ребер цепи z . В этом случае полиэдр $\partial Q = |z|$ не является одномерным многообразием, откуда в силу теоремы 7.4 снова вытекает, что v – особая вершина.

На шагах 7 и 8 происходит построение одной компоненты сильной связности двумерного подполиэдра $|X| \subset St(v, P)$. Если выполняется шаг 9, то $|X|$ содержит более одной компоненты. Но тогда край ∂Q линка $Q = Lk(v, P)$ не связан, а потому не может быть гомеоморфным окружности S^1 . При этом согласно теореме 7.4 линк Q не является гомеоморфным диску D^2 . Следовательно, опять v – особая вершина.

Если же вершина $v \in K^0(P)$ не попадает в список V_* , то согласно шагу 3 $\partial^{-2}(v, P) \neq \emptyset$. Далее возможны два варианта: либо для всех $t \in \partial^{-2}(v, P)$ выполняется шаг 4.2, либо для некоторых – 4.2, а для остальных – 4.3 и 4.2. В первом случае на шаге 5 имеем $X = \emptyset$. Но тогда линк Q не имеет края, откуда по теореме 7.3 следует, что $Q \approx S^2$. Во втором случае $\partial Q \neq \emptyset$ и не выполняются шаги 6.1 и 9. Пропуск шага 6.1 означает, что степень любой вершины графа ∂Q равна двум, а

пропуск шага 9 равносильно связности ∂Q . При этом $\partial Q \approx S^1$, откуда по теореме 7.4 следует, что $Q \approx D^2$. Для завершения доказательства осталось применить теорему 5.1. $\square$

В общем случае, когда $P \subset R^N$, $N > 3$, теоремы 7.2, 7.3 и 7.4 не имеют места. Поэтому алгоритм 7.1 для таких трехмерных полиэдров неприменим, и требуется более сложный метод решения аналогичной задачи.

Алгоритм 7.2. Нахождение особых вершин произвольного трехмерного полиэдра

Вход: Списки симплексов $K^i(P)$, $i = 0, 1, 2, 3$, списки инциденций $\partial^{-1}(v, P)$, $\partial^{-2}(v, P)$, $\partial^{-3}(v, P)$, $\partial^{-1}(a, P)$, $\partial^{-2}(a, P)$ и $\partial^{-1}(t, P)$ для всех $v \in K^0(P)$, $a \in K^1(P)$ и $t \in K^2(P)$.

Выход: Список особых вершин V_* .

Шаг 1. Положим $V_* := \emptyset$.

Шаг 2. Для каждой вершины $v \in K^0(P)$ положим $\partial X(v) := \emptyset$ и выполним шаги 3 – 10.

Шаг 3. Если выполнено хотя бы одно из равенств $\partial^{-1}(v, P) = \emptyset$, $\partial^{-2}(v, P) = \emptyset$, $\partial^{-3}(v, P) = \emptyset$, то перейдем к шагу 10.

Шаг 4. Для каждого треугольника $t \in \partial^{-2}(v, P)$ положим $Z'(t) = Z(t) := \partial^{-1}(t, P)$ и выполним процедуры 4.1 – 4.2.

4.1. Если $Z(t) = \emptyset$ или $\text{card}(Z(t)) > 2$, то перейдем к шагу 10.

4.2. Если $\text{card}(\partial^{-1}(t, P)) = 1$, то добавим треугольник t в список $\partial X(v)$.

Шаг 5. Для каждого ребра $a \in \partial^{-1}(v, P)$ выполним процедуры 5.1 – 5.3.

5.1. Положим $Y(a) := \partial^{-2}(a, P)$.

5.2. Если $Y(a) = \emptyset$, то перейдем к шагу 10.

5.3. Выберем тетраэдр $\sigma_0 \in Y(a)$ и создадим очередь $R := \{\sigma_0\}$.

5.4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 5.4.1 – 5.4.3.

5.4.1. Выберем тетраэдр $\sigma \in R$ и удалим его из списков $Y(a)$ и R .

5.4.2. Для каждой двумерной грани $t \in \partial\sigma$, содержащей вершину v , удалим σ из списка $Z(t)$. Если после этого $Z(t) \neq \emptyset$, то выполним действие 5.2.3.

5.4.3. Каждый симплекс $\sigma' \in Z(t)$ добавим в очередь R .

5.5. Если $Y(a) \neq \emptyset$, то перейдем к шагу 10.

Шаг 6. Положим $X(v) = \partial^{-3}(v, P)$ и выполним 6.1 – 6.3.

6.1. Выберем тетраэдр $\sigma_0 \in X(v)$ и создадим очередь $R := \{\sigma_0\}$.

6.2. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 6.2.1 – 6.2.3.

6.2.1. Выберем тетраэдр $\sigma \in R$ и удалим его из списков $X(v)$ и R .

6.2.2. Для каждой двумерной грани $t \in \partial\sigma$, содержащей вершину v , удалим σ из списка $Z'(t)$. Если после этого $Z'(t) \neq \emptyset$, то выполним действие 6.2.3.

6.2.3. Каждый симплекс $\sigma' \in Z'(t)$ добавим в очередь R .

6.3. Если $X(v) \neq \emptyset$, то перейдем к шагу 10.

Шаг 7. Положим $\chi(v) := \text{card } \partial^{-1}(v, P) - \text{card } \partial^{-2}(v, P) + \text{card } \partial^{-3}(v, P)$.

Шаг 8. Если $\partial X(v) = \emptyset$ и, то выполним 8.1 – 8.2.

8.1. Если $\chi(v) = 2$, то вернемся к шагу 2.

8.2. Перейдем к шагу 10.

Шаг 9. Если $\chi(v) = 1$, то вернемся к шагу 2.

Шаг 10. Добавим вершину v в список V_* и вернемся к шагу 2.

Конец алгоритма.

Теорема 7.6. Построенный с помощью алгоритма 7.2 список V_* состоит из особых вершин полиэдра P . При $V_* = \emptyset$ полиэдр P является трехмерным

многообразием. Если $\partial X(v) = \emptyset$ для всех $v \in K^0(P)$, то P – замкнутое многообразие, в противном случае P имеет непустой край ∂P .

Доказательство. По теореме 5.1 полиэдр P является трехмерным многообразием тогда и только тогда, когда для каждой вершины $v \in K^0(P)$ линк $Q = Lk(v, P)$ гомеоморфен сфере S^2 или диску D^2 .

Но сфера и диск представляют собой связные двумерные многообразия. При этом сфера замкнута и имеет характеристику Эйлера $\chi(S^2) = 2$, а $\partial D^2 \neq \emptyset$ и $\chi(D^2) = 1$. Никакое другое компактное двумерное многообразиями подобными свойствами не обладает.

Согласно теореме 6.1 полиэдр Q может быть двумерным многообразием в том и только том случае, если является поверхностью, не имеет ребер ветвления и звезда каждой его вершины сильно связна.

Таким образом, условие теоремы 5.1 для вершины v в данном случае равносильно тому, что ее линк $Q = Lk(v, P)$ обладает следующими свойствами:

Q – поверхность, то есть однородный двумерный полиэдр,

Q не содержит ребер ветвления,

звезда любой вершины полиэдра Q сильно связна,

Q связный полиэдр,

либо $\partial Q = \emptyset$ и $\chi(Q) = 2$, либо $\partial Q \neq \emptyset$ и $\chi(Q) = 1$.

Линк $Q = Lk(v, P)$ является поверхностью тогда и только тогда, когда звезда $St(v, P)$ представляет собой однородный трехмерный полиэдр. Выполнение этого условия проверяется на шагах 3, 4.1 и 5.2. Его нарушение означает, что имеет место хотя бы одно из равенств $\partial^{-1}(v, P) = \emptyset$, $\partial^{-2}(v, P) = \emptyset$, $\partial^{-3}(v, P) = \emptyset$, $Z(t) = \emptyset$ и $Y(a) = \emptyset$. В каждом из этих случаев вершина v отправляется в список V_* .

Отсутствие ребер ветвления у Q эквивалентно тому, что каждый треугольник $t \in \partial^{-2}(v, P)$ инцидентен не более чем двум тетраэдрам комплекса $K(P)$. Последнее проверяется на шаге 4.1 и равносильно неравенству $\text{card}(Z(t)) \leq 2$. При его нарушении v также попадает в V_* .

Сильная связность звезд вершин полиэдра Q – это то же самое, что сильная связность звезд ребер $a \in \partial^{-1}(v, P)$. На шагах 5.3 и 5.4 строится компонента сильной связности звезды ребра a . При этом равенство $Y(a) \neq \emptyset$ на шаге 5.5 означает, что эта компонента не единственна, поэтому вершина v отправляется в V_* .

На шаге 6 мы имеем дело с двумерным многообразием Q . По теореме 5.4 его связность эквивалентна сильной связности. Последняя, в свою очередь, равносильна сильной связности звезды $St(v, P)$. Шаги 6.1 и 6.2 посвящены построению компоненты сильной связности полиэдра $St(v, P)$. Если на шаге 6.3 $X(v) \neq \emptyset$, то имеются и другие компоненты. По этой причине вершина v попадает в список V_* .

Заметим, что сильная связность полиэдра Q и звезд всех его вершин являются независимыми свойствами. Например, вырожденный тор является сильно связным псевдомногообразием, но звезда его особой вершины состоит из двух компонент сильной связности. С другой стороны, у несвязного многообразия звезда любой вершины сильно связна. Поэтому рассматриваемые свойства необходимо проверять независимо друг от друга.

Если для выбранной вершины v алгоритм доработает до шага 7, то Q – связное двумерное компактное многообразие. Очевидно, что величина $\text{card } \partial^{-1}(v, P)$ равна числу его вершин, $\text{card } \partial^{-2}(v, P)$ – числу ребер, а $\text{card } \partial^{-3}(v, P)$ – числу треугольников. Поэтому $\chi(v)$ – характеристика Эйлера полиэдра $Q = Lk(v, P)$.

Согласно шагу 4.3 равенство $\partial X(v) = \emptyset$ эквивалентно замкнутости многообразия Q . Поэтому на шаге 8 проверяется выполнение свойств $\partial Q = \emptyset$ и $\chi(Q) = 2$. На шаге 9 мы уже имеем $\partial Q \neq \emptyset$, поэтому здесь проверяется только

справедливость равенства $\chi(Q)=1$. Если хоть одно из этих условий нарушается, то v оказывается в списке V_* .

Таким образом, вершина попадает в список V_* тогда и только тогда, когда не выполняется хотя бы одно из выделенных нами выше требований. Следовательно, V_* – список особых вершин, а равенство $V_*=\emptyset$ означает, что P – трехмерное многообразие.

Осталось заметить, что по построению на шаге 4.3 треугольники из списка $\partial X(v)$ являются краевыми для многообразия P . Поэтому для замкнутости последнего необходимо и достаточно, чтобы равенство $\partial X(v)=\emptyset$ имело место для всех $v \in K^0(P)$. $\square$

8. Ориентации

Понятие ориентации интересно и важно само по себе. В частности, ориентируемость многообразия является его топологической характеристикой. Но мы будем использовать ориентации еще и для вычислений базисов групп гомологий разветвленных поверхностей в разделе 12.

Пусть σ^n – n -мерный симплекс, $n > 0$, а $V(\sigma^n)$ – набор его вершин. Элементы множества $V(\sigma^n)$ можно пронумеровать $(n+1)!$ способами. Обозначим символом $\hat{V}(\sigma^n)$ совокупность полученных таким образом последовательностей.

Определение 8.1. Последовательности $\alpha, \beta \in \hat{V}(\sigma^n)$ договоримся считать O -эквивалентными, если β можно получить из α с помощью четной перестановки ее элементов. Каждый из двух классов O -эквивалентности $O_1(\sigma^n)$ и $O_2(\sigma^n)$, на которые разбивается $\hat{V}(\sigma^n)$, называется ориентацией симплекса σ^n . При этом принято говорить, что ориентации $O_1(\sigma^n)$ и $O_2(\sigma^n)$ противоположны, и полагать $O_1(\sigma^n) = -O_2(\sigma^n)$ и $O_2(\sigma^n) = -O_1(\sigma^n)$. Симплекс σ^n вместе с выбранной ориентацией $O_k(\sigma^n)$, $k \in \{1, 2\}$, называется ориентированным.

Рассмотрим, например, ребро $e = \sigma^1 = [uv]$. Тогда $V(e) = \{u, v\}$ и $\hat{V}(e) = \{\{u, v\}, \{v, u\}\}$. Поскольку последовательность $\{v, u\}$ получается из $\{u, v\}$ нечетной перестановкой, то $O_1(e) = \{u, v\}$ и $O_2(e) = \{v, u\}$.

Если $t = \sigma^3 = [uvw]$ — двумерный симплекс, то $V(t) = \{u, v, w\}$, $\hat{V}(t) = \{\{u, v, w\}, \{v, w, u\}, \{w, u, v\}, \{v, u, w\}, \{w, v, u\}, \{u, w, v\}\}$ и $\hat{V}(t)$ распадется на ориентации $O_1(t) = \{\{u, v, w\}, \{v, w, u\}, \{w, u, v\}\}$ и $O_2(t) = \{\{v, u, w\}, \{w, v, u\}, \{u, w, v\}\}$.

Заметим, что ориентация $O_k(\sigma^n)$ однозначно определяется одной последовательностью $\alpha \in O_k(\sigma^n)$, поскольку любая другая последовательность $\beta \in O_k(\sigma^n)$ получается из α посредством четной перестановки ее элементов. Поэтому мы будем использовать обозначение $O(\alpha) = O_k(\sigma^n)$.

Определение 8.2. Пусть $n > 1$, $\sigma^n = [v_0 v_1 \dots v_n]$ и $\alpha = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\} \in \hat{V}(\sigma^n)$. Тогда последовательность $\alpha' = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-1}}\}$ определяет ориентацию $(n-1)$ -мерной грани $\sigma^{n-1} = [v_{i_0} v_{i_1} \dots v_{i_{n-1}}]$ симплекса σ^n . При этом говорят, что ориентация $O(\alpha')$ индуцирована ориентацией $O(\alpha)$.

Так как с помощью четной перестановки любую вершину v_{i_k} можно переместить в $\alpha = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_n}\}$ на последнее место, то указанным способом $O(\alpha)$ индуцирует ориентации на всех $(n-1)$ -мерных гранях симплекса σ^n .

Определение 8.3. Пусть $n > 1$, и симплексы σ_1^n и σ_2^n имеют общую $(n-1)$ -мерную грань $\sigma^{n-1} = \sigma_1^n \cap \sigma_2^n$. Тогда ориентации $O(\alpha_1)$ и $O(\alpha_2)$ симплексов σ_1^n и σ_2^n считаются когерентными, если они индуцируют на σ^{n-1} противоположные ориентации $O(\alpha_1')$ и $O(\alpha_2') = -O(\alpha_1')$.

При $n=1$ определения 8.2 и 8.3 не имеют смысла. Поэтому для этой ситуации необходима отдельная договоренность.

Определение 8.4. Для ребер $[uv]$ и $[vw]$ когерентными будем считать ориентации $O(\{u, v\})$ и $O(\{v, w\})$, а также ориентации $O(\{v, u\})$ и $O(\{w, v\})$.

Определение 8.5. Симплексы размерности n будем считать смежными, если они имеют общую $(n-1)$ -мерную грань.

Определение 8.6. Рассмотрим n -мерное псевдомногообразие P и его симплициальный комплекс $K(P)$. Если найдутся ориентации $O(\sigma^n)$ всех его симплексов $\sigma^n \in K^n(P)$, являющиеся когерентными для любых двух смежных симплексов, то набор $O(P) = \{O(\sigma^n) \mid \sigma^n \in K^n(P)\}$ называют ориентацией псевдомногообразия P .

Для полиэдров более общего вида определение 8.5 не имеет смысла. Действительно, если симплекс σ^{n-1} является гранью трех симплексов σ_1^n , σ_2^n и σ_3^n , то можно выбрать ориентации $O(\sigma_1^n)$, $O(\sigma_2^n)$ и $O(\sigma_3^n)$ так, чтобы $O(\sigma_1^n)$ и $O(\sigma_2^n)$, а также $O(\sigma_1^n)$ и $O(\sigma_3^n)$ были когерентными. Но при этом $O(\sigma_2^n)$ и $O(\sigma_3^n)$ индуцируют на σ^{n-1} одну и ту же ориентацию, а потому уже не когерентны.

Определение 8.6. Псевдомногообразие P называется ориентируемым, если для него существует хотя бы одна ориентация. В противном случае оно считается неориентируемым.

Теорема 8.1. Если псевдомногообразие P ориентируемо и состоит из l компонент сильной связности, то оно обладает 2^l ориентациями.

Доказательство. Предположим сначала, что $l=1$. Ориентируемость P означает существование хотя бы одной ориентации $O(P) = \{O(\sigma^n) \mid \sigma^n \in K^n(P)\}$. Положим $-O(P) = \{-O(\sigma^n) \mid \sigma^n \in K^n(P)\}$. Тогда ориентации смежных симплексов из набора $-O(P)$ также когерентны, следовательно, $-O(P)$ — также ориентация псевдомногообразия P .

Предположим, что имеется еще одна ориентация $\tilde{O}(P) = \{\tilde{O}(\sigma^n) \mid \sigma^n \in K^n(P)\}$, причем $\tilde{O}(P) \neq O(P)$ и $\tilde{O}(P) \neq -O(P)$. Так как каждый симплекс имеет только две ориентации, то в этом случае $K^n(P)$ распадется в объединение непустых и непересекающихся подмножеств A и B так, что $\tilde{O}(\sigma^n) = O(\sigma^n)$ для всех $\sigma^n \in A$ и $\tilde{O}(\sigma^n) = -O(\sigma^n)$ для любых $\sigma^n \in B$. Выберем $\sigma_1^n \in A$ и $\sigma_2^n \in B$. В силу сильной

связности полиэдра P в нем найдется n -мерный путь $X = \tau_0^n + \dots + \tau_q^n$ с началом $\tau_0^n = \sigma_1^n$ и концом $\tau_q^n = \sigma_2^n$. При этом для некоторого $k \in \{1, \dots, q\}$ будем иметь $\tau_{k-1}^n \in A$ и $\tau_k^n \in B$. Но тогда по выбору множеств A и B справедливы равенства $\tilde{O}(\tau_{k-1}^n) = O(\tau_{k-1}^n)$ и $\tilde{O}(\tau_k^n) = -O(\tau_k^n)$. Из них следует, что ориентации $\tilde{O}(\tau_{k-1}^n)$ и $\tilde{O}(\tau_k^n)$ не когерентны. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно и, на самом деле, либо $\tilde{O}(P) = O(P)$, либо $\tilde{O}(P) = -O(P)$. Таким образом, ориентируемое сильно связное псевдомногообразие обладает только двумя ориентациями.

Пусть далее $l > 1$. По определению n -мерные симплексы, принадлежащие различным компонентам сильной связности общих $(n-1)$ -мерных граней иметь не могут. Следовательно, ориентации на различных компонентах можно выбирать независимо друг от друга. Отсюда и из доказанного выше вытекает утверждение теоремы. $\square$

Одномерное псевдомногообразие P всегда является многообразием. Если оно связно, то гомеоморфно либо отрезку, либо окружности. Но тогда его вершины можно занумеровать так, что

$$V(P) = K^0(P) = \{v_0, v_1, \dots, v_p\} \text{ и } E(P) = K^1(P) = \{[v_0 v_1], \dots, [v_{p-1} v_p]\},$$

при этом если $P \approx S^1$, то $v_p = v_0$. Согласно определению 8.4 $O(P) = \{\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{p-1}, v_p\}\}$ – ориентация многообразия P .

Таким образом, любое одномерное многообразие ориентируемо, а задание ориентации для него сводится к последовательной нумерации вершин.

В двумерном случае имеются примеры как ориентируемых, так и неориентируемых псевдомногообразий. Поэтому рассмотрим алгоритм, позволяющий определить, к какому типу относится данный полиэдр, а заодно и построить ориентацию для псевдомногообразия первого типа.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Обычно в компьютере ребра задаются парами вершин, а треугольники – тройками вершин полиэдра. Элементы в этих парах и тройках расположены в определенном порядке. Таким

образом, $E(P) = K^1(P)$ – список упорядоченных пар, а $T(P) = K^2(P)$ – список упорядоченных троек элементов списка $V(P) = K^0(P)$.

Сказанное означает, что все ребра и треугольники полиэдра обладают исходными ориентациями. Исходные ориентации ребер нас не интересуют. Если же треугольник t представлен в списке $T(P) = K^2(P)$ упорядоченной тройкой $\{u, v, w\}$, то мы будем полагать $+t = [uvw]$ и $-t = [vuw]$. При этом $+t$ – треугольник с вершинами u , v и w , снабженный ориентацией $O(\{u, v, w\})$, а $-t$ – тот же треугольник с ориентацией $O(\{v, u, w\})$.

Для ориентированного треугольника $+t = [uvw]$ символом $\partial(+t)$ обозначим список ребер $[uv]$, $[vw]$ и $[wu]$, снабженных индуцированными ориентациями $\{u, v\}$, $\{v, w\}$ и $\{w, u\}$ соответственно. Очевидно, список $\partial(+t)$ можно получить, просто выбирая стоящие подряд пары элементов последовательности $\{u, v, w, u\}$.

Отметим, что для заданного $a \in E(P)$ список инциденций $\partial^{-1}(a)$ не зависит от ориентации ребра a и состоит из треугольников, снабженных исходными ориентациями. Поэтому ориентации этих треугольников и ребра a , вообще говоря, никак не согласованы.

Алгоритм 8.1. Построение ориентации двумерного псевдомногообразия

Вход: Списки симплексов $T(P) = K^2(P)$ и $E(P) = K^1(P)$, списки инциденций $\partial^{-1}(a)$ для всех $a \in E(P)$.

Выход: Список ориентированных треугольников $O(P)$.

Шаг 1. Положим $OT(P) := \emptyset$.

Шаг 2. Выберем ориентированный треугольник $+t_0 \in T(P)$ и добавим его в список $OT(P)$.

Шаг 3. Пометим $+t_0$ как использованный и создадим очередь $R = \{+t_0\}$.

Шаг 4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 4.1 – 4.3.

4.1. Выберем симплекс $+t \in R$ и удалим его из R .

4.2. Для каждого ориентированного ребра $a \in \partial(+t)$ выполним шаги 4.2.1 – 4.2.11.

4.2.1. Если $\partial^{-1}(a) = \{+t\}$, то вернемся к шагу 4.2.

4.2.2. Выберем треугольник $+\tau \in \partial^{-1}(a)$, отличный от $+t$.

4.2.3. Если треугольник $+\tau$ не помечен, то перейдем к шагу 4.2.6.

4.2.4. Если ориентированное ребро a входит в список $\partial(+\tau)$, то положим $O(P) := \emptyset$ и остановим алгоритм.

4.2.5. Иначе вернемся к шагу 4.2.

4.2.6. Если ребро a не входит в список $\partial(+\tau)$, то перейдем к шагу 4.2.9.

4.2.7. Для ребер $b \in \partial(\tau)$, отличных от a , заменим в списке $\partial^{-1}(b)$ треугольник $+\tau$ треугольником $-\tau$.

4.2.8. Положим $+\tau := -\tau$.

4.2.9. Добавим треугольник $+\tau$ в список $OT(P)$.

4.2.10. Добавим треугольник $+\tau$ в очередь R .

4.2.11. Пометим треугольники $+\tau$ и $-\tau$ как использованные.

Шаг 5. Если в списке $T(P)$ остались треугольники, не помеченные на шагах 3 и 4, то вернемся к шагу 2.

Конец алгоритма.

Теорема 8.2. Если после завершения работы алгоритма 8.1 $OT(P) = \emptyset$, то псевдомногообразие P неориентируемо. В противном случае набор ориентаций $O(P)$ списка ориентированных треугольников $OT(P)$ является ориентацией поверхности P .

Доказательство. Рассмотрим произвольный ориентированный треугольник $+ \tau$, включенный на каком-либо этапе работы алгоритма в очередь R . Тогда либо $+ \tau = +t_0$, либо в силу 4.1 и 4.2.2 найдется смежный с $+ \tau$ ориентированный треугольник $+t$, побывавший в R ранее. При этом во втором случае согласно шагам 4.2.6 – 4.2.9 ориентации треугольников $+t$ и $+ \tau$ когерентны.

Из сказанного следует существование двумерного пути $X(+\tau) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_q\}$ с началом $\lambda_0 = +t_0$ и концом $\lambda_q = +\tau$, в котором все треугольники ориентированы, причем ориентации смежных треугольников λ_{i-1} и λ_i когерентны для всех $i = 1, \dots, q$.

Пусть после остановки работы алгоритма $OT(P) = \emptyset$. Тогда согласно шагам 4.2 и 4.2.4 треугольники $+t$ и $+ \tau$ индуцируют на ребре a одинаковые ориентации. При этом в силу 4.1 и 4.2.3 треугольники $+t$ и $+ \tau$ к этому моменту побывали в очереди R . Поэтому для них определены двумерные пути $X(+t)$ и $X(+\tau)$ с описанными выше свойствами.

Допустим, что псевдомногообразие P ориентируемо. Тогда оно обладает ориентацией $O(P)$, содержащей ориентацию $O(+t_0)$ начального треугольника $+t_0$. По построению путей $X(+t)$ и $X(+\tau)$ ориентации всех треугольников из $X(+t)$ и $X(+\tau)$ также должны войти в $O(P)$. Но согласно доказанному выше ориентации треугольников $+t$ и $+ \tau$ не когерентны. Полученное противоречие говорит о том, что наше допущение неверно и, на самом деле, поверхность P не ориентируема.

Предположим далее, что после завершения работы алгоритма $OT(P) \neq \emptyset$. Эта ситуация возможна в том и только в том случае, если на вопрос шага 4.2.4 ответ всегда был отрицательным. Но тогда любой треугольник полиэдра P на шагах 4.2.6 – 4.2.10 попадет в очередь R и список $OT(P)$ либо с исходной, либо с противоположной ей ориентацией.

Через некоторое время после этого события рассматриваемый ориентированный треугольник на шаге 4.1 извлекается из R с обозначением $+t$. Затем на шаге 4.2.4 происходит проверка когерентности ориентации $O(+t)$ с

ориентациями смежных с треугольников, уже находящихся в $OT(P)$, а на шагах 4.2.7 и 4.2.8 – согласование с $O(+t)$ ориентации нового кандидата на попадание в список $OT(P)$.

Таким образом, ориентации любых двух треугольников из списка $OT(P)$ когерентны. Следовательно, $O(P)$ – ориентация псевдомногообразия P . $\square$

Если в алгоритме 8.1 поменять треугольники на m -мерные симплексы, а ребра – на $(m-1)$ -мерные, то с его помощью можно проверять на ориентируемость и псевдомногообразия размерности m . При этом наиболее существенно усложнится проверка включений вида $+\sigma^{m-1} \in \partial(+\sigma^m)$. Действительно, если $+\sigma^{m-1}$ состоит из симплекса $\sigma^{m-1} = [u_0 \dots u_{m-1}]$ и ориентации $O(\{u_0, \dots, u_{m-1}\})$, а $+\sigma^m$ – из симплекса $\sigma^m = [v_0 \dots v_m]$ и ориентации $O(\{v_0, \dots, v_m\})$, то необходимо будет искать подпоследовательность вида $\{u_0, \dots, u_{m-1}\}$ в последовательностях, полученных из $\{v_0, \dots, v_m\}$ с помощью любой четной перестановки ее элементов.

9. Коллапсирование

Процедура коллапсирования носит технический характер. Его смысл состоит в уменьшении размеров симплициального комплекса полиэдра P с сохранением его топологических характеристик.

Определение 9.1. Пусть P – полиэдр размерности m . Предположим, что симплициальный комплекс $K(P)$ содержит $(m-1)$ -мерный симплекс σ^{m-1} , инцидентный только одному m -мерному симплексу σ^m . Удалив σ^{m-1} и σ^m из $K(P)$, получим симплициальный подкомплекс $K_1 \subset K(P)$. Объединение P_1 всех симплексов комплекса K_1 является подполиэдром полиэдра P , причем $K(P_1) = K_1$. При этом говорят, что подполиэдр P_1 получен из P элементарным коллапсированием $P \rightarrow P_1$.

Легко видеть, что подполиэдр P_1 из определения 9.1, удовлетворяет равенству $P_1 = P \setminus (Int(\sigma^{n-1}) \cup Int(\sigma^n))$.

Определение 9.2. Композиция конечной последовательности элементарных коллапсирований называется коллапсированием.

Согласно определениям 9.1 и 9.2 m -мерный полиэдр P допускает коллапсирование тогда и только тогда, когда содержит симплекс σ^{m-1} , для которого $\text{card } \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P) = 1$. Если таких $(m-1)$ -мерных симплексов в комплексе $K(P)$ нет, то полиэдр является неколлапсируемым. Коллапсирование $P \rightarrow Q$ считается полным, если Q – неколлапсируемый полиэдр. Далее, как правило, без дополнительных пояснений будут рассматриваться полные коллапсирования.

Теорема 9.1. Пусть P – полиэдр размерности m , а его подполиэдр $Q \subset P$ получен коллапсированием $P \rightarrow Q$. Тогда включение $i: Q \rightarrow P$ является гомотопической эквивалентностью.

Доказательство. Рассмотрим сначала элементарное коллапсирование $P \rightarrow P_1$, для которого $K(P_1) = K(P) \setminus \{\sigma^{m-1}, \sigma^m\}$.

Пусть $\delta = \partial\sigma^m \setminus Int(\sigma^{m-1})$, $P \subset R^N$, а L – прямая в R^N , проходящая через барицентры симплексов σ^{m-1} и σ^m . Для любой точки $w \in \sigma^m$ обозначим символом L_w прямую в R^N , проходящую через w и параллельную прямой L . Полагая $f(w) = w$ для $w \in P_1$ и $f(w) = L_w \cap \delta$ для $w \in \sigma^m$, определим непрерывное отображение $f: P \rightarrow P_1$.

Пусть также $H(w, t) = (1-t)w + tf(w)$ для всех $w \in P$ и $t \in [0, 1]$. Поскольку симплекс σ^m является выпуклым множеством, то этим построено непрерывное отображение $H: P \times [0, 1] \rightarrow P$. При этом $H(w, 0) = w = id_P(w)$ и $H(w, 1) = f(w) = (i_1 \circ f)(w)$, где $i_1: P_1 \rightarrow P$ – включение. Полученные равенства означают, что i_1 и f – взаимно обратные гомотопические эквивалентности.

В общем случае коллапсирование $P \rightarrow Q$ представляет собой композицию элементарных коллапсирований $P_{k-1} \rightarrow P_k$, $k=1, \dots, l$, где $P_0 = P$ и $P_l = Q$. При этом для всех k P_k – подполиэдр полиэдра P_{k-1} , а потому определено включение $i_k : P_k \rightarrow P_{k-1}$. Очевидно, композиция $i_1 \circ \dots \circ i_l$ совпадает с включением $i : Q \rightarrow P$. Согласно доказанному выше отображения $i_k : P_k \rightarrow P_{k-1}$ являются гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, $i = i_1 \circ \dots \circ i_l$ – гомотопическая эквивалентность.

□

Из теорем 9.1 и 2.2 следует

Теорема 9.2. Если подполиэдр $Q \subset P$ получен коллапсированием $P \rightarrow Q$, то для всех $n > 0$ включение $i : Q \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $i_* : H_n(Q) \rightarrow H_n(P)$.

Рассмотрим циклы $z_1, \dots, z_r \in Z_n(Q)$ подполиэдра $Q \subset P$, полученного коллапсированием $P \rightarrow Q$. Тогда для них определены гомологические классы $[z_j]_Q$ в подполиэдре Q и гомологические классы $[z_j]_P$ в полиэдре P , $j=1, \dots, r$. Тогда согласно теореме 9.2 если $[z_1]_Q, \dots, [z_r]_Q$ – базис группы $H_n(Q)$, то $[z_1]_P, \dots, [z_r]_P$ – базис группы $H_n(P)$.

Таким образом, коллапсирование $P \rightarrow Q$ позволяет упростить задачу вычисления базисов групп гомологий $H_m(P)$ и $H_{m-1}(P)$, поскольку подполиэдр $Q \subset P$ содержит меньше симплексов размерностей m и $m-1$, чем исходный m -мерный полиэдр P .

Алгоритм 9.1. Коллапсирование m -мерного полиэдра

Вход: Списки симплексов $K^i(P)$, $i=0, \dots, m$, списки инциденций $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ для всех $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$.

Выход: Списки симплексов $K^i(Q)$, $i=0, \dots, m$, списки инциденций $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q)$ для всех $\sigma^{m-1} \in K^i(Q)$.

Шаг 1. Положим $K^i(Q) := K^i(P)$, для всех $i = 0, \dots, m$, $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q) := \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ для всех $\sigma^{m-1} \in K^i(Q)$.

Шаг 2. Создадим очередь $R := \emptyset$.

Шаг 3. Для каждого симплекса $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$ выполним 3.1 – 3.2.

3.1. Вычислим величину $k = \text{card } \partial^{-1}(\sigma^{m-1})$.

3.2. Если $k = 1$, то добавим σ^{m-1} в очередь R .

Шаг 4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 4.1 – 4.5.

4.1. Выберем симплекс $\sigma^{m-1} \in R$ и удалим его из R .

4.2. Если $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q) = \emptyset$, то вернемся к шагу 4.

4.3. Удалим симплекс σ^{m-1} из списка $K^{m-1}(Q)$.

4.4. Удалим симплекс $\sigma^m \in \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q)$ из списка $K^m(Q)$.

4.5. Для каждого симплекса $\tau^{m-1} \in \partial \sigma^m \setminus \{\sigma^{m-1}\}$ выполним 4.5.1 – 4.5.2.

4.5.1. Удалим симплекс σ^m из списка $\partial^{-1}(\tau^{m-1}, Q)$.

4.5.2. Если после этого $\text{card } \partial^{-1}(\tau^{m-1}, Q) = 1$, то добавим τ^{m-1} в очередь R .

Конец алгоритма.

Теорема 9.3. Подполиэдр $Q \subset P$ с симплициальным комплексом $K(Q) = \bigcup_{i=0}^m K^i(Q)$ получен коллапсированием $P \rightarrow Q$. При этом либо $\dim Q < m$, либо Q – неколлапсируемый полиэдр размерности m .

Доказательство. Согласно шагам 3.2 и 4.5.2 симплекс размерности $m-1$ добавляется в очередь R тогда и только тогда, когда ему инцидентен точно один m -мерный симплекс. Поэтому на шаге 4.1 либо $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q) = \emptyset$, либо $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, Q) = \{\sigma^m\}$. Следовательно, шаги 4.3 и 4.4 представляют собой элементарное коллапсирование. Этим первое утверждение доказано.

С другой стороны, согласно шагу 4.5 после завершения работы алгоритма для каждого $(m-1)$ -мерного симплекса $\tau^{m-1} \in K^{m-1}(Q)$ либо $\partial^{-1}(\tau^{m-1}, Q) = \emptyset$, либо $\text{card } \partial^{-1}(\tau^{m-1}, Q) > 1$. Если для всех $\tau^{m-1} \in K^{m-1}(Q)$ реализуется первый случай, то $\dim Q < m$. В противном случае $\dim Q = m$ и коллапсирование полиэдра Q на его собственный подполиэдр невозможно по определению 9.1. $\square$

10. Гомологии графов

Пусть P – одномерный полиэдр или, иначе говоря, граф. Тогда по теоремам 3.1 и 3.2 $H_0(P) \cong Z_2^l$, где l – количество компонент связности полиэдра P . Компоненты $P_1, \dots, P_l$ могут быть найдены с помощью алгоритма 3.1. При этом базис группы $H_0(P)$ состоит из наборов $V_1, \dots, V_l$, состоящих из вершин компонент $P_1, \dots, P_l$ соответственно.

Для всех $n > 1$ имеем $C_n(P) = 0$. Поэтому $H_n(P) = 0$ для тех же n и $B_1(P) = \text{im } \partial_2 = 0$. Следовательно, для графа P единственной содержательной топологической задачей является вычисление ранга и базиса группы гомологий $H_1(P)$, которая к тому же совпадает с группой циклов $Z_1(P) = \ker \partial_1$.

Для решения указанной задачи можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм 10.1. Вычисление ранга и базиса группы гомологий графа

Вход: Списки вершин $V(P) = K^0(P)$ и ребер $E(P) = K^1(P)$ графа P , списки инциденций $\partial^{-1}(v, P)$ для всех вершин $v \in V(P)$.

Выход: Целое число $r \geq 0$ и цепи $z_k \in C_1(P)$, $k = 1, \dots, r$, при $r > 0$.

Шаг 1. Положим $k := 0$.

Шаг 2. Положим $V(D) := \emptyset$, $E(D) := \emptyset$, $Q := \emptyset$ и создадим очередь $R := \emptyset$.

Шаг 3. Выберем вершину $u \in V(P)$ и добавим ее в списки $V(D)$ и R .

Шаг 4. Пока $R \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 4.1 – 4.3.

4.1. Выберем вершину $v \in R$ и удалим ее из R .

4.2. Если $\partial^{-1}(v, P) = \emptyset$, то вернемся к шагу 4.

4.3. Для каждого ребра $a \in \partial^{-1}(v, P)$ выполним 4.3.1 – 4.3.2.

4.3.1. Выберем вершину $w \in \partial a \setminus \{v\}$ и удалим ребро a из списка $\partial^{-1}(w, P)$.

4.3.2. Если $w \in V(D)$, то добавим ребро a в список Q и вернемся к шагу 4.3.

4.3.3. Добавим ребро a в список $E(D)$.

4.3.4. Добавим вершину w в список $V(D)$ и очередь R .

4.3.5. Положим $e(w) = a$.

Шаг 5. Для всех $b \in Q$ выполним действия 5.1 – 5.3.

5.1. Положим $k := k + 1$.

5.2. Положим $z_k := b$.

5.3. Для обеих вершин $w \in \partial b$ выполним 5.3.1 – 5.3.3.

5.3.1. Если $w = u$, то вернемся к шагу 5.3.

5.3.2. Положим $z_k := z_k + e(w)$.

5.3.3. Выберем вершину $v \in \partial(e(w)) \setminus \{w\}$.

5.3.4. Положим $w := v$ и вернемся к шагу 5.3.1.

Шаг 6. Положим $V(P) := V(P) \setminus V(D)$.

Шаг 7. Если $V(P) \neq \emptyset$, то вернемся к шагу 2.

Шаг 8. Положим $r := k$.

Конец алгоритма.

Теорема 10.1. Если после завершения работы алгоритма 10.1 $r = 0$, то $H_1(P) = 0$. В противном случае $H_1(P) \cong Z_2^r$ и $z_1, \dots, z_r$ – базис группы $H_1(P)$.

Доказательство. Сначала предположим, что полиэдр P связан.

Докажем, что в этом случае граф D с множеством вершин $V(D)$ и множеством ребер $E(D)$ является деревом.

Допустим, что это не так, то есть существует отличный от нуля цикл $z \in Z_1(D)$. Пусть $V(z)$ – список вершин цикла z . Выберем вершину $v \in V(z)$, которая последней из элементов списка $V(z)$ вошла в $V(D)$. Так как $z \neq 0$, то v не может совпадать с начальной вершиной u . Следовательно, она могла попасть в список $V(D)$ только на шаге 4.3.4.

В цикле z имеется не менее двух ребер, инцидентных вершине v . Поскольку вершина v рассматривается в этот момент впервые, только одно из указанных ребер может быть удалено из списка инциденций $\partial^{-1}(v, P)$ на шаге 4.1.

Одновременно с попаданием в список $V(D)$ вершина v оказывается и в очереди R . Поскольку процесс может остановиться только при $R = \emptyset$, то через некоторое время вершина v извлекается из очереди R на шаге 4.1. Согласно предыдущему абзацу в этот момент список $\partial^{-1}(v, P)$ содержит хотя бы одно ребро a цикла z . Выберем вершину $w \in \partial a \setminus \{v\}$, как на шаге 4.3.1. Тогда $w \in V(z)$.

При этом в силу $a \in z \in Z_1(D)$ имеем $a \in E(D)$. С другой стороны, по выбору v вершина w должна была оказаться в списке $V(D)$ раньше, чем v . Следовательно, на шаге 4.3.2 ребро a должно попасть в список Q . Так как по построению $V(D) \cap Q = \emptyset$, то мы пришли к противоречию. Значит, наше допущение неверно, и на, самом деле, граф D не содержит ненулевых циклов.

В случае связности полиэдра P после окончания работы алгоритма имеет место равенство $V(D) = V(P)$. Поэтому D – максимальное по включению дерево в графе P .

Равенство $r = 0$ означает, что $Q = \emptyset$. Но тогда $D = P$ и по доказанному выше $H_1(P) = H_1(D) = 0$. Пусть далее $r > 0$.

Согласно шагу 5 для всех $k = 1, \dots, r$ цепь z_k есть сумма ребра b и путей в D , соединяющих его концы с начальной вершиной u . Поэтому $z_k \in Z_1(P)$.

Для любой подпоследовательности $\{i_1, \dots, i_l\} \subset \{1, \dots, r\}$ сумма $z_{i_1} + \dots + z_{i_l}$ не может равняться нулю, поскольку по построению цикл z_{i_1} содержит ребро $b_{i_1} \in Q$, которое не входит в циклы набора $z_{i_2}, \dots, z_{i_l}$. Отсюда следует, что циклы $z_1, \dots, z_r$ линейно независимы.

Рассмотрим теперь произвольный цикл $z \in Z_1(P)$. Так как D – дерево, то найдутся принадлежащие z ребра из списка Q . Пусть $z \cap Q = \{b_{j_1}, \dots, b_{j_m}\}$, а $z_{j_1}, \dots, z_{j_m}$ – циклы, построенные на шаге 5 с помощью ребер $b_{j_1}, \dots, b_{j_m}$. Положим $z' = z + z_{j_1} + \dots + z_{j_m}$. Тогда $z' \cap Q = \emptyset$, следовательно, $z' \in Z_1(D)$. Согласно доказанному выше тогда $z' = 0$ и потому $z = z_{j_1} + \dots + z_{j_m}$.

Таким образом, для связного P набор $z_1, \dots, z_r$ представляет собой базис группы $H_1(P) = Z_1(P)$.

Если же полиэдр P состоит из нескольких компонент связности, то сначала строится базис группы $H_1(P_1)$ для одной компоненты P_1 . Затем на шаге 7 обнаруживается наличие другой компоненты P_2 . После этого происходит возврат к шагу 2, с которого начинается построения базиса группы $H_1(P_2)$. При этом по окончании работы алгоритма будет построен набор $z_1, \dots, z_r$, содержащий базисы групп гомологий для всех компонент связности полиэдра P . По теореме 3.1 он представляет собой базис группы $H_1(P)$. $\square$

11. Вычисление базисов групп гомологий двумерных псевдомногообразий

Для многообразий и псевдомногообразий размерности 2 вычисление базисов групп гомологий может быть выполнено с помощью одних и тех же алгоритмов. Поэтому мы сразу рассмотрим более общий случай.

Теорема 11.1. Пусть P – сильно связанное псевдомногообразие размерности m и $z = K^m(P)$. Тогда $H_m(P) = \langle z \rangle \cong Z_2$ при $\partial P = \emptyset$ и $H_m(P) = 0$ при $\partial P \neq \emptyset$.

Доказательство. Допустим, что имеется цикл $x \in Z_m(P)$, отличный от нуля и не равный цепи z . Положим $y = x + z$. Тогда $y \neq 0$ и потому найдутся m -мерные симплексы $\sigma^m \in x$ и $\lambda^m \in y$.

Поскольку полиэдр P сильно связан, то существует m -мерный путь $X = \tau_0^m + \dots + \tau_q^m$ в P с началом $\tau_0^m = \sigma^m$ и концом $\tau_q^m = \lambda^m$. Пусть k – наибольший элемент последовательности $\{0, 1, \dots, q\}$, для которого $\tau_k^m \in x$. Согласно равенству $\tau_q^m = \lambda^m$ имеем $0 \leq k < q$. При этом $\tau_{k+1}^m \in y$.

По построению для симплекса $\sigma^{m-1} = \tau_k^m \cap \tau_{k+1}^m$ в списке $\partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ имеются симплексы из цепей x и y . Так как $\partial x = 0$, то количество элементов в пересечении $x \cap \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)$ должно быть четным числом, следовательно, $\text{card}(x \cap \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P)) \geq 2$. В итоге $\text{card } \partial^{-1}(\sigma^{m-1}, P) \geq 3$, что противоречит теореме 6.1.

Итак, для псевдомногообразия P циклов размерности m , отличных от нуля и цепи z , быть не может.

Осталось заметить, что по той же теореме 6.1 при $\partial P = \emptyset$ любой симплекс $\sigma^{m-1} \in K^{m-1}(P)$ инцидентен ровно двум симплексам из $K^m(P)$. Поэтому m -мерная цепь $z = K^2(P)$ является циклом, и согласно доказанному выше $H_m(P) = Z_m(P) = \langle z \rangle \cong Z_2$. Если же $\partial P \neq \emptyset$, то набор $K^{m-1}(P)$ содержит симплекс, инцидентный только одному m -мерному симплексу полиэдра P . Поэтому $z \notin Z_m(P)$ и $H_m(P) = Z_m(P) = 0$.

Согласно теореме 11.1 для сильно связанного двумерного псевдомногообразия P вычисление группы гомологий $H_2(P)$ и ее базиса сводится к проверке наличия или отсутствия краевых ребер. Если их нет, то $H_2(P) \cong Z_2$ и $z = K^2(P)$ – базис группы $H_2(P)$. При $\partial P \neq \emptyset$ группа гомологий $H_2(P)$ равна нулю. $\square$

Теорема 11.2. Предположим, что m -мерное псевдомногообразие P состоит из компонент сильной связности $P_1, \dots, P_q$. Тогда если $\partial P_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, q$, то $H_m(P) = 0$. Если найдется такое $k \in \{1, \dots, q\}$, что $\partial P_i = \emptyset$ для $i = 1, \dots, k$ и $\partial P_i \neq \emptyset$ для $i = k+1, \dots, q$, то $H_m(P) = \langle z_1, \dots, z_k \rangle \cong Z_2^k$, где $z_i = K^m(P_i)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный цикл $x \in Z_m(P)$ и положим $x_i = x \cap K^m(P_i)$, $i = 1, \dots, q$. Тогда $\partial x_i = \partial x \cap K^{m-1}(P_i) = 0$ и потому $x_i \in Z_m(P_i)$.

Если $\partial P_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, q$, то по теореме 11.1 $x_i = 0$ для тех же i . При этом $x = x_1 + \dots + x_q = 0$. Следовательно, $H_m(P) = Z_m(P) = 0$.

Пусть далее $k \in \{1, \dots, q\}$, $\partial P_i = \emptyset$ для $i = 1, \dots, k$ и $\partial P_i \neq \emptyset$ для $i = k+1, \dots, q$. Тогда по той же теореме 11.1 $x_i = 0$ для $i > k$. Но для $i \leq k$ либо $x_i = 0$, либо $x_i = z_i = K^m(P_i)$. Поэтому в рассматриваемом случае цикл $x = x_1 + \dots + x_q$ равен линейной комбинации циклов $z_1, \dots, z_k$.

Осталось заметить, что циклы $z_1, \dots, z_k$ не имеют общих симплексов и потому линейно независимы. $\square$

Из теоремы 11.2 следует корректность следующего алгоритма для вычисления базиса группы $H_2(P) = Z_2(P)$ для произвольного двумерного псевдомногообразия P .

Алгоритм 11.1. Вычисление базиса группы $H_2(P)$ для двумерного псевдомногообразия P

Вход: Списки ребер $E(P) = K^1(P)$ и треугольников $T(P) = K^2(P)$ полиэдра P , списки инциденций $\partial^{-1}(a, P)$ для всех ребер $a \in E(P)$.

Выход: Целое число $k \geq 0$ и одномерные циклы $z_1, \dots, z_k \in Z_1(P)$ при $k > 0$.

Шаг 1. Положим $i := 0$.

Шаг 2. С помощью алгоритма 3.2 построим компоненты сильной связности $P_1, \dots, P_q$ полиэдра P .

Шаг 3. Для всех $j = 1, \dots, q$ выполним действия 3.1 – 3.2.

3.1. Найдем край ∂P_j .

3.2. Если $\partial P_j = \emptyset$, то положим $i := i + 1$ и $z_i = K^m(P_i)$.

Шаг 4. Положим $k := i$.

Конец алгоритма.

Для вычисления группы $H_1(P)$ нам понадобятся дополнительные свойства групп гомологий.

Теорема 11.3. Пусть M и N – правильно пересекающиеся полиэдры пространства R^L , $Q = M \cap N$ и $P = M \cup N$. Тогда определена и точна следующая последовательность групп и гомоморфизмов:

$$\dots \rightarrow H_n(Q) \xrightarrow{i_*} H_n(M) \times H_n(N) \xrightarrow{j_*} H_n(P) \xrightarrow{\Delta_*} H_{n-1}(Q) \rightarrow \dots \quad (11.1)$$

Доказательство. Так как $Q = M \cap N$ – подполиэдр полиэдров M и N , то $C_n(Q) \subset C_n(M)$ и $C_n(Q) \subset C_n(N)$. При этом включения $i_1 : C_n(Q) \rightarrow C_n(M)$ и $i_2 : C_n(Q) \rightarrow C_n(N)$ индуцируют гомоморфизмы $i_{1*} : H_n(Q) \rightarrow H_n(M)$ и $i_{2*} : H_n(Q) \rightarrow H_n(N)$ посредством формул $i_{1*}([z]_Q) = [z]_M$ и $i_{2*}([z]_Q) = [z]_N$, где символы $[z]_Q$, $[z]_M$ и $[z]_N$ обозначают гомологические классы цикла $z \in Z_n(Q)$ в полиэдрах Q , M и N соответственно. Полагая $i_*([z]_Q) = (i_{1*}([z]_Q), i_{2*}([z]_Q)) = ([z]_M, [z]_N)$, получим гомоморфизм $i_* : H_n(Q) \rightarrow H_n(M) \times H_n(N)$.

Если $x \in C_n(M)$ и $y \in C_n(N)$, то $x + y \in C_n(P)$. Поэтому полагая $j(x, y) = x + y$, построим гомоморфизм $j : C_n(M) \times C_n(N) \rightarrow C_n(P)$. Последний в силу равенства $\partial(x + y) = \partial x + \partial y$ индуцирует гомоморфизм $j_* : H_n(M) \times H_n(N) \rightarrow H_n(P)$ посредством формулы $j_*([x]_M, [y]_N) = [x + y]_P$.

Если $c \in Z_n(P)$, то $c = c_M + c_N$, где $c_M \in C_n(M)$ и $c_N \in C_n(N)$. При этом цепь $\partial c_M = \partial c_N$ является $(n-1)$ -мерным циклом пересечения $Q = M \cap N$. Нетрудно видеть, что формула $\Delta_*([c]_P) = [\partial c_M]_Q = [\partial c_N]_Q$ корректно определяет гомоморфизм $\Delta_* : H_n(P) \rightarrow H_{n-1}(Q)$.

Этим последовательность (11.1) построена. Докажем ее точность.

По построению

$$(i_* \circ \Delta_*)([c]_P) = (i_{1*}([\partial c_M]_Q), i_{2*}([\partial c_N]_Q)) = ([\partial c_M]_M, [\partial c_N]_N) = (0, 0).$$

для всех $[c]_P \in H_{n+1}(P)$. Аналогично,

$$(j_* \circ i_*)([z]_Q) = j_*([z]_M, [z]_N) = [z + z]_P = 0 \text{ и } (\Delta_* \circ j_*)([x]_M, [y]_N) = \Delta_*([x + y]_P) = [\partial x]_Q = [\partial y]_Q$$

для любых $[z]_Q \in H_n(Q)$, $[x]_M \in H_n(M)$ и $[y]_N \in H_n(N)$. Следовательно, $i_* \circ \Delta_* = 0$, $j_* \circ i_* = 0$ и $\Delta_* \circ j_* = 0$, что равносильно включениям $\text{im } \Delta_* \subset \ker i_*$, $\text{im } i_* \subset \ker j_*$ и $\text{im } j_* \subset \ker \Delta_*$.

Допустим, что $[z]_Q \in \ker i_*$. Тогда $[z]_M = 0$ и $[z]_N = 0$, и следовательно, найдутся цепи $c_M \in C_{n+1}(M)$ и $c_N \in C_{n+1}(N)$, удовлетворяющие равенствам $\partial c_M = z$ и $\partial c_N = z$. Положив $c = \partial c_M + \partial c_N$, получим цикл $c \in C_{n+1}(P)$, для которого $\Delta_*([c]_P) = [z]_Q$. Последнее означает, что $[z]_Q \in \text{im } \Delta_*$. Этим доказано включение $\ker i_* \subset \text{im } \Delta_*$.

Если $([x]_M, [y]_N) \in \ker j_*$, то $[x + y]_P = 0$. При этом существует цепь $c \in C_{n+1}(P)$, для которой $\partial c = x + y$. Разложим ее в сумму $c = c_M + c_N$, где $c_M \in C_n(M)$ и $c_N \in C_n(N)$. Тогда цепь $z = x + \partial c_M = y + \partial c_N$ является циклом полиэдра $Q = M \cap N$. Поскольку $[z]_M = [x]_M$ и $[z]_N = [y]_N$, то $i_*([z]_Q) = ([x]_M, [y]_N)$ и потому $([x]_M, [y]_N) \in \text{im } i_*$. Следовательно, $\ker j_* \subset \text{im } i_*$.

Пусть, наконец, $[c]_P \in \ker \Delta_*$. Тогда $[\partial c_M]_Q = [\partial c_N]_Q = 0$ и потому имеется такая цепь $e \in C_n(Q)$, что $\partial e = \partial c_M = \partial c_N$. При этом $x = e + c_M \in Z_n(M)$, $y = e + c_N \in Z_n(N)$ и $j_*([x]_M, [y]_N) = [c]_P$. Таким образом $[c]_P \in \text{im } j_*$, и следовательно, $\ker \Delta_* \subset \text{im } j_*$.

Шесть доказанных включений эквивалентны трем равенствам $\text{im } \Delta_* = \ker i_*$, $\text{im } i_* = \ker j_*$ и $\text{im } j_* = \ker \Delta_*$. Так как это верно для любых n , то последовательность (11.1) точна. $\square$

Теорема 11.4. Пусть P – полиэдр размерности $m \geq 2$ с симплициальным комплексом $K(P)$, $\sigma^m \in K^m(P)$ и P' – подполиэдр полиэдра P , имеющий симплициальный комплекс $K(P') = K(P) \setminus \{\sigma^m\}$. Тогда:

если существует содержащий σ^m цикл $c \in Z_m(P)$, то $H_m(P) \cong H_m(P') \times Z_2$ и включение $i': P' \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $i'_*: H_{m-1}(P') \rightarrow H_{m-1}(P)$;

в противном случае $H_m(P) = H_m(P')$ и $H_{m-1}(P') \cong H_{m-1}(P) \times Z_2$.

Доказательство. Положим $M = P'$, $N = \sigma^m$ и $Q = |\partial \sigma^m|$. Тогда $Q = M \cap N$ и $P = M \cup N$. Следовательно, у нас имеется точная последовательность (11.1). В силу равенства $\dim Q = m-1$ имеем $H_m(Q) = 0$. Поскольку симплекс σ^m гомотопически эквивалентен любой своей вершине и $m-1 > 0$, то $H_m(N) = 0$ и $H_{m-1}(N) = 0$. Так как $Q = |\partial \sigma^m|$ – связное замкнутое многообразие размерности $m-1$, то по теореме 11.1 $H_{m-1}(Q) = \langle \partial \sigma^m \rangle \cong Z_2$. Также заметим, что $H_{m-2}(Q) = 0$ при $m > 2$ и $i'_*: H_0(P') \rightarrow H_0(P)$ – мономорфизм при $m = 2$. В последней ситуации гомоморфизм $\Delta_*: H_{m-1}(P) \rightarrow H_{m-2}(Q)$ также равен нулю. Кроме того, $i'_*([x]_{P'}) = [x]_P = j_*([x]_M, 0)$. Подставив найденные значения в (11.1), получим последовательность

$$0 \rightarrow H_m(P') \xrightarrow{i'_*} H_m(P) \xrightarrow{\Delta_*} \langle \partial \sigma^m \rangle \cong Z_2 \xrightarrow{i_*} H_{m-1}(P') \xrightarrow{i'_*} H_{m-1}(P) \rightarrow 0. \quad (11.2)$$

Из равенств $\dim P = m$ и $\dim Q = m-1$ следует, что $H_m(P) = Z_m(P)$ и $H_{m-1}(Q) = Z_{m-1}(Q)$.

Предположим, что в группе $Z_m(P)$ имеется цикл c , содержащий симплекс σ^m . Тогда $c = [c]_P \in H_m(P)$, $c_N = \sigma^m$ и $[\partial c_N]_Q = \partial \sigma^m$. При этом по построению гомоморфизма $\Delta_*: H_m(P) \rightarrow H_{m-1}(Q)$ имеем $\Delta_*([c]_P) = [\partial c_N]_Q = \partial \sigma^m$. Последнее означает, что Δ_* – эпиморфизм.

В силу точности (11.2) это влечет равенства $i_{1*} = 0$ и $\ker i'_{1*} = 0$. Поэтому (11.2) распадается на последовательности

$$0 \rightarrow H_m(P') \xrightarrow{i'_*} H_m(P) \xrightarrow{\Delta_*} Z_2 \rightarrow 0 \text{ и } 0 \rightarrow H_{m-1}(P') \xrightarrow{i'_*} H_{m-1}(P) \rightarrow 0.$$

Точность последних эквивалентна тому, что $H_m(P) \cong H_m(P') \times Z_2$ и $i'_{*}: H_{m-1}(P') \rightarrow H_{m-1}(P)$ – изоморфизм.

Если ни один цикл из $Z_m(P)$ не содержит симплекс σ^m , то $\Delta_* = 0$. При этом (11.2) распадается на последовательности

$$0 \rightarrow H_m(P') \xrightarrow{i'_*} H_m(P) \rightarrow 0 \text{ и } 0 \rightarrow Z_2 \xrightarrow{i_{1*}} H_{m-1}(P') \xrightarrow{i'_*} H_{m-1}(P) \rightarrow 0.$$

Из их точности следует, что $H_m(P) = H_m(P')$ и $H_{m-1}(P') \cong H_{m-1}(P) \times Z_2$. $\square$

Теорема 11.4 в ряде случаев позволяет существенно упростить вычисление групп гомологий и их базисов. В частности, это относится к случаю, когда P – двумерное псевдомногообразие.

Алгоритм 11.2. Вычисление базиса группы $H_1(P)$ для двумерного псевдомногообразия P

Вход: Списки вершин $V(P) = K^0(P)$, ребер $E(P) = K^1(P)$ и треугольников $T(P) = K^2(P)$ полиэдра P , списки инциденций $\partial^{-1}(v, P)$ и $\partial^{-1}(a, P)$ для всех вершин $v \in V(P)$ и ребер $a \in E(P)$.

Выход: Целое число $r \geq 0$ и одномерные циклы $z_1, \dots, z_r \in Z_1(P)$ при $r > 0$.

Шаг 1. Вычислим край ∂P .

Шаг 2. Если $\partial P \neq \emptyset$, то перейдем к шагу 4.

Шаг 3. Удалим произвольный треугольник $t \in T(P)$ из списка $T(P)$ и списков $\partial^{-1}(a, P)$ для всех $a \in \partial t$, положим $\partial P := \partial t$.

Шаг 4. С помощью алгоритма 9.1 выполним коллапсирование $P \rightarrow Q$.

Шаг 5. Если $T(Q) \neq \emptyset$, то положим $P := Q$ и вернемся к шагу 3.

Шаг 6. С помощью алгоритма 10.1 найдем неотрицательное целое число r и (при $r > 0$) циклы $z_1, \dots, z_r$, образующие базис группы $H_1(Q)$.

Конец алгоритма.

Теорема 11.5. Если после завершения работы алгоритма 11.1 $r = 0$, то $H_1(P) = 0$. В противном случае $H_1(P) \cong Z_2^r$ и гомологические классы $[z_1], \dots, [z_r]$ найденных циклов в полиэдре P образуют базис группы $H_1(P)$.

Доказательство. Начнем со вспомогательных утверждений.

Лемма 11.1. Пусть P' – сильно связное двумерное псевдомногообразие, $\partial P' \neq \emptyset$ и $P' \rightarrow Q'$ – полное коллапсирование. Тогда $\dim Q' = 1$.

Доказательство. Допустим, что $\dim Q' = 2$. Обозначим символом y набор всех треугольников полиэдра Q' . Тогда $y \in C_2(Q')$ и $y \neq 0$.

Так как $Q' \subset P'$, а P' – псевдомногообразие, то $\text{card } \partial^{-1}(a', Q') \leq 2$ для всех ребер $a' \in K^1(Q')$. С другой стороны, Q' – неколлапсируемый двумерный полиэдр. Поэтому $\text{card } \partial^{-1}(a', Q') \neq 1$ для тех же a' . Следовательно, если $a' \in K^1(|y|)$, то $\text{card } \partial^{-1}(a', |y|) = \text{card } \partial^{-1}(a', Q') = 2$. А это значит, что $y \in Z_2(Q')$ и потому $H_2(Q') = Z_2(Q') \neq 0$. Но тогда согласно теореме 9.2 и $H_2(P') \neq 0$.

Полученный результат противоречит теореме 11.1. Значит, наше допущение неверно и, на самом деле, $\dim Q' = 1$. $\square$

Лемма 11.2. Пусть Q – подполиэдр полиэдра P , для которого выполняется шаг 6 алгоритма 11.2. Тогда включение $\hat{i}: Q \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $\hat{i}_*: H_1(Q) \rightarrow H_1(P)$.

Доказательство. Рассмотрим компоненты сильной связности $P_1, \dots, P_q$ полиэдра P .

Сначала предположим, что $\partial P_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, q$. Тогда после шага 2 начнется коллапсирование $P \rightarrow Q$. Согласно лемме 11.1 в результате мы получим

подполиэдр $Q \subset P$ размерности 1 и потому после шага 5 сразу перейдем к шагу 6. По теореме 9.2 при этом включение $\hat{i}: Q \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $\hat{i}_*: H_1(Q) \rightarrow H_1(P)$.

Допустим далее, что $k \in \{1, \dots, q\}$, $\partial P_i = \emptyset$ для $i = 1, \dots, k$ и $\partial P_i \neq \emptyset$ для $i = k+1, \dots, q$. Положим $P^{(0)} = P$. На шаге 4 произойдет коллапсирование $P^{(0)} \rightarrow Q^{(0)}$. При этом включение $i^0: Q^{(0)} \rightarrow P^{(0)}$ является гомотопической эквивалентностью. По лемме 11.1 подполиэдр $Q^{(0)} \subset P^{(0)}$ не будет содержать треугольников из компонент $P_{k+1}, \dots, P_q$, а компоненты $P_1, \dots, P_k$ войдут в $Q^{(0)}$ целиком. Следовательно, по теореме 11.2 $H_m(Q^{(0)}) = \langle z_1, \dots, z_k \rangle \cong Z_2^k$, где $z_i = K^m(P_i)$ для $i = 1, \dots, k$. Последнее означает, что каждый треугольник t полиэдра $Q^{(0)}$ лежит в некотором двумерном цикле $z_i \in Z_2(Q^{(0)})$.

Пусть для определенности $t \in z_k$. Тогда, удалив на шаге 3 треугольник t из симплициального комплекса $K(Q^{(0)})$, получим подполиэдр $P^{(1)} \subset Q^{(0)}$. Согласно теореме 11.4 включение $j^1: P^{(1)} \rightarrow Q^{(0)}$ индуцирует изоморфизм $j_*^1: H_1(P^{(1)}) \rightarrow H_1(Q^{(0)})$. После коллапсирования $P^{(1)} \rightarrow Q^{(1)}$ будет построен подполиэдр $Q^{(1)} \subset P^{(1)}$, не содержащий треугольников из компоненты сильной связности P_k .

Повторив шаги 3 – 5 еще $k-1$ раз, мы придем к подполиэдру $Q = Q^{(k)} \subset P^{(k)}$ размерности 1 и перейдем к шагу 6. При этом будет построена последовательность подполиэдров $Q^{(l)} \subset P^{(l)} \subset Q^{(l-1)} \subset P^{(l-1)}$, $l = 1, \dots, k$, для которых включения $i^l: Q^{(l)} \rightarrow P^{(l)}$ являются гомотопическими эквивалентностями, а включения $j^l: P^{(l)} \rightarrow Q^{(l-1)}$ индуцируют изоморфизмы $j_*^l: H_1(P^{(l)}) \rightarrow H_1(Q^{(l-1)})$ по теореме 11.4. Очевидно, композиция $i^0 \circ j^1 \circ i^1 \circ \dots \circ j^k \circ i^k$ совпадает с включением $\hat{i}: Q \rightarrow P$. Согласно доказанному оно индуцирует изоморфизм $\hat{i}_*: H_1(Q) \rightarrow H_1(P)$.

Наконец, если $\partial P_i = \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, q$, то $Q^{(0)} = P^{(0)}$ и $i^0 = \text{id}$. В остальном доказательство аналогично тому, что было в предыдущем случае. $\square$

Теперь можно завершить доказательство теоремы. Если после шага 6 $r=0$, то по лемме 11.2 $H_1(P) \cong H_1(Q) = 0$. В противном случае $\hat{i}(z_p) = [z_p]$ для всех $p=1, \dots, r$. Поэтому в силу той же леммы 11.2 $[z_1], \dots, [z_r]$ – базис группы $H_1(P)$. $\square$

12. Вычисление базисов групп гомологий разветвленных поверхностей

В этом разделе P – произвольный однородный двумерный полиэдр в трехмерном пространстве R^3 . Он уже, вообще говоря, не является псевдомногообразием, хотя этот частный случай также не исключен. Такие полиэдры мы для краткости называем разветвленными поверхностями.

Как и в предыдущем разделе, сначала рассмотрим метод вычисления базиса группы $H_2(P)$.

Теорема 12.1. Если $P_1, \dots, P_l$ – компоненты сильной связности поверхности P , то $H_2(P) \cong H_2(P_1) \times \dots \times H_2(P_l)$. При этом если $X_1, \dots, X_l$ базисы групп $H_2(P_1), \dots, H_2(P_l)$ соответственно, то $X = X_1 \cup \dots \cup X_l$ базис группы $H_2(P)$.

Доказательство теоремы 12.1 аналогично обоснованию теоремы 3.1 и потому предоставляется читателю в качестве упражнения.

Далее будет предполагаться, что поверхность P сильно связна. В общем случае согласно теореме 12.1 базис группы $H_2(P)$ представляет собой объединение базисов групп двумерных гомологий компонент сильной связности. Поэтому его построение сведется к применению нижеследующего алгоритма к каждой из указанных компонент.

Алгоритм 12.1. Вычисление двумерных базисных циклов разветвленной поверхности

Вход: Списки ребер $E(P) = K^1(P)$ и треугольников $T(P) = K^2(P)$ полиэдра P , списки инциденций $\partial^{-1}(a, P)$ для всех ребер $a \in E(P)$.

Выход: Целое число $r \geq 0$, двумерные циклы $z_1, \dots, z_r \in Z_2(P)$ при $r > 0$.

Шаг 1. С помощью алгоритма 9.1 выполним коллапсирование $P \rightarrow Q$ и получим списки $E(Q) = K^1(Q)$, $T(Q) = K^2(Q)$ и $\partial^{-1}(a, Q)$ для всех $a \in E(Q)$.

Шаг 2. Положим $\hat{T} := T(Q)$.

Шаг 3. Для каждого треугольника $t \in T(Q)$ поменяем местами первые две вершины и добавим полученный треугольник в список $\hat{T}$.

Шаг 4. Положим $\tilde{V} := \hat{T}$ и $\tilde{E} := \emptyset$.

Шаг 5. Для каждого ребра $a \in E(Q)$ выполним процедуры 5.1 – 5.2.

5.1. Если $\text{card } \partial^{-1}(a, Q) = n > 2$, то выполним операции 5.1.1 – 5.1.5.

5.1.1. Ориентируем треугольники из списка $\partial^{-1}(a, Q)$ так, чтобы они индуцировали на ребре a его исходную ориентацию.

5.1.2. Выберем ориентированный треугольник из списка $\partial^{-1}(a, Q)$ и обозначим его символом t_0 . Затем для каждого треугольника $t_k \in \partial^{-1}(a, Q)$ вычислим двугранный угол $\phi_k \in (0, 2\pi)$ от треугольника t_0 до треугольника t_k в положительном направлении, определенном ориентацией ребра a .

5.1.3. Перенумеруем элементы списка $\partial^{-1}(a, Q)$ так, чтобы для треугольников $t_i, t_j \in \partial^{-1}(a, Q)$ с номерами $i < j$ выполнялось неравенство $\phi_i < \phi_j$.

5.1.4. Построим список $D^{-1}(a) := \{s_1, \dots, s_{2n}\}$, полагая $s_1 := t_0$, $s_{2k} := -t_k$ и $s_{2k+1} := t_k$ для $k = 1, \dots, n-1$ и $s_{2n} := -t_0$.

5.1.5. Добавим пары $\{s_{2k-1}, s_{2k}\} \in D^{-1}(a)$, $k = 1, \dots, n$, в список $\tilde{E}$.

5.2. Если $\text{card } \partial^{-1}(a, Q) = 2$, то выполним операции 5.2.1 – 5.2.2.

5.2.1. Ориентируем треугольники $t_0, t_1 \in \partial^{-1}(a, Q)$ так, чтобы они индуцировали на ребре a его исходную ориентацию.

5.2.2. Положим $s_1 := t_0$, $s_2 := -t_1$, $s_3 := t_1$, $s_4 := -t_0$ и $D^{-1}(a) := \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$.

5.2.3. Добавим пары $\{s_{2k-1}, s_{2k}\} \in D^{-1}(a)$, $k=1,2$, в список $\tilde{E}$.

Шаг 6. С помощью алгоритма 3.1 найдем компоненты связности $\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_q$ абстрактного графа $\tilde{G}$ с множеством вершин $\tilde{V}$ и множеством ребер $\tilde{E}$.

Шаг 7. Для каждого $i=1, \dots, q$ вычислим алгебраическую сумму x_i треугольников из списка $K^0(\tilde{G}_i)$.

Шаг 8. Удалим из списка $X = \{x_1, \dots, x_q\}$ цепи, равные нулю.

Шаг 9. Если после этого $X = \emptyset$, то положим $r := 0$ и остановим алгоритм.

Шаг 10. Удалим из списка X произвольный элемент. Затем положим $r := \text{card } X$ и оставшиеся в X цепи обозначим символами $z_1, \dots, z_r$.

Конец алгоритма.

Теорема 12.2. Если после завершения работы алгоритма 12.1 $r = 0$, то $H_2(P) = 0$. В противном случае $H_2(P) = Z_2^r$ и циклы $z_1, \dots, z_r$ образуют базис группы $H_2(P)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $r > 0$. Докажем, что при этом для каждого $i=1, \dots, q$ цепь x_i является циклом по модулю 2. Для этого рассмотрим произвольное ребро $c \in E(Q)$ и обозначим символом $D^{-1}(c, x_i)$ список инцидентных с c треугольников цепи x_i . Если список $D^{-1}(c, x_i)$ пуст, то $c \notin \partial x_i$. Поэтому далее будем предполагать, что $D^{-1}(c, x_i) \neq \emptyset$.

Напомним, что список $D^{-1}(c) = D^{-1}(c, Q)$, построенный на шаге 5, состоит из четного числа ориентированных треугольников $\{s_1, \dots, s_{2n}\}$. В силу неколлапсируемости полиэдра Q имеет место неравенство $n \geq 2$. Разобьем $D^{-1}(c)$ на пары $\{s_{2j-1}, s_{2j}\}$, $j=1, \dots, n$.

Согласно шагам 5 – 7 треугольники s_{2j-1} и s_{2j} принадлежат или нет цепи x_i одновременно. А именно, $s_{2j-1}, s_{2j} \in x_i$ тогда и только тогда, когда пара $\{s_{2j-1}, s_{2j}\}$

является ребром компоненты связности $\tilde{G}_i$ абстрактного графа $\tilde{G}$ и $s_{2j-1} \neq -s_{2j}$. Это значит, что $\text{card } D^{-1}(c, x_i)$ – четное число и потому $c \notin \partial x_i$.

Итак, для любого ребра $c \in E(Q)$ имеем $c \notin \partial x_i$. Следовательно, $x_i \in Z_2(Q)$.

Далее убедимся в том, что циклы $z_1, \dots, z_r$ линейно независимы. Допустим, что это не так. Тогда сумма некоторых из этих циклов равна нулю. С точностью до нумерации можно считать, что

$$z_1 + \dots + z_m = 0, \quad (12.1)$$

где $1 \leq m \leq r$. В силу шага 8 на самом деле $m > 1$.

Пусть $\hat{M}$ – объединение циклов $z_1, \dots, z_m$, а $\hat{N}$ – набор всех остальных треугольников из списка $\hat{T}$. Согласно шагам 6 и 7 алгоритма произвольный ориентированный треугольник $t \in \hat{T}$ может входить только в один из построенных циклов. Отсюда и из (12.1) следует, что множество $\hat{M}$ содержит четное число треугольников, причем вместе с любым треугольником t в $\hat{M}$ имеется тот же треугольник с противоположной ориентацией.

В силу неравенства $m > 1$ и шага 10 ни одно из множеств $\hat{M}$ и $\hat{N}$ не может быть пустым. Поэтому найдутся треугольники $t \in \hat{M}$ и $t_* \in \hat{N}$. Так как полиэдр P сильно связан, то в нем имеется двумерный путь $Y = \{t_0, \dots, t_h\}$, соединяющий t и t_* . Без ограничения общности можно считать, что треугольники из X ориентированы когерентно, то есть для любого $j = 1, \dots, h$ треугольники t_{j-1} и t_j индуцируют на общей стороне $a_j = t_{j-1} \cap t_j$ противоположные ориентации, и $t_0 = t$. При этом треугольники t_h и t_* либо совпадают, либо имеют противоположные ориентации. Если $X \subset \hat{M}$, то согласно результатам предыдущего абзаца в обоих случаях $t_* \in \hat{M}$, что противоречит выбору ориентированного треугольника t_* . Следовательно, найдется такое $j \in \{1, \dots, h\}$, что $t_{j-1} \in \hat{M}$, а $t_j \in \hat{N}$.

Согласно шагу 5 алгоритма треугольники t_{j-1} и t_j входят в список $D^{-1}(a_j) = \{s_1, \dots, s_{2n}\}$. Мы доказали, что $D^{-1}(a_j)$ не лежит целиком ни в $\hat{M}$, ни в $\hat{N}$. Поэтому найдутся соседние элементы $s_{l-1}, s_l \in D^{-1}(a_j)$, один из которых принадлежит $\hat{M}$, а другой – множеству $\hat{N}$.

Полученный результат немедленно приводит к противоречию. Действительно, если число l четно, то согласно шагам 5.1.5 и 5.2.3 алгоритма треугольники s_{l-1} и s_l должны были оба попасть в один из построенных циклов и, следовательно, принадлежать одному из множеств $\hat{M}$ и $\hat{N}$. Если же l нечетно, то согласно 5.1.4 и 5.2.2 s_{l-1} и s_l представляют собой один и тот же треугольник, но с противоположными ориентациями. Как доказано выше, в этой ситуации они также обязаны оба принадлежать либо $\hat{M}$, либо $\hat{N}$.

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно и на самом деле циклы $z_1, \dots, z_r$ линейно независимы.

Так как $\dim Q = \dim P = 2$, то $H_2(Q) = Z_2(Q)$. Отсюда и из доказанного выше утверждения следует, что

$$r \leq \text{rank } H_2(Q). \quad (12.2)$$

Согласно лемме 3.3 из [7] пространство R^3 можно триангулировать так, чтобы поверхность Q стала подполиэдром полиэдра R^3 . Зададим на R^3 правую ориентацию. Она индуцирует ориентации на всех трехмерных симплексах. Зафиксируем их. Если t – двумерная грань 3-симплекса σ , то на t индуцируется ориентация, которую мы будем считать согласованной с ориентацией симплекса σ . При этом соответствующий вектор нормали к t направлен внутрь симплекса σ .

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ – список 2-циклов полиэдра Q , построенных в ходе работы алгоритма до шага 10, а $O = \{U_1, \dots, U_\rho\}$ – набор компонент связности множества $R^3 \setminus Q$. Согласно шагам 4 и 6 данного алгоритма и шагу 3 алгоритма 3.1 построение произвольного цикла $x_i \in X$ начинается с некоторого начального

ориентированного треугольника t_0 . Треугольнику t_0 инцидентны два трехмерных симплекса пространства R^3 . Ориентация одного из них согласована с заданной ориентацией треугольника t_0 . Обозначим этот симплекс буквой σ_0 . Тогда найдется компонента $U_{k_i} \in O$, содержащая внутренность симплекса σ_0 . Полагая $g(x_i) = U_{k_i}$ для всех $x_i \in X$, определим отображение $g: X \rightarrow O$.

Докажем, что отображение $g: X \rightarrow O$ сюръективно. Для этого рассмотрим произвольную область $U \in O$ и обозначим буквой S совокупность трехмерных симплексов пространства R^3 , внутренности которых лежат в U . Тогда S – трехмерная цепь. Так как $Z_3(R^3) = 0$, то $\partial S \neq \emptyset$. Пусть $t_* \in \partial S$. Тогда существует симплекс $\sigma_* \in S$, для которого t_* является гранью. Симплекс σ_* индуцирует на t_* ориентацию, которую мы назовем положительной по отношению к области U .

Согласно шагу 6 найдется номер i , для которого треугольник t_* окажется вершиной компоненты связности $\tilde{G}_i$ абстрактного графа $\tilde{G}$. Пусть t_0 – начальная вершина компоненты $\tilde{G}_i$.

При $t_* = t_0$ имеем $\text{Int } \sigma_0 = \text{Int } \sigma_* \subset U$. Если же $t_* \neq t_0$, то в графе $\tilde{G}_i$ имеется путь, идущий из вершины t_0 в вершину t_* . В силу 5.1.5 и 5.2.3 каждое ребро этого пути представляет собой пару ориентированных треугольников, причем эти треугольники имеют общую сторону, на которой индуцируют противоположные ориентации. Таким образом, в Q существует двумерный путь $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ с конечным треугольником $t_p = t_*$, в котором любые два соседних треугольника t_{j-1} и t_j ориентированы когерентно. Поскольку треугольники t_{j-1} и t_j , $j \in \{1, \dots, p\}$, образуют пару вида $\{s_{2k-1}, s_{2k}\}$ из $D^{-1}(a_j)$ для их общего ребра $a_j = t_{j-1} \cap t_j$, то в силу построения списка $D^{-1}(a_n)$ на шаге 5 найдется трехмерный путь $Y_j = \{\sigma_{j_0}, \dots, \sigma_{j_{s_j}}\}$, в котором соседние симплексы $\sigma_{j_{l-1}}$ и σ_{j_l} также ориентированы когерентно, их общая грань τ_{j_l} не принадлежит поверхности Q , $t_{j-1} \in \partial \sigma_{j_0}$, $t_j \in \partial \sigma_{j_{s_j}}$, причем ориентации симплексов $\partial \sigma_{j_0}$ и $\partial \sigma_{j_{s_j}}$ согласованы с ориентациями треугольников

t_{j-1} и t_j соответственно. Из последнего свойства, в частности, следует, что $\sigma_{10} = \sigma_0$ и $\sigma_{ps_p} = \sigma_*$. Положим

$$V = \bigcup_{j=1}^p ((\bigcup_{l=0}^{s_j} \text{Int } \sigma_{jl}) \cup (\bigcup_{l=1}^{s_j} \text{Int } \tau_{jl})).$$

Множество V связно и не пересекается с полиэдром Q . Следовательно, оно целиком лежит в одной из компонент связности множества $R^3 \setminus Q$. Так как V содержит внутренность симплекса σ_* и $\text{Int } \sigma_* \subset U$, то $V \subset U$. При этом $\sigma_0 \subset V \subset U$ и $\sigma_* \in S$.

Предположим, что ориентированный треугольник $t_{**} = -t_*$ является вершиной той же компоненты связности $\tilde{G}_i$ графа $\tilde{G}$. Пусть σ_{**} – трехмерный симплекс полиэдра R^3 , инцидентный треугольнику t_{**} и отличный от σ_* . Тогда ориентации симплексов σ_{**} и t_{**} согласованы. При этом точно так, как это было сделано в предыдущем абзаце, можно построить связное подмножество $W \subset R^3 \setminus Q$, содержащее внутренности симплексов σ_0 и σ_{**} . При этом из включений $\text{Int } \sigma_0 \subset U$ и $\text{Int } \sigma_0 \subset W$ следует, что $W \subset U$. В результате $\text{Int } \sigma_{**} \subset U$ и потому $\sigma_{**} \in S$. Включения $\sigma_* \in S$ и $\sigma_{**} \in S$ противоречат тому, что $t_* \in \partial S$.

Таким образом, допущение неверно и, на самом деле, треугольник $-t_*$ не является вершиной графа $\tilde{G}_i$. Это означает, что для рассматриваемого i после шага 7 мы получим цепь x_i , не равную нулю. Но тогда $x_i \in X$ и после шага 8, а потому из включения $\text{Int } \sigma_0 \subset U$ следует, что $g(x_i) = U$.

Из сюръективности отображения $g: X \rightarrow O$ следует, что $r+1 \geq \rho$. По теореме Александера-Понтрягина $\rho-1 = \text{rank } H_2(Q)$ ([8], с. 159). Поэтому $r \geq \text{rank } H_2(Q)$. Последнее вместе с (12.2) влечет за собой равенство $r = \text{rank } H_2(Q)$. Так как циклы $z_1, \dots, z_r$ линейно независимы, то они образуют базис группы $H_2(Q) = Z_2(Q)$. Поскольку согласно шагу 1 и теореме 9.2 включение $i': Q \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $i'_*: H_2(Q) \rightarrow H_2(P)$, то этим в случае $r > 0$ теорема доказана.

Пусть далее $r = 0$. Это значит, что для каждого значения параметра i на шаге 7 мы получаем цепи $x_i = 0$. Последнее возможно только тогда, когда вместе с любым ориентированным треугольником t граф $\tilde{G}_i$ содержит и противоположно ориентированный треугольник $-t$. При этом, как показано выше, оба инцидентных треугольнику t трехмерных симплекса пространства R^3 лежат в одной компоненте связности множества $R^3 \setminus Q$. Следовательно, поверхность является односторонней, что равносильно связности множества $R^3 \setminus Q$. Отсюда согласно уже упоминавшейся теореме Александера-Понтрягина следует, что $\text{rank } H_2(Q) = 0$. При этом $H_2(P) = H_2(Q) = 0$. На этом доказательство теоремы полностью завершено. $\square$

Заметим, что после шага 8 алгоритма 12.1 список X либо пуст, либо содержит не менее двух циклов. Поэтому после шага 10 всегда $r > 0$.

Алгоритм 12.2. Вычисление базиса одномерной группы гомологий разветвленной поверхности

Вход: Списки вершин $V(P) = K^0(P)$, ребер $E(P) = K^1(P)$ и треугольников $T(P) = K^2(P)$ полиэдра P , списки инциденций $\partial^{-1}(v, P)$ и $\partial^{-1}(a, P)$ для всех вершин $v \in V(P)$ и ребер $a \in E(P)$.

Выход: Целое число $r \geq 0$ и одномерные циклы $z_1, \dots, z_r$ при $r > 0$.

Шаг 1. С помощью алгоритма 12.1 выполним коллапсирование $P \rightarrow Q$ и найдем базис $y_1, \dots, y_q$ группы $H_2(Q) \cong H_2(P)$. Положим $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$.

Шаг 2. Пока $Y \neq \emptyset$ будем выполнять действия 2.1 – 2.3.

2.1. Выберем и удалим цикл y из списка Y .

2.2. Выберем треугольник $t \in y \cap T(Q)$, удалим его из $T(Q) = K^2(Q)$ и списков $\partial^{-1}(a, Q)$ для всех $a \in \partial t$.

2.3. Выполним коллапсирование $Q \rightarrow S$ и положим $Q := S$.

Шаг 3. Если $T(Q) = \emptyset$, то вычислим базис $z_1, \dots, z_r$ группы $H_1(Q)$ с помощью алгоритма 10.1 и остановим алгоритм.

Шаг 4. Найдем список W ребер ветвления полиэдра Q .

Шаг 5. Положим $i = 0$.

Шаг 6. Пока $T(Q) \neq \emptyset$ будем выполнять процедуры 6.1 – 6.3.

6.1. Положим $i := i + 1$ и $D_i := \emptyset$.

6.2. Удалим произвольный треугольник $t' \in T(Q)$ из списка $T(Q)$ и списков $\partial^{-1}(a, Q)$ для всех $a \in \partial t'$. Положим $D_i := D_i + \partial t'$.

6.3. Выполним коллапсирование $Q \rightarrow S'$ с запретом перехода через ребра ветвления из списка W . При удалении очередного треугольника в процессе коллапсирования будем прибавлять его границу к цепи D_i . Положим $Q := S'$ и $q := i$.

Шаг 7. С помощью алгоритма 10.1 вычислим базисные циклы $x_1, \dots, x_p$ графа $G := Q$, а также соответствующие перемычки $a_j \in x_j$, $j = 1, \dots, p$.

Шаг 8. Построим матрицу A разложения циклов $D_1, \dots, D_q$ по базису $x_1, \dots, x_p$, полагая $a_{ij} = 1$ при $a_j \in D_i$ и $a_{ij} = 0$ при $a_j \notin D_i$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$.

Шаг 9. Складывая и переставляя строки, приведем матрицу A к ступенчатому виду A' .

Шаг 10. Для матрицы A' найдем номера $n_1, \dots, n_s$ столбцов, содержащих угловые единицы.

Шаг 11. Положим $r := p - s$ и удалим из списка $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ элементы с номерами $n_1, \dots, n_s$. Оставшиеся в X циклы обозначим символами $z_1, \dots, z_r$.

Конец алгоритма.

Теорема 12.3. После завершения работы алгоритма 12.2 $r = \text{rank } H_1(P)$. В случае когда $r > 0$, гомологические классы циклов $z_1, \dots, z_r$ образуют базис группы $H_1(P)$.

Доказательство. На шагах 1 и 2 строится подполиэдр $Q \subset P$, для которого включение $i: Q \rightarrow P$ индуцирует изоморфизм $i_*: H_1(Q) \rightarrow H_1(P)$. Поэтому если на шаге 3 $T(Q) = \emptyset$, то $r = \text{rank } H_1(P)$ и $[z_1], \dots, [z_r]$ – базис группы $H_1(P)$.

Предположим далее, что на шаге 3 верно неравенство $T(Q) \neq \emptyset$. Тогда после выполнения шага 6 мы получим одномерный подполиэдр $G \subset Q$, для которого согласно теореме 11.4 точна последовательность

$$0 \rightarrow \langle D_1, \dots, D_p \rangle \xrightarrow{i_D} H_1(G) \xrightarrow{i_G^*} H_1(Q) \rightarrow 0, \quad (12.3)$$

где i_D – включение, а i_G^* – гомоморфизм, индуцированный включением $i_G: G \rightarrow Q$.

Согласно шагу 7 $H_1(G) = Z_1(G) = \langle x_1, \dots, x_p \rangle$. Результаты шагов 8 – 10 означают, что имеет место равенство $\langle D_1, \dots, D_q \rangle = \langle x_{n_1}, \dots, x_{n_s} \rangle$. Наконец, согласно результату шага 11 $\langle x_1, \dots, x_p \rangle = \langle x_{n_1}, \dots, x_{n_s} \rangle \times \langle z_1, \dots, z_r \rangle$. Таким образом,

$$H_1(G) = \langle D_1, \dots, D_q \rangle \times \langle z_1, \dots, z_r \rangle. \quad (12.4)$$

Подставив (12.4) в (12.3), получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \langle D_1, \dots, D_p \rangle \xrightarrow{i_D} \langle D_1, \dots, D_q \rangle \times \langle z_1, \dots, z_r \rangle \xrightarrow{i_G^*} H_1(Q) \rightarrow 0,$$

откуда следует, что $i_G^*: \langle z_1, \dots, z_r \rangle \rightarrow H_1(Q)$ – изоморфизм. Но тогда гомологические классы $[z_1]_Q = i_G^*(z_1), \dots, [z_r]_Q = i_G^*(z_r)$ образуют базис группы $H_1(Q)$, а гомологические классы $[z_1], \dots, [z_r]$ тех же циклов в полиэдре P – базис группы $H_1(P)$. Теорема доказана. $\square$

13. Группы относительных гомологий

Изучаемые здесь конструкции важны как с точки зрения теории гомологий, так и с точки зрения ее приложений. Но в рамках данного пособия они нужны в первую очередь для обоснования алгоритма из следующего раздела.

Пусть P – полиэдр, Q – его подполиэдр и n – произвольное целое неотрицательное число. Тогда $C_n(Q)$ – подгруппа группы $C_n(P)$.

Определение 13.1. Фактор-группа $C_n(P, Q) = C_n(P) / C_n(Q)$ называется группой относительных цепей пары (P, Q) .

Введем сокращенное обозначение относительных цепей, полагая $\bar{c} = c + C_n(Q)$. Тогда $C_n(P, Q) = \{\bar{c} \mid c \in C_n(P)\}$. В частности, $\bar{0} = C_n(Q)$.

Из включения $c' \in C_n(Q)$ следует, что $\partial c' \in C_{n-1}(Q)$. Поэтому формулы $\partial \bar{c} = \overline{\partial c} = \partial c + C_{n-1}(Q)$ и $\partial_n(\bar{c}) = \partial \bar{c}$ определяют граничный гомоморфизм $\partial_n : C_n(P, Q) \rightarrow C_{n-1}(P, Q)$.

Обычным образом определяются группы относительных циклов и границ.

Определение 13.2.

$$Z_n(P, Q) = \{\bar{c} \in C_n(P, Q) \mid \partial_n(\bar{c}) = 0\}, \quad B_n(P, Q) = \{\partial_n(\bar{a}) \mid \bar{a} \in C_{n+1}(P, Q)\}.$$

Определение 13.3. Фактор-группа $H_n(P, Q) = Z_n(P, Q) / B_n(P, Q)$ называется группой относительных n -мерных гомологий пары (P, Q) .

Поскольку $C_n(Q)$ – подгруппа группы $C_n(P)$ при всех n , то включения $i : C_n(Q) \rightarrow C_n(P)$ являются гомоморфизмами. При этом $\partial(i(c)) = \partial c = i(\partial c)$ для всех $c \in C_n(Q)$. Следовательно, формула $i_*([c]_Q) = [i(c)]_P = [c]_P$, где $[c]_Q$ и $[i(c)]_P = [c]_P$ – гомологические классы цикла $i(c) = c \in Z_n(Q) \subset Z_n(P)$ в полиэдрах Q и P соответственно, корректно определяет гомоморфизмы $i_* : H_n(Q) \rightarrow H_n(P)$.

Заметим, что гомоморфизмы i_* не обязаны быть инъективными, поскольку из гомологичности нулю цикла c в полиэдре P , вообще говоря, не следует, что тот же цикл c обладает аналогичным свойством в Q .

Пусть $i: C_n(P) = C_n(P, Q)$ – фактор-отображения, то есть $j(c) = \bar{c} = c + C_n(Q)$ для всех $c \in C_n(P)$ и n . Они являются гомоморфизмами, и $\partial(j(c)) = \partial(\bar{c}) = \overline{\partial c} = j(\partial c)$ для любой цепи $c \in C_n(P)$. Отсюда так же, как и выше, следует, что формула $j_*([c]_P) = [j(c)] = [\bar{c}]$ определяет гомоморфизмы $j_*: H_n(P) \rightarrow H_n(P, Q)$.

Для произвольного относительного цикла $\bar{c} \in Z_n(P, Q)$ верно включение $\partial c \in Z_{n-1}(Q)$. Положим $\partial_*([\bar{c}]) = [\partial c]_Q$.

Пусть $\bar{c}' \in Z_n(P, Q)$ и $\bar{c}' \sim \bar{c}$. Тогда $\bar{c}' + \bar{c} \in B_n(P, Q)$. Последнее равносильно существованию такой цепи $a \in C_n(Q)$, что $c' + c + a \in B_n(P)$. При этом $\partial c' + \partial c = \partial a$, что означает справедливость равенства $[\partial c']_Q = [\partial c]_Q$ в группе $H_{n-1}(Q)$. Следовательно, формула $\partial_*([\bar{c}]) = [\partial c]_Q$ корректно определяет гомоморфизмы $\partial_*: H_n(P, Q) \rightarrow H_{n-1}(Q)$.

Таким образом, для произвольного полиэдра P и его подполиэдра Q определена последовательность групп и гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow H_n(Q) \xrightarrow{i_*} H_n(P) \xrightarrow{j_*} H_n(P, Q) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Q) \rightarrow \dots \quad (13.1).$$

Определение 13.4. Последовательность (13.1) называется гомологической последовательностью пары (P, Q) .

Одним из важных свойств групп гомологий является утверждение следующей теоремы.

Теорема 13.1. Гомологическая последовательность пары (P, Q) точна.

Доказательство. Для удобства перепишем последовательность (13.1), выписав явно еще один ее член. Получим:

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(P, Q) \xrightarrow{\partial_*} H_n(Q) \xrightarrow{i_*} H_n(P) \xrightarrow{j_*} H_n(P, Q) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Q) \rightarrow \dots \quad (13.2).$$

Для доказательства ее точности нужно убедиться в справедливости следующих трех равенств: $\text{im } \partial_* = \ker i_*$, $\text{im } i_* = \ker j_*$ и $\text{im } j_* = \ker \partial_*$. Эта система равносильна совокупности шести включений:

$$\text{im } \partial_* \subset \ker i_*, \text{im } i_* \subset \ker j_*, \text{im } j_* \subset \ker \partial_*, \quad (13.3)$$

$$\ker i_* \subset \text{im } \partial_*, \ker j_* \subset \text{im } i_*, \ker \partial_* \subset \text{im } j_*. \quad (13.4)$$

Включения (13.3), очевидно, эквивалентны равенствам: $i_* \circ \partial_* = 0$, $j_* \circ i_* = 0$, $\partial_* \circ j_* = 0$.

Пусть $x \in C_{n+1}(P)$ и $\bar{x} \in Z_{n+1}(P, Q)$. Тогда $(i_* \circ \partial_*)([\bar{x}]) = i_*([\partial x]_Q) = [\partial x]_P$. Но $[\partial x]_P = 0$ по определению группы $H_n(P)$. Этим доказано равенство $i_* \circ \partial_* = 0$.

Рассмотрим далее цикл $y \in Z_n(Q)$. Тогда имеем: $(j_* \circ i_*)([y]_Q) = j_*([y]_P) = [\bar{y}]$. Так как $y \subset Q$, то $\bar{y} = \bar{0}$. Следовательно, $[\bar{y}] = [\bar{0}] = 0$ и верно равенство $j_* \circ i_* = 0$.

Если $z \in Z_n(P)$, то $(\partial_* \circ j_*)([z]_P) = \partial_*([\bar{z}]) = [\partial z]_Q$. Но $\partial z = 0$ и потому $[\partial z]_Q = 0$. Итак, последнее равенство $\partial_* \circ j_* = 0$ также справедливо.

Предположим теперь, что гомологический класс $[y]_Q$ цикла $y \in Z_n(Q)$ лежит в ядре $\ker i_*$. Тогда $[y]_P = i_*([y]_Q) = 0$. Последнее означает, что существует цепь $x \in C_{n+1}(P)$ с границей $\partial x = y$. При этом смежный класс $\bar{x} = x + C_{n+1}(Q)$ является для пары (P, Q) относительным циклом. Следовательно, определен гомологический класс $[\bar{x}] \in H_{n+1}(P, Q)$. По определению $\partial_*([\bar{x}]) = [\partial x]_Q = [y]_Q$. Таким образом, $[y]_Q \in \text{im } \partial_*$ и доказано включение $\ker i_* \subset \text{im } \partial_*$.

Пусть $z \in Z_n(P)$ и $[z]_P \in \ker j_*$. В этой ситуации $[\bar{z}] = j_*([z]_P) = 0$ в $H_n(P, Q)$. Отсюда следует существование такого цикла $y \in Z_n(Q)$, что $z + y \in B_n(P)$. Последнее включение эквивалентно равенству $[z]_P = [y]_P$. Но тогда $[z]_P = i_*([y]_Q)$ и потому $[z]_P \in \text{im } i_*$. Из доказанного вытекает, что $\ker j_* \subset \text{im } i_*$.

Выберем, наконец, цепь $x \in C_n(P)$, для которой $\bar{x} \in Z_n(P, Q)$ и $[\bar{x}] \in \ker \partial_*$. Тогда $[\partial x]_Q = \partial_*([\bar{x}]) = 0$ в $H_{n-1}(Q)$. Следовательно, найдется цепь $y' \in C_n(Q)$ с границей $\partial y' = \partial x$. Положив $z = x + y'$, получим цикл $z \in Z_n(P)$ и его гомологический класс $[z]_P \in H_n(P)$. Так как сумма $z + x = y'$ лежит в Q , то относительные циклы $\bar{z}$ и $\bar{x}$ совпадают. Поэтому $j_*([z]_P) = [\bar{z}] = [\bar{x}]$ в $H_n(P, Q)$. В итоге: $\bar{x} \in \text{im } j_*$ и доказано последнее включение системы (13.4). $\square$

14. Вычисление базисов групп гомологий трехмерных полиэдров в пространстве R^3

Симплициальный комплекс любого трехмерного полиэдра P пространства R^3 содержит треугольники, инцидентные не более чем одному трехмерному симплексу. Поэтому P допускает коллапсирование на подполиэдр $P' \subset P$ размерности 2. Поскольку при этом включение $i': P' \rightarrow P$ является гомотопической эквивалентностью, то таким образом решаемая задача сводится к поиску базисных циклов двумерного полиэдра.

К сожалению, произвольное коллапсирование может привести к потере важного геометрического смысла найденных циклов. В частности, если P — трехмерное подмногообразие пространства R^3 , то при использовании данного способа мы можем не получить в качестве базисных двумерных циклов компоненты края ∂P .

Предлагаемый ниже алгоритм не имеет указанного недостатка. Но прежде, чем перейти к его изложению, остановимся на некоторых общих свойствах подполиэдров пространства R^3 .

Всюду далее P — компактный трехмерный полиэдр в пространстве R^3 , ∂P объединение всех треугольников из P , инцидентных не более чем одному трехмерному симплексу. Для удобства мы будем называть ∂P краем полиэдра P , хотя обычно этот термин применяется только в ситуации, когда P является

многообразием. Символом P^3 обозначим объединение всех трехмерных симплексов полиэдра P .

Теорема 14.1. Пусть $P_1^3, \dots, P_m^3$ – компоненты сильной связности полиэдра P^3 и $Q_i = K^3(P_i^3)$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда справедливы утверждения:

1. $Q_1, \dots, Q_m$ – базис группы относительных гомологий $H_3(P, \partial P) = Z_3(P, \partial P)$.
2. Для гомологической последовательности

$$\dots \rightarrow H_3(P, \partial P) \xrightarrow{\partial_*} H_2(\partial P) \xrightarrow{i_*} H_2(P) \xrightarrow{j_*} H_2(P, \partial P) \rightarrow \dots \quad (14.1)$$

пары $(P, \partial P)$ имеет место равенство

$$\text{im } \partial_* = \langle \partial Q_1, \dots, \partial Q_m \rangle \cong Z_2^m.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.3 из [7] пространство R^3 можно триангулировать так, чтобы полиэдр P стал подполиэдром полиэдра R^3 .

Рассмотрим произвольный номер $i \in \{1, \dots, m\}$ и некоторый треугольник $t \in \partial Q_i$. Тогда найдется единственный инцидентный t трехмерный симплекс – тетраэдр $\sigma^3 \in Q_i$. Так как $t \in K^2(R^3)$, а R^3 – многообразие, то существует только один трехмерный симплекс $\sigma_*^3 \in K^3(R^3)$, инцидентный треугольнику t и отличный от σ^3 . Предположим, что $\sigma_*^3 \subset P$. Тогда объединение $P_i^3 \cup \sigma_*^3$ лежит в P^3 и является сильно связным полиэдром. Это противоречит тому, что P_i^3 – компонента сильной связности полиэдра P^3 . Следовательно, наше допущение неверно и, на самом деле, $\sigma_*^3 \not\subset P$. Но тогда $t \subset \partial P$.

Результат предыдущего абзаца означает, что $\partial Q_i \in Z_2(\partial P)$. Согласно равенству $\dim \partial P = 2$ в такой ситуации $Q_i = Q_i + C_3(\partial P) \in Z_3(P, \partial P)$.

Линейная независимость системы $Q_1, \dots, Q_l$ очевидна, так как цепи Q_i и Q_j при $i \neq j$ общих трехмерных симплексов не содержат.

Рассмотрим произвольный относительный цикл $Q \in Z_3(P, \partial P)$. Так как $\dim \partial P = 2$, то $Q \in C_3(P)$ и $\partial Q \in Z_2(\partial P)$. Предположим, что пересечение $Q \cap Q_i$ содержит трехмерный симплекс σ^3 , но при этом цепь Q_i не лежит в Q целиком. Тогда найдется тетраэдр $\sigma_*^3 \in Q_i$, который не лежит в Q . Так как полиэдр P_i^3 сильно связан, то существует трехмерный путь $X = \{\sigma_0^3, \sigma_1^3, \dots, \sigma_s^3\}$ в P_i^3 такой, что $\sigma_0^3 = \sigma^3$, $\sigma_s^3 = \sigma_*^3$. Отметим, что по определению пути для любого номера $j = 1, \dots, s$ пересечение $t_j = \sigma_{j-1}^3 \cap \sigma_j^3$ является треугольником. Поскольку $\sigma_0^3 \in Q$, а $\sigma_s^3 \notin Q$, то найдется наибольший номер j , $0 < j < s$, такой, что $\sigma_{j-1}^3 \in Q$, а $\sigma_j^3 \notin Q$. Таким образом, $t_j \in \partial Q$. Отсюда и из включения $\partial Q \in Z_2(\partial P)$ следует, что $t_j \in Z_2(\partial P)$. С другой стороны, треугольник t_j инцидентен трехмерным симплексам σ_{j-1}^3 и σ_j^3 полиэдра P и потому не может быть краевым для P . Полученное противоречие означает, что высказанное выше предположение неверно и, на самом деле, если $Q \cap Q_i$ содержит трехмерный симплекс, то $Q_i \subset Q$. Отсюда вытекает существование таких $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$, что $Q = Q_{i_1} + \dots + Q_{i_k}$.

Таким образом, $Q_1, \dots, Q_m$ – базис группы $Z_3(P, \partial P) = H_3(P, \partial P)$.

Так как $\dim P = 3$, то по определению гомоморфизма $\partial_* : H_3(P, \partial P) \rightarrow H_2(\partial P)$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$ имеют место равенства $\partial_*(Q_i) = \partial Q_i$. Отсюда согласно доказанному выше вытекает, что образ $\text{im } \partial_*$ порождается циклами $\partial Q_1, \dots, \partial Q_m$. Кроме того, в силу равенства $H_3(P) = 0$ и точности последовательности (14.1) $\ker \partial_* = j_*(H_3(P)) = 0$. Следовательно, циклы $\partial Q_1, \dots, \partial Q_m$ линейно независимы и потому $\langle \partial Q_1, \dots, \partial Q_m \rangle \cong Z_2^m$. $\square$

Теорема 14.2. Включение $i_2 : \langle \partial Q_1, \dots, \partial Q_m \rangle \rightarrow H_2(\partial P)$ и гомоморфизм i_* из (14.1) образуют короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \langle \partial Q_1, \dots, \partial Q_m \rangle \xrightarrow{i_2} H_2(\partial P) \xrightarrow{i_*} H_2(P) \rightarrow 0. \quad (14.2)$$

Доказательство. Точность в первых двух членах последовательности вытекает из второго утверждения теоремы 14.1. Для доказательства точности в последнем члене достаточно показать, что гомоморфизм j_* из (14.1) равен нулю.

Рассмотрим произвольный элемент $[x] \in H_2(P)$. Так как $x \in Z_2(P) \subset Z_2(R^3)$, то найдется цепь $c \in C_3(R^3)$ с границей $\partial c = x$. Пусть $c_p = c \cap K^3(P)$ и $c' = c_p + c$. Тогда, с одной стороны, цикл $y = \partial c'$ лежит на крае ∂P . С другой стороны, $x + y = \partial c + \partial c' = \partial c_p$ и потому $[x] = [y]$ в $H_2(P)$. В такой ситуации $j_*([x]) = j_*([y]) = 0$ в $H_2(P, \partial P)$. $\square$

По теореме о гомоморфизмах групп из теоремы 2 вытекает, что:

$$H_2(P) \cong H_2(\partial P) / \langle \partial Q_1, \dots, \partial Q_m \rangle.$$

Алгоритм 14.1. Вычисление базиса двумерной группы гомологий трехмерного полиэдра в R^3

Вход: Списки ребер $E(P) = K^1(P)$ и треугольников $T(P) = K^2(P)$ полиэдра P , списки инциденций $\partial^{-1}(a, P)$ для всех ребер $a \in E(P)$.

Выход: Список Z двумерных циклов полиэдра P .

Шаг 1. Найдем край ∂P и его компоненты сильной связности $D_1, \dots, D_n$.

Шаг 2. С помощью алгоритма 12.1 в каждой компоненте D_i , $i = 1, \dots, n$, получим циклы $x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{r_i}$, любые r_i из которых образуют базис группы $H_2(D_i)$.

Шаг 3. Построим объединение P^3 всех трехмерных симплексов полиэдра P и выделим компоненты сильной связности $P_1^3, \dots, P_m^3$ подполиэдра $P^3 \subset P$.

Шаг 4. Для каждого $k = 1, \dots, m$ найдем компоненты сильной связности $L_k^0, L_k^1, \dots, L_k^{p_k}$ края ∂P_k^3 и в списке $X = \{x_i^j \mid i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, r_i\}$ пометим один элемент, совпадающий с циклом $y_k^0 = K^2(L_k^0)$.

Шаг 5. Для каждого $i = 1, \dots, n$ из списка $X_i = \{x_i^j \mid j = 0, 1, \dots, r_i\}$ удалим один не помеченный цикл. Полученный список обозначим символом X_i^* .

Шаг 6. Из объединения $X^* = X_1^* \cup \dots \cup X_n^*$ удалим все помеченные циклы. Полученный список обозначим буквой Z .

Конец алгоритма.

Теорема 14.3. Если после завершения работы алгоритма 14.1 список Z пуст, то $H_2(P) = 0$. В противном случае, гомологические классы циклов из Z образуют базис группы $H_2(P)$.

Доказательство. Сначала отметим, что использованный выше алгоритм 12.1 основан на теореме Александера-Понтрягина. Поэтому найденные с его помощью циклы из списка X представляют собой границы областей, на которые поверхность ∂P делит пространство R^3 . Отсюда следует, что все циклы $y_k^{j_k} = S^2(L_k^{j_k})$, $j_k = 0, 1, \dots, p_k$, $k = 1, \dots, m$, принадлежат X . Таким образом, шаг 4 алгоритма 14.1 определен корректно.

По построению циклы из списка X^* образуют базис группы $H_2(\partial P)$. В частности, $\text{rank } H_2(\partial P) = \text{card } X^*$.

Пусть $y_k = \partial Q_k$ для $k = 1, \dots, m$. Тогда согласно теореме 14.2

$$\text{rank } H_2(P) = \text{rank } H_2(\partial P) - \text{rank} \langle y_1, \dots, y_m \rangle \text{ и } \text{rank} \langle y_1, \dots, y_m \rangle = m.$$

Из полученных равенств вытекает, что $\text{rank } H_2(P) = \text{card } X^* - m$. Так как список Z получен из X^* удалением циклов $y_1^0, \dots, y_m^0$, то $\text{card } X^* - m = \text{card } Z$. Следовательно,

$$\text{rank } H_2(P) = \text{card } Z. \quad (14.3)$$

Допустим, что гомологические классы в полиэдре P циклов из списка Z линейно зависимы. Тогда найдутся циклы $z_1, \dots, z_l \in Z$, для которых сумма $z = z_1 + \dots + z_l$ гомологична нулю. Согласно точности последовательности (14.2) это возможно в том и только том случае, если $z \in \langle y_1, \dots, y_m \rangle$. В такой ситуации с точностью до нумерации элементов списка $\{y_1, \dots, y_m\}$ для некоторого $q \leq m$ имеет место равенство

$$z = y_1 + \dots + y_q. \quad (14.4)$$

Поскольку $z_1, \dots, z_l \in Z \subset X^*$, то равенство $z = z_1 + \dots + z_l$ представляет собой разложение цикла z по базису X^* группы $H_2(\partial P)$. При этом согласно шагам 4 и 6 алгоритма $z_i \neq y_1^0$ для всех $i = 1, \dots, l$.

С другой стороны,

$$y_1 + \dots + y_q = \sum_{j_1=0}^{p_1} y_1^{j_1} + \dots + \sum_{j_q=0}^{p_q} y_q^{j_q},$$

где $y_k^{j_k} = K^2(L_k^{j_k})$ для всех $k = 1, \dots, m$ и $j_k = 0, 1, \dots, p_k$. Поэтому разложение правой части равенства (14.4) по базису X^* группы $H_2(\partial P)$ цикл y_1^0 содержит.

Полученное противоречие означает, что наше допущение неверно, и на самом деле гомологические классы циклов из списка Z линейно независимы. Но тогда в силу (14.3) они образуют базис группы $H_2(P)$. Теорема доказана. $\square$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение и основные свойства симплициальных комплексов.
2. Опишите общую схему построения групп гомологий.
3. Охарактеризуйте топологический смысл нульмерной группы гомологий.
4. Опишите процедуру нахождения компонент связности.
5. Для каких полиэдров и как определяется понятие сильной связности?
6. Какова связь между алгоритмами поиска компонент связности и сильной связности?
7. Как определить, является ли двумерный полиэдр многообразием?
8. За счет чего упрощается проверка комбинаторного критерия трехмерного многообразия в случае, когда оно вложено в R^3 .
9. Сколько ориентаций можно задать на псевдомногообразии?
10. Укажите способ проверки ориентируемости двумерного многообразия.
11. Как и зачем выполняется коллапсирование полиэдров?
12. Укажите метод построения фундаментальных циклов графа.
13. Приведите обоснование алгоритма вычисления двумерных базисных циклов двумерного псевдомногообразия.
14. Опишите связь между группами гомологий полиэдров M , N , их пересечения Q и объединения P .
15. К каким последствиям приводит удаление симплекса старшей размерности из симплициальной схемы полиэдра?
16. Как применяется предыдущий результат при построении базиса одномерной группы гомологий двумерного псевдомногообразия?
17. На каких фактах основан метод построения двумерных базисных циклов разветвленной поверхности в R^3 ?
18. Выделите ключевые моменты алгоритма решения предыдущей задачи.
19. Как вычислить одномерную группу гомологий разветвленной поверхности?
20. Опишите схему построения групп относительных гомологий.

21.Как строится гомологическая последовательность пары?

22.Какими особенностями обладают двумерные базисные циклы трехмерного полиэдра, найденные с помощью алгоритма 14.1?

Заключение

В учебном пособии рассмотрен ряд топологических характеристик полиэдров или, иначе говоря, триангулированных объектов. К ним относятся связность и сильная связность, свойство быть многообразием или псевдомногообразием, ориентируемость или неориентируемость, группы абсолютных и относительных гомологий. Приведено описание и строгое математическое обоснование алгоритмов, предназначенных для вычисления этих характеристик и связанных с ними конструкций.

Но многие задачи вычислительной топологии остались вне поля нашего зрения. Среди них можно отметить методы вычисления индексов пересечения $\text{Ind}: H_i(P) \times H_j(P) \rightarrow Z_2$, характеризующих взаимное расположение на m -мерном многообразии P циклов дополнительных размерностей i и j , $i + j = m$. Также здесь не рассмотрены задачи на условную оптимизацию. К ним относятся, например, поиск пути с минимальным весом, гомологичного заданному пути $x \in C_1(P)$, а также поиск минимального цикла в заданном гомологическом классе $[z] \in H_1(P)$ [3, 4, 31]. Также важное значение имеет проблема нахождения минимальных циклов, гомологические классы которых образуют базис группы $H_1(P)$ [32, 29, 30].

Обсуждение указанных вопросов потребовало бы увеличения объема данного издания более чем в два раза. Поэтому представляется более целесообразным посвятить им отдельное пособие.

Литература

1. Галанин, А. В. Метод эквивалентных дуг для минимизации путей в заданном гомологическом классе / А.В. Галанин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2014. – Вып. 1(1). – С. 203–208.
2. Зейферт, Г. Топология / Г. Зейферт, В. Трельфалль. – М.-Л.: ГОНТИ, 1938; Ижевск: НИЦ РХД, 2001.
3. Лаптева, А. В. Алгоритмы для поиска минимальных одномерных циклов / А.В. Лаптева, Е.И. Яковлев // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2005. – Вып 1(3). – С. 76–87.
4. Лаптева, А. В. Алгоритм поиска минимальной одномерной цепи в заданном классе относительных гомологий / А.В. Лаптева // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2006. – Вып 1(4). – С. 59–64.
5. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – М.: Мир, 1988.
6. Матвеев, С. В. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии / С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко. – М.: Изд-во МГУ, 1991, 1998.
7. Рурк, К. Введение в кусочно линейную топологию / К. Рурк, Б. Сандерсон. – М.: Мир, 1974.
8. Фоменко, А. Т. Курс гомотопической топологии / А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. – М.: Наука, 1989.
9. Фоменко, А. Т. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире / А.Т. Фоменко. – М.: Изд-во МГУ, 1992.
10. Яковлев, Е. И. Алгоритмы для вычисления базисных циклов одномерной группы относительных гомологий / Е.И. Яковлев, О.В. Логинов // Вестник ННГУ. Серия Математика. – 2003. – Вып 1. – С. 132–142.

11. Яковлев, Е. И. Вычислительная топология / Е.И. Яковлев. – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2005.
12. Яковлев, Е. И. Алгоритм вычисления базисов групп двумерных гомологий разветвленных триангулированных поверхностей / Е.И. Яковлев, А.А. Ценова // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. – 2012. – № 2(95). – С. 331–338.
13. Яковлев, Е. И. Алгоритм для вычисления двумерных базисных циклов полиэдров трехмерного пространства / Е.И. Яковлев, А.А. Ценова, В.Ю. Епифанов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – Вып. 4(1). – С. 186–189.
14. Chambers, E. W. Splitting (complicated) surfaces is hard / E.W. Chambers, E.C. de Verdiere, J. Erickson, F. Lazarus, K. Whittlesey // Comput. Geom. Theory Appl. – 2008. – V. 41, no. 1–2. – P. 94–110.
15. Carlsson, E. An algebraic topological method for feature identification / E. Carlsson, G. Carlsson, and V. de Silva // Int. J. Comput. Geom. Appl. – 2006. – V. 16, no. 4. – 291–314.
16. Chao, J. Cubical singular simplex model for 3D objects and fast computation of homology groups / J. Chao, J. Nacayama // Proc. IEEE. – 1996. – P. 190–194.
17. Chen, C. Measuring and computing natural generators for homology groups / C. Chen, D. Freedman // Comput. Geom. Theory Appl. – 2010 – V. 43, no. 2. – P. 169–181.
18. Dey, T. K. Computing homology groups of simplicial complexes in R^3 / T.K. Dey, S. Guha // Journal of the ACM. – 1998. – Vol. 45, №2. – P. 266–287.
19. Delfinado, C. An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere / C. Delfinado, H. Edelsbrunner // Comput. Aided Geom. Design. – 1995. – V. 12. – P. 771–784.

20. De Silva, V. Homological sensor networks / V. De Silva, R.W. Ghrist // Notices of the American mathematical society. – 2007 – V. 54, no. 1. – P. 10–17.
21. Dey, T. K. Computational topology / T.K. Dey, H. Edelsbrunner, S. Guha // Advances in Discrete and Computational Geometry / Ed. B. Chazelle, J. Goodman, R. Pollack. – Providence: AMS, 1998.
22. Dey, T. K. A new technique to compute polygonal schema for 2-manifolds with application to null-homotopy detection / T.K. Dey, H. Schipper // Discrete Comput. Geom. – 1995. – V. 14. – P. 93–110.
23. Donald, B. R. On the complexity of computing the homology type of a triangulation / B.R. Donald, D.R. Chang // Proc. IEEE. – 1991. – P. 650–661.
24. Gordienko, P. A. The algorithms of homology groups basis cycles fast calculation and topological recognition of a 2D polyhedron / P.A. Gordienko, A.D. Krakhnov, E.I. Yakovlev // GraphiCon`2001 Conference Proceedings. Computational Geometry Section. – 2001. – P. 177–181.
25. Grapo, H. Applications of Geometric Homology, Geometry and Robotics / H. Grapo. – Springer-Verlag, 1989.
26. Guskov, I. Topological Noise Removal / I. Guskov, Z.J. Wood // GI 2001 proceedings. – 2001. – P. 19–26.
27. Edelsbrunner, H. Topological Persistence and Simplification / H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian // Disc. Comput. Geom. – 2002. – 28. – P. 511–533.
28. Erickson, J. Optimally cutting a surface into a disk / J. Erickson, S. Har-Peled // Discrete Comput. Geom. – 2004. – V. 31. – P. 37–59.
29. Erickson, J. Minimum cuts and shortest non-separating cycles via homology covers / J. Erickson, A. Nayyeri // Proc. 22nd Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms. – 2011. – P. 1166–1176.

30. Erickson, J. Combinatorial Optimization of Cycles and Bases / J. Erickson // In A. Zomorodian editor, *Advances in Applied and Computational Topology*, volume 70 of *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. AMS – 2012. – P. 195–228.
31. Lapteva, A. V. Index Vector-Function and Minimal Cycles / A.V. Lapteva, E.I. Yakovlev // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2006. – V. 22. – 35–46.
32. Lapteva, A. V. Minimal 1-Cycles Generating a Canonical Basis of 2-Manifold's Homology Group / A.V. Lapteva, E.I. Yakovlev // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. – 2006. – V. 31, no 4. – 555–570.
33. Matveev, S. V. Computer recognition of three-manifolds / S.V. Matveev // *Experimental Mathematics*. – 1998. – V. 7, No. 2. – P. 153–161.
34. Vegter, G. Computational Complexity of Combinatorial Surfaces / G. Vegter, C.K. Yap // *Proc. 6th ACM Symp. on Computational Geometry*. Berkeley. CA. – 1990. – P. 102–111.
35. Wood, Z. Removing Excess Topology From Isosurfaces / Z. Wood, H. Hoppe, M. Desbrun, P. Schroder // *ACM Transactions on Graphics*. – 2004. – V. 23, no 2, – 190–208.
36. Zhou, Q.-Y. Topology repair of solid models using skeletons / Q.-Y. Zhou, T. Ju, S.-M. Hu // *Visualization and Computer Graphics*. – IEEE Transactions on. – 2007. – V. 13, no. 4. – 675–685.

Евгений Иванович **Яковлев**
Леонид Александрович **Игумнов**

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА СУПЕР-ЭВМ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ

Учебное пособие

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. . Усл.-печ. л. .
Тираж 100 экз. Заказ №

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Типография Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
603000, Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37