

**Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**  
**Национальный исследовательский университет**  
**Программа повышение конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского**  
**Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций в области суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных вычислений»**

**Основная образовательная программа**  
01.03.03 – Механика и математическое моделирование

**Учебно-методическая разработка по дисциплине**  
Численное моделирование и вычислительный эксперимент

**Капустин С. А., Чурилов Ю.А., Горохов В. А.**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И АЛГОРИТМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ  
МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ТЕРМОСИЛОВЫХ  
НАГРУЖЕНИЯХ**

Нижний Новгород  
2014 год

УДК 539.3 (075)

ББК В25 (Я73-4)

К 20

**К 20 Капустин, С. А., Чурилов Ю.А., Горохов В. А. Методические основы и алгоритмы компьютерного моделирования процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций при квазистатических термосиловых нагрузениях: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 2014. – 114 с.**

Представлена формулировка и общие соотношения составной иерархической модели поврежденного материала. Приведен перечень экспериментов, необходимых для получения материальных функций предложенных моделей и алгоритмы построения материальных функций на основе перечисленных экспериментов. Рассмотрены особенности реализации модели поврежденного материала в составе программных средств вычислительных комплексов УПАКС и ЛЭГАК-ДК.

Пособие рассчитано на студентов магистратуры, аспирантов и преподавателей университетов по специальностям «Прикладная математика» и «Механика».

Издание осуществлено при финансовой поддержке гранта (соглашение от 27 августа 2013г. № 02.В.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ)

УДК 539.3 (075)

ББК В25 (Я73-4)

© Капустин С. А., Чурилов Ю.А., Горохов В. А.

© Нижегородский государственный

университет им. Н.И. Лобачевского, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |            |
|--|------------|
| Введение.....  | 4          |
| <b>1. Составная иерархическая модель поврежденного материала для моделирования процессов необратимого деформирования и накопления повреждений в материалах конструкций при квазистатических термосиловых нагружениях .....</b> | <b>6</b>   |
| <i>1.1 Общая формулировка модели поврежденного материала .....</i>   | <i>6</i>   |
| <i>1.2 Описание процессов пластического деформирования и ползучести .....</i>  | <i>10</i>  |
| <i>1.3 Алгоритмы построения материальных функций физически нелинейного материала.....</i>  | <i>15</i>  |
| <i>1.4 Общие соотношения моделей накопления повреждений .....</i>  | <i>22</i>  |
| <i>1.5 Кинетические уравнения накопления повреждений при пластическом деформировании.....</i>  | <i>26</i>  |
| <i>1.6 Кинетические уравнения накопления повреждений в условиях ползучести.....</i>  | <i>33</i>  |
| <i>1.7 Моделирование хрупких повреждений.....</i>  | <i>34</i>  |
| <i>1.8 Общий алгоритм реализации физических соотношений модели поврежденного материала.....</i>  | <i>36</i>  |
| <b>2. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения конструкций на основе МКЭ .....</b>  | <b>40</b>  |
| <i>2.1. Методические основы решения нелинейных квазистатических задач .....</i>  | <i>40</i>  |
| <i>2.2. Принципиальная схема организации вычислительного процесса .....</i>  | <i>45</i>  |
| <i>2.3. Построение семейства изопараметрических конечных элементов.....</i>  | <i>51</i>  |
| <b>3. Программная реализация модели поврежденного материала в составе программных средств вычислительного комплекса ВК УПАКС.....</b>  | <b>59</b>  |
| <i>3.1 Основные этапы решения задач и структура программных средств ВК УПАКС... ..</i>   | <i>59</i>  |
| <i>3.2 Информационное обеспечение программных средств ВК УПАКС.....</i>  | <i>65</i>  |
| <b>4. Особенности реализации модели поврежденного материала в составе программных средств комплекса ЛЭГАК-ДК .....</b>   | <b>71</b>  |
| <i>4.1 Основные отличия в организации программных средств комплексов УПАКС и ЛЭГАК-ДК при решении физически нелинейных задач квазистатического деформирования конструкций .....</i>  | <i>71</i>  |
| <i>4.2 Основные задачи интеграции предложенной модели поврежденного материала в состав программных средств ЛЭГАК-ДК.....</i>   | <i>74</i>  |
| <i>4.3. Реализация в составе программных средств комплекса ЛЭГАК-ДК варианта модели поврежденного материала.....</i>   | <i>75</i>  |
| <b>Контрольные вопросы .....</b>   | <b>111</b> |
| <b>Литература .....</b>  | <b>113</b> |

## Введение

Практика создания и эксплуатации современных инженерных сооружений требует постоянного совершенствования вычислительных средств оценки прочности и ресурса проектируемых и действующих конструкций. Такие средства должны обеспечивать возможность детального описания термомеханических процессов в материале исследуемых конструкций с учетом реальных свойств и условий нагружения. При этом особые требования предъявляются к моделям, описывающим поведение конструкционных материалов в условиях силовых, тепловых и радиационных воздействий. В частности, такие модели должны описывать основные эффекты упруговязкопластического поведения материалов при монотонных и циклических, пропорциональных и непропорциональных, изотермических и неізотермических нагружениях, описывать основные стадии развития повреждений в материалах в процессе их деформирования и учитывать влияние этих повреждений на характеристики процессов деформирования. Поскольку все перечисленные явления представляют собой макроскопические проявления дефектов в структуре материала, развивающихся в нем при действии высоких нагрузок и температур, для их моделирования следовало бы создать единую универсальную модель поврежденного материала, описывающую эффекты необратимого деформирования (пластичности, ползучести) и разрушения на основе единых кинетических уравнений. Однако создание такой модели представляется весьма проблематичной не только для описания всех эффектов поврежденной среды, но и для адекватного описания отдельных эффектов пластичности, ползучести и накопления повреждений в общем случае квазистатического нагружения.

Поэтому для создания практических методик, позволяющих на современном уровне моделировать процессы деформирования и разрушения материалов, вместо создания громоздких моделей, описывающих все известные на сегодняшний день эффекты на основе единых кинетических уравнений, более целесообразным оказывается создание некоторой комбинированной модели поврежденного материала, состоящей из более простых, формально независимых частных моделей. Каждая из частных моделей должна удовлетворительно описывать отдельные эффекты как независимые, а их

взаимное влияние может быть учтено на внешнем уровне путем введения некоторых общих допущений и согласованных параметров. Такой подход позволяет значительно повысить «живучесть» модели и возможность быстрой модернизации за счет возможности замены отдельных частных моделей новыми, более совершенными, легко приспособлять её для описания процессов для некоторых типовых случаев нагружения.

В настоящем пособии рассмотрен один из возможных вариантов такой модели, описывающей процессы упруговязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах при квазистатических термосиловых нагружениях, реализованный в созданном в НИИ механики ННГУ вычислительном комплексе ВК УПАКС [1,2,4-7].

Представлена формулировка и общие соотношения составной иерархической модели поврежденного материала для моделирования процессов необратимого деформирования и накопления повреждений в материалах конструкций при квазистатических термосиловых нагружениях.

Представлено описание конкретных частных моделей термопластичности, основанных на концепции комбинированного трансляционно-изотропного упрочнения и варианта модели термоползучести, описывающих процессы упруго-вязкопластического деформирования материалов в составе общей модели поврежденного материала.

Предложен алгоритм реализации перечисленных моделей, учитывающий взаимное влияние эффектов пластичности, ползучести, накопления повреждений и их влияние на характеристики процесса деформирования.

Приведен перечень экспериментов, необходимых для получения материальных функций предложенных моделей. Представлены алгоритмы построения материальных функций на основе перечисленных экспериментов.

# **1. Составная иерархическая модель поврежденного материала для моделирования процессов необратимого деформирования и накопления повреждений в материалах конструкций при квазистатических термосиловых нагрузениях**

## ***1.1 Общая формулировка модели поврежденного материала***

В соответствии с методическими положениями, положенными в основу ВК УПАКС, при построении математических моделей, описывающих поведение материалов исследуемых конструкций, все эффекты, связанные с возникновением и развитием обратимых и необратимых деформаций, а также различных видов поврежденности, рассматриваются в рамках соотношений механики поврежденной среды как отдельные проявления единого эволюционного процесса деградации свойств материала. Сам процесс представляется в виде последовательности элементарных актов изменения внешних воздействий, сопровождающихся соответствующими изменениями пластических деформаций, деформаций ползучести и поврежденности материала. Для его описания используется составная иерархическая модель поврежденного материала, устанавливающая связь между изменениями напряжений и деформаций на интервале изменения внешних воздействий с учетом текущего состояния материала и взаимного влияния эффектов пластичности, ползучести и развивающейся поврежденности. Модель устанавливает функциональные связи между переменными, определяющими развитие названных эффектов как формально независимых элементарных процессов, описываемых соответствующими частными моделями пластичности, ползучести и накопления повреждений. Учет взаимодействия и взаимного влияния таких элементарных актов при описании реальных процессов осуществляется в составной модели, обеспечивающей последовательную инициализацию частных моделей и коррекцию входящих в них параметров (напряжений, поврежденности, параметров, характеризующих историю упруго-вязкопластического деформирования материала).

В общем случае частные модели могут быть определены в составной модели достаточно формально, без детального описания способов реализации выполняемых функций и конкретных величин, используемых внутри частных моделей. Такой подход позволяет, с одной стороны, представить сложный

процесс развития взаимосвязанных эффектов необратимого деформирования и поврежденности в виде совокупности более простых и формально независимых элементарных процессов, а с другой - использовать для их описания широкий набор имеющихся и разрабатываемых альтернативных моделей без изменения общей модели поврежденного материала.

При построении рассматриваемого ниже варианта модели поврежденного материала предполагается справедливость аддитивности упругой  $\Delta e_{ij}^e$  и необратимой составляющих  $\Delta e_{ij}^H$  изменения тензора деформаций (пластичности  $\Delta e_{ij}^p$ , ползучести  $\Delta e_{ij}^c$ ) и несжимаемость материала в условиях пластичности и ползучести

$$\Delta e_{ij} = \Delta e_{ij}^e + \Delta e_{ij}^H = \Delta e_{ij}^e + \Delta e_{ij}^p + \Delta e_{ij}^c;$$

$$\Delta e_{ij}^e = \Delta e_{ij}^{e'} + \delta_{ij} \Delta e; \quad \Delta e = \frac{1}{3} \Delta e_{ii}, \quad \Delta e_{ii}^p = \Delta e_{ii}^c = 0.$$

Также предполагается, что влияние различных видов поврежденности на процесс деформирования осуществляется с помощью введенной Качановым и Работновым скалярной функции  $\omega$  (меры поврежденности), представляющей собой меру уменьшения эффективных площадок действия напряжений по отношению к их начальному неповрежденному значению. Величина  $\omega$ , меняющаяся от значения  $\omega=0$  для неповрежденного материала до  $\omega=1$  – для полностью разрушенного материала.

Непосредственное влияние поврежденности на процесс деформирования учитывается в уравнениях равновесия путем введения зависимости упругих характеристик материала от текущего значения функции  $\omega$ . В связи с этим при формулировке составной модели поврежденного материала в рассмотрение введены две характеристики напряжений: эффективные  $\sigma_{ij}$ , действующие на поврежденных площадках, и приведенные  $\sigma_{ij}^*$ , статически эквивалентные первым, но отнесенные к неповрежденным площадкам. Первые фигурируют во всех частных моделях, определяющих состояние материала в точке тела, вторые используются на уровне описания конструкции при формулировке уравнений равновесия и статических граничных условий.

С учетом сделанных замечаний конкретные уравнения составной модели поврежденного материала, устанавливающие связь между изменениями приведенных напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$  и деформаций  $\Delta e_{ij}$  на элементарном шаге

изменения внешних воздействий, а также параметрами, характеризующими текущее состояние материала, могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{ij} &= 2G(\Delta e_{ij} - \Delta d_{ij}) + \delta_{ij}(K - \frac{2}{3}G)(\Delta e_{ii} - \Delta d_{ii}); \\ \Delta d_{ij} &= \Delta e_{ij}^* + \omega(\Delta e_{ij} - \Delta e_{ij}^*); \\ \Delta e_{ij}^* &= \Delta e_{ij}^p + \Delta e_{ij}^c - \frac{\Delta G^* \bar{\sigma}'_{ij}}{2G^* \bar{G}^*} + \delta_{ij} \left[ \Delta(\alpha T) - \frac{\Delta K^* \bar{\sigma}}{3K^* \bar{K}^*} \right]; \\ \Delta G^* &= G^* - \bar{G}^*; \quad G^* = (1 - \omega)G; \quad \bar{G}^* = (1 - \bar{\omega})\bar{G}; \\ \Delta K^* &= K^* - \bar{K}^*; \quad K^* = (1 - \omega)K; \quad \bar{K}^* = (1 - \bar{\omega})\bar{K}; \\ \Delta(\alpha T) &= \alpha T - \bar{\alpha} \bar{T};\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $K = K(T)$ ;  $\bar{K} = K(\bar{T})$ ;  $G = G(T)$ ;  $\bar{G} = G(\bar{T})$  – модули объемной и сдвиговой деформации неповрежденного материала, отнесенные к уровню температур в исходном (в начале шага) и текущем (в конце шага) состояниях;  $\alpha = \alpha(T)$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{T})$  – значения коэффициентов температурного расширения;  $\bar{\sigma}'_{ij}$ ,  $\bar{\sigma}$  – значения девиаторных и шаровой составляющих тензора эффективных напряжений в исходном состоянии. Фигурирующие в (1.1) величины с черточкой означают их принадлежность исходному состоянию. Изменения пластических деформаций  $\Delta e_{ij}^p$  и деформаций ползучести  $\Delta e_{ij}^c$ , описываемые соответствующими частными моделями, однозначно определяются уровнями эффективных напряжений  $\sigma_{ij}$  и температур  $T$  в исходном и текущем состояниях, а также наборами скалярных и тензорных параметров  $b_q^p (q=1,2,\dots,l)$ ,  $b_t^c (t=1,2,\dots,m)$ , являющихся функционалами процесса и характеризующих истории упругопластического деформирования и ползучести, соответственно,

$$\begin{aligned}\Delta e_{ij}^p &= \Delta e_{ij}^p(\sigma_{ij}, T, b_q^p); \\ \Delta e_{ij}^c &= \Delta e_{ij}^c(\sigma_{ij}, T, b_t^c, \Delta t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь  $\Delta t$  – временная протяженность текущего шага нагружения.

Определяющие соотношения в этих моделях записываются для неповрежденного материала и формально не включают в себя какой-либо зависимости от текущей поврежденности. Влияние последней проявляется

лишь через уровень зависящих от  $\omega$  эффективных напряжений  $\sigma_{ij}$  и параметров  $b_q^p$  и  $b_i^c$ , являющихся функционалами исследуемого процесса.

При описании накопления повреждений в материале конструкций предполагается, что в процессе его деформирования могут независимо развиваться несколько различных видов поврежденности, характеризующихся соответствующими функциями поврежденности  $\Psi_k$  ( $k=1,2,\dots,l$ ). Предполагается также, что изменение поврежденности  $\Delta\Psi_k$  каждого вида определяется уровнем действующих напряжений  $\sigma_{ij}$ , температурой  $T$ , изменением необратимых деформаций  $\Delta e_{ij}^H$ , значением некоторых параметров  $b_{ks}^r$  ( $s=1,2,\dots,p$ ) (в случае пластичности  $\Delta e_{ij}^H = \Delta e_{ij}^p$ ,  $b_{1s}^r \subset b_q^p$ , в случае ползучести  $\Delta e_{ij}^H = \Delta e_{ij}^c$ ,  $b_{2s}^r \subset b_i^c$ ), характеризующих историю упруговязкопластического деформирования, а также значением накопленной поврежденности  $\Psi_k$  данного вида и константами материала  $W_k^R$ :

$$\Delta\Psi_k = \Delta\Psi_k(\sigma_{ij}, T, \Delta e_{ij}^H, b_{ks}^r, \Psi_k, W_k^R). \quad (1.3)$$

Вклад поврежденности каждого вида в изменение меры поврежденности  $\Delta\omega_k$  представляется в виде

$$\Delta\omega_k = \Delta\omega_k(\Delta\Psi_k, \bar{\omega}, q_k^\beta), \quad (1.4)$$

где  $\bar{\omega}$  – накопленное значение функции  $\omega$ ,  $q_k^\beta$  – некоторые константы материала.

Вычисление изменений функций поврежденности  $\Delta\Psi_k$  и вклада их в изменение меры поврежденности  $\Delta\omega_k$  осуществляется в соответствующих частных моделях поврежденности. Полное значение меры  $\omega$ , соответствующее текущему состоянию, вычисляется в составной модели на основе принятого алгоритма суммирования повреждений.

В заключение необходимо отметить, что при выборе конкретных частных моделей они должны быть функционально совместимы между собой в рамках используемой составной модели. Иначе говоря, входящие в модели накопления повреждений параметры  $b_{ks}^r$  должны содержаться в числе параметров  $b_q^p$  и  $b_i^c$  конкретных моделей пластичности и ползучести.

## 1.2 Описание процессов пластического деформирования и ползучести

Для описания процессов пластического поведения материалов в ВК УПАКС используется группа частных моделей, построенных на основе соотношений модели термопластичности с комбинированным упрочнением, предложенной Ю.Г. Коротких[5,8].

Во всех моделях этой группы предполагается, что в процессе развития пластических деформаций поверхность текучести меняет свои размеры (изотропное упрочнение, описываемое изменениями радиуса поверхности текучести  $C_p$ ) и смещается в пространстве девиаторов напряжений (кинематическое упрочнение, характеризуемое изменением тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$ ). Поверхность текучести  $F$  представляется в виде гиперсферы в пространстве девиаторов напряжений  $\sigma'_{ij}$ , координаты центра которой определяются компонентами тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$

$$F = S_{ij}S_{ij} - C_p^2, \quad (1.5)$$

где  $S_{ij}$  - тензор активных напряжений,

$$S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij} \quad (1.6)$$

Основные отличия конкретных моделей этой группы заключаются в способах описания закономерностей изменения радиуса поверхности текучести  $C_p$  и тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$  в процессе пластического упрочнения материала. Подробное описание реализованных в ВК УПАКС конкретных моделей, используемых для исследования процессов пластического деформирования материалов при квазистатических термосиловых нагружениях описаны в [3,5-7].

В рамках первого варианта этой модели [5,6,7] радиус поверхности пластичности  $C_p$ , представляется в виде функции, зависящей от температуры  $T$  и накопленной пластической деформации, характеризуемой параметром  $k_p$  (параметром Одквиста)

$$C_p = C_p(T, k_p), \quad (1.7)$$

$$k_p = \bar{k}_p + \Delta k_p; \Delta k_p = \left( \frac{2}{3} \cdot \Delta e_{ij}^p \cdot \Delta e_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

Компоненты тензора  $\rho_{ij}$  являются функционалом процесса пластического деформирования, изменение которых связано с изменением температуры  $\Delta T$  и пластических деформаций  $\Delta e_{ij}^p$  соотношением

$$\Delta \rho_{ij} = g_1 \Delta e_{ij}^p + g_2 \rho_{ij} \Delta k_p + g_T \rho_{ij} \langle \Delta T \rangle; \quad (1.9)$$

где  $g_1(T)$ ,  $g_2(T)$ ,  $g_T(T)$  - материальные функции, определяемые на основе проведения соответствующих экспериментов;  
 $\langle \Delta T \rangle = \Delta T$  при  $\Delta T > 0$ ,  $\langle \Delta T \rangle = 0$  при  $\Delta T < 0$ .

Изменения пластических деформаций определяются на основе ассоциированного закона течения

$$\Delta e_{ij}^p = \lambda S_{ij}, \quad (1.10)$$

где  $\lambda$  - параметр, определяемый из условия прохождения текущей поверхности текучести через конец вектора девиатора напряжений.

Для реализации рассматриваемой модели, необходимо иметь следующие материальные функции

$$C_p(T, k_p), \quad g_1(T), \quad g_2(T), \quad g_T(T).$$

Рассмотренный вариант модели термопластичности позволяет описать основные эффекты пластического деформирования конструкционных материалов при квазистатических неизотермических нагружениях (зависимость от температуры, пластическое упрочнение, пространственный эффект Баушингера, уменьшение анизотропного упрочнения в связи с процессом рекристаллизации и т. д.), однако не учитывает некоторые характерные особенности пластического деформирования при циклических нагружениях, в частности, зависимости параметров процесса пластического деформирования от циклических свойств материала.

Для описания этих эффектов в ВК УПАКС реализован второй, более сложный вариант модели, требующей большего объема экспериментальной информации [5,6].

По аналогии с рассмотренной выше моделью, в предлагаемой модели вводится поверхность текучести, представляющая собой гиперсферу в пространстве девиаторов напряжений  $\sigma'_{ij}$ , координаты центра которой определяются компонентами тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$ . Однако

в данной модели как  $\rho_{ij}$ , так и  $C_p$  являются функционалами процесса пластического деформирования и зависят от температуры, пластических деформаций и истории их изменения.

Изменение этих величин на шаге нагружения представляется в виде

$$C_p = \bar{C}_p + \Delta C_p, \quad \rho_{ij} = \bar{\rho}_{ij} + \Delta \rho_{ij}.$$

Для учета зависимости процесса пластического деформирования от циклических свойств материала в рассматриваемую модель также вводится дополнительная поверхность «памяти» для тензора остаточных микронапряжений с радиусом  $\rho_c$  [5]

$$F_\rho = \rho_{ij} \cdot \rho_{ij} - \rho_c^2 = 0 \quad (1.11)$$

и член, учитывающий стремление радиуса поверхности текучести  $C_p$  при монотонном циклическом нагружении к некоторому стационарному значению  $C_s$ , зависящему не от предшествующей истории пластического деформирования, а от параметров стабильной петли, характеризуемых значением  $\rho_c$ .

В результате этого, изменения радиуса поверхности текучести  $\Delta C_p$ , тензора остаточных микронапряжений  $\Delta \rho_{ij}$  и радиуса поверхности памяти  $\Delta \rho_c$  за шаг нагружения могут быть представлены в виде

$$\Delta C_p = (q_k^p \cdot H^+ + q_c^p (C_s - C_p) \cdot H^-) \cdot \Delta \kappa_p + q_t^p \Delta T; \quad (1.12)$$

$$H^+ = \begin{cases} 1, & F_\rho = 0, (\Delta \rho_{ij} \rho_{ij}) > 0 \\ 0, & F_\rho < 0, (\Delta \rho_{ij} \rho_{ij}) \leq 0 \end{cases} \quad H^- = 1 - H^+;$$

$$\Delta \rho_{ij} = g_1^p \cdot \Delta e_{ij}^p + g_2^p \cdot \rho_{ij} \cdot \Delta \kappa_p + g_i^p \cdot \rho_{ij} \langle \Delta T \rangle; \quad (1.13)$$

$$\Delta \rho_c = \left\{ \left[ (\bar{\rho}_{ij} + \Delta \rho_{ij})(\bar{\rho}_{ij} + \Delta \rho_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} - (\bar{\rho}_{ij} \bar{\rho}_{ij})^{\frac{1}{2}} \right\} H^+ - q_c^p \langle \bar{\rho}_c - \rho^R \rangle \Delta \kappa_p H^-, \quad (1.14)$$

$$\kappa_p = \bar{\kappa}_p + \Delta \kappa_p; \Delta \kappa_p = \left( \frac{2}{3} \cdot \Delta e_{ij}^p \cdot \Delta e_{ij}^p \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (1.15)$$

где  $C_s = C_s(T, \rho_c)$  - стационарное значение радиуса поверхности текучести для данного материала;  $\rho^R$  - значение инварианта тензора остаточных напряжений, соответствующее точке последнего реверса на диаграмме  $\rho \sim e^p$ ;

$q_{\kappa}^p(T, \kappa_p)$ ,  $q_c^p(T)$ ,  $q_i^p(T, \kappa_p)$ ,  $g_1^p(T)$ ,  $g_2^p(T)$ ,  $g_i^p(T)$  - материальные функции, получаемые на основе соответствующих экспериментальных данных [5].

Алгоритмы построения этих функций рассмотрены в следующем разделе.

Для описания процессов ползучести в комплексе ВК УПАКС реализован ряд моделей ползучести [5-7], основанных на гипотезе существования поверхности ползучести и градиентальности к ней вектора скорости деформации ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ .

В этих моделях скорость деформаций ползучести связана с девиатором эффективных напряжений  $\sigma'_{ij}$  следующими соотношениями:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \sigma'_{ij} \cdot L(T, \theta) \cdot H(T, \tau, \theta), \quad (1.16)$$

$$\theta = \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - C_c^2}{C_c^2}, \quad (1.17)$$

где  $H(T, \tau, \theta)$ - функция упрочнения, характеризующая изменение начальной скорости ползучести  $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  от параметра  $\tau$  (при  $\tau_0 = 0$ ,  $H(T, \theta, \tau_0) = 1.0$ );

$C_c = C_c(T)$  - радиус поверхности ползучести, зависящей только от температуры;  $L(T, \theta) = \dot{\epsilon}_{ij}^c / \sigma'_{ij}$  - функция, характеризующая начальную скорость ползучести, отнесенную к единичному напряжению при уровне напряжений, определяемых параметром  $\theta$ .

В качестве параметра  $\tau$  может приниматься либо время ползучести  $\tau = t$ , либо длина траектории деформации ползучести  $\tau = k_c = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^c \dot{\epsilon}_{ij}^c\right)^{\frac{1}{2}} dt$ , либо энергия диссипации  $\tau = \int_0^t \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c dt$ .

В простейших случаях функцию упрочнения можно считать не зависящей от уровня напряжений  $H(T, \tau, \theta) = H(T, \tau)$ . При этом удастся существенно упростить построение названной функции на основе экспериментальных данных ползучести для некоторых осредненных уровней напряжений. Однако в процессе практического использования рассматриваемой модели ползучести оказалось, что упрощенное представление функции упрочнения не всегда

позволяло удовлетворительно описать исходные экспериментальные зависимости.

С целью упрощения структуры и возможностей экспериментального получения функции  $H(T, \tau, \theta)$ , при сохранении ее функциональной зависимости от уровня действующих напряжений, на основе обобщения большого объема экспериментальных результатов было принято решение представить функцию упрочнения в виде

$$H(T, \tau, \theta) = H^0(T, \tau) + (1 - H^0(T, \tau))h(T, \theta) \quad (1.18)$$

где  $H^0(T, \tau)$  - функция, зависящая только от  $T$  и  $\tau$  ( $\tau_0 = 0$ ,  $H(\tau_0, T) = 1.0$ );  $h(T, \theta)$  - поправочная функция, зависящая от  $T$  и параметра  $\theta$ .

Приведенная модель позволяет описать два первых участка ползучести, однако для описания третьего участка неустановившейся ползучести необходимо учитывать влияние на процесс ползучести изменений эффективных напряжений в процессе накопления повреждений. Кинетические уравнения накопления повреждений при ползучести рассмотрены ниже.

Таким образом, для реализации рассмотренной модели ползучести (при описании первых двух стадий процесса) необходимо иметь следующие материальные функции:

$$C_c(T), L(T, \theta), H^0(T, \tau), h(T, \theta).$$

При этом, в простейших случаях (в случаях подобия кривых ползучести при фиксированных значениях температур) число материальных функций можно сократить до трех, приняв  $h(T, \theta) = 0$ .

В следующем разделе рассмотрены алгоритмы построения материальных функций, необходимых для реализации описанных выше моделей физически нелинейного материала (моделей термоупругости, термопластичности и термopolзучести) на основе результатов проведения соответствующих экспериментов.

### 1.3 Алгоритмы построения материальных функций физически нелинейного материала

#### 1.3.1 Перечень необходимых экспериментов и алгоритмы получения материальных функций моделей физически нелинейного материала

Реализация описанных выше моделей физически нелинейного материала требует наличия набора материальных функций, которые можно объединить в следующие группы [5]:

- упругие характеристики  $G(T), K(T)$ ;
- коэффициент температурного расширения  $\alpha(T)$ ;
- функции термопластичности  $C_p(T, k_p), g_1(T), g_2(T), q_k^p(\kappa_p, T), q_c^p(T), q_T^p(\kappa_p, T), g_T^p(T), C_s(T, \rho)$ ;
- функции термоползучести  $C_c(T), L(T, \theta), H(T, \tau)$ .

Упругие характеристики  $G(T), K(T)$  могут быть получены на основе стандартных испытаний образцов на одноосное растяжение (сжатие) при фиксированных значениях температуры  $T$ . В эксперименте измеряются продольная сила (напряжение), продольная и поперечная деформации, с помощью которых находятся модуль нормальной упругости  $E$  и коэффициент поперечной деформации  $\nu$ . Значения  $G$  и  $K$  определяются из соотношений

$$G = E / 2(1 + \nu); \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)};$$

Коэффициент температурного расширения  $\alpha(T)$  определяется на основе стандартных испытаний для ряда фиксированных значений  $T_i = \text{const. } (i=1-n)$ .

#### Функции термопластичности:

- для первого варианта модели:  $C_p(T, k_p), g_1(T), g_2(T), g_T^p(T)$ ;
- для второго варианта модели:  $q_k^p(\kappa_p, T), q_c^p(T), q_T^p(\kappa_p, T), g_1(T), g_2(T), g_T^p(T)$  и  $C_s(T, \rho)$ .

Перечисленные функции строятся на основе проведения специальных “базовых” экспериментов [5], заключающихся в одноосном растяжении-сжатии цилиндрических образцов при фиксированных значениях температур.

Для определения функций  $C_p(T, k_p), g_1(T)$  и  $g_2(T)$  производятся эксперименты, позволяющие построить кривые деформирования  $\sigma_{11}^+(e_{11})$  и кривые обратных пределов текучести  $\sigma_{11}^-(e_{11})$  при постоянных базовых значениях температур  $T_j$ . В каждом из таких экспериментов производится

растяжение образца с промежуточными циклами разгрузки и последующего сжатия до предела текучести (с заданным допуском на пластическую деформацию). Испытания проводятся в диапазоне скоростей  $\dot{e}_{11}$ , при которых эффектами ползучести за время эксперимента можно пренебречь.

Программа испытаний реализуется путем жесткого нагружения образца с контролем остаточной деформации  $e_{11}^p$ , вычисляемой управляющей экспериментом ЭВМ.

Для каждого эксперимента строятся

- зависимости эффекта Баушингера  $\delta(e_{11}^p)$  от значений пластических деформаций  $e_{11}^p$  в конце каждого промежуточного цикла ( $\delta(e_{11}^p) = \frac{\sigma^-(e_{11}^p)}{\sigma^+(e_{11}^p)}$ );

- зависимость  $\rho_{11}(e_{11}^p)$  ( $\rho_{11} = \frac{1-\delta}{3} \sigma_{11}$ );

- зависимость  $C_p(k_p)$  ( $C_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{11} \frac{1+\delta}{2}$ ;  $k_p = e_{11}^p$ ).

По кривой  $\rho_{11}(e_{11}^p)$  определяется значение  $g_1 = \left(\frac{d\rho_{11}}{de_{11}^p}\right)_{\rho_{11}=0}$  и значение

$g_2 = -\frac{g_1}{\rho_{\max}}$ , где  $\rho_{\max}$  - предельное асимптотическое значение  $\rho_{11}$  при данной  $T_j$ .

Обрабатывая подобным образом результаты экспериментов для всех значений  $T_j (j=1,2...n)$  можно получить искомые зависимости  $C_p(T, k_p)$ ,  $g_1(T)$ ,  $g_2(T)$ .

Для определения зависимости  $g_T^p(T)$  проводится серия экспериментов, заключающихся в выдержке предварительно пластически деформированного образца для ряда фиксированных значений температур с контролем начальных и конечных значений  $\rho_{11}$ .

Для установления закономерностей циклического упрочнения в переходной и стабилизированной зонах циклического деформирования, используемых во второй из рассмотренных выше моделей, производится циклическое блочное нагружение образцов с постоянной в каждом блоке амплитудой пластических деформаций. Причем, в каждом последующем блоке, амплитуда деформаций возрастает, либо убывает. Число циклов в каждом блоке определяется скоростью стабилизации петли гистерезиса на каждом уровне амплитуд. В результате испытаний определяются диаграмма

циклического деформирования, изменения радиуса поверхности текучести  $C_p$  и ее координат в зависимости от числа циклов.

Для стабилизированной петли каждого блока определяются значения  $C_s$  и  $\rho_s = \rho_{11}^{\max}$  и зависимость  $C_s(T, \rho_c)$ .

Функция  $q_c^p(T)$  определяется на основе аппроксимации экспериментальной закономерности стремления  $C_p$  к установившемуся значению  $C_s$  с учетом соотношения

$$\Delta C_s = q_c^p (C_s - C_p) \Delta k_p,$$

где  $\Delta C_s$  - изменение  $C_p$  от начального состояния в блоке до стационарного  $C_s$ ,  $\Delta k_p$  - длина траектории пластического деформирования в блоке до достижения стационарного значения.

Функции термоползучести  $C_c(T)$ ,  $L(T, \theta)$ ,  $H(T, \tau)$ .

Получение таких функций можно осуществить на основе проведения экспериментов по ползучести образцов при одноосном растяжении, проведенных при различных уровнях напряжений для ряда фиксированных уровней температур.

В случае одноосного растяжения отличными от нуля компонентами напряжений остаются лишь осевые напряжения  $\sigma_{11} = \sigma$ . При этом

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= 2/3 \sigma; & C_c &= \sqrt{2/3} \sigma_0; \\ e^c_{11} &= e^c; & \theta &= (\sigma/\sigma_0)^2 - 1; \\ \dot{e}_c &= 2/3 \sigma \cdot L(T, \theta) \cdot H(T, \tau), \end{aligned}$$

где  $\sigma_0 = \sigma_0(T)$  - значение осевого напряжения, при котором начинают проявляться эффекты ползучести при рассматриваемом уровне температуры.

При проведении экспериментов диапазон принимаемых уровней напряжений должен позволить определить радиус начальной поверхности ползучести  $C_c = \sqrt{2/3} \sigma_0$  и покрывать диапазон изменения напряжений в исследуемых конструкциях.

Для каждой серии экспериментов, проводимых при фиксированной температуре  $T_j = \text{const.}$ , определяется значение функции  $C_c(T_j)$ , и каждой кривой ползучести этой серии ставится в соответствие параметр  $\theta_k = (\sigma/\sigma_0)^2 - 1$ .

На каждой кривой ползучести  $e^c = e^c(t)$  ( $t$  – время ползучести) определяется начальная скорость ползучести  $\dot{e}_0^c = \frac{de^c}{dt}$  при  $t=0$  и определяется значение функции  $L(T_j, \theta_k) = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_0^c}{\sigma_{(k)}}$ .

Кроме этого, на основе каждой из кривых  $e^c(t)$  этой серии строятся зависимости  $f_i(T_j, t_i) = \frac{\dot{e}^c(t_i)}{\dot{e}_0^c}$  для ряда моментов времени  $t_i$ . При этом вычисление значений  $\dot{e}^c(t_i)$  осуществляется путем численного дифференцирования кривой  $e^c(t)$  в окрестности точки  $t = t_i$ .

В результате статистического осреднения зависимостей  $f_i(T_j, t_i)$  по всем кривым может быть получена функция упрочнения  $H^0(T, t)$ , в которой в качестве параметра упрочнения  $\tau$  используется время ползучести  $\tau = t$ . Если требуется использовать другую меру упрочнения, то для каждого значения  $t_i$ , определяется значение принятой меры  $\tau$  и значениям функций  $H^0(T, t)$  ставятся в соответствие значения  $H^0(T, \tau)$ .

Значение поправочной функции  $h^0(T_j, \tau)$  определяется на основе непосредственного подбора из условия наилучшей аппроксимации исходных кривых ползучести.

Таким образом, на основе проведения перечисленных экспериментов для всех уровней температур  $T_j$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ) могут быть построены необходимые функции:  $C_c(T)$ ,  $L(T, \theta)$ ,  $H^0(T, \tau)$ ,  $h(T, \theta)$ .

Материальные функции для описания третьего участка неустановившейся ползучести могут быть получены лишь при учете влияния на процесс ползучести изменений эффективных напряжений в процессе накопления повреждений. Кинетические уравнения накопления повреждений при ползучести и необходимые для реализации модели материальные функции рассмотрены ниже.

### 1.3.2 Алгоритмы получения материальных функций моделей термопластичности с комбинированным упрочнением при различных вариантах имеющихся в наличии экспериментальных данных

Выше указывалось, что для получения материальных функций моделей термопластичности с комбинированным упрочнением необходимо провести серию достаточно сложных экспериментов. На практике такие эксперименты провести удастся не всегда, но некоторая экспериментальная информация для материала все же имеется. Ниже рассмотрены возможные варианты получения материальных функций моделей термопластичности с комбинированным упрочнением для фиксированных значений температур ( $T_i = const.$ ) при наличии различного объема экспериментальных данных.

Предполагается, что используемые ниже экспериментальные данные получены на основе испытаний образцов при одноосном растяжении в условиях однородного напряженного состояния, для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{22} &= \sigma_{33} = 0; \\ \sigma'_{11} &= \frac{2}{3}\sigma_1; & \sigma'_{22} &= \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}\sigma_1; \\ e_1^p &= e_1 - \sigma_1/E; & \kappa_p &= \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}^p e_{ij}^p} = e_1^p\end{aligned}$$

#### 1.3.2.1 Последовательность вычислений для получения материальных функций моделей пластичности при наличии полного набора экспериментальных данных

Известен полный набор данных при одноосном растяжении для  $T_i = const.:$   $\sigma_1(e_1)$ ,  $\delta(e_1^p)$ ,  $\nu$  при  $\sigma_1 \leq \sigma_T$  ( $\sigma_T$ -начальный предел текучести материала).

1) Вычисляются материальные функции упругости:  $E$ ,  $G$ ,  $K$ :

$$E = \sigma_1 / e_1 \text{ при } \sigma_1 \leq \sigma_{TK};$$

$$G = E/2(1 + \nu);$$

$$K = E/3(1 - 2\nu) = 2G(1 + \nu)/3(1 - 2\nu)$$

2) Для ряда значений  $e_1^p$  вычисляются

$$\begin{aligned} \delta &= \delta(e_1^p) \\ \rho_{11} = \rho_1 &= \frac{\sigma'_1 - \delta\sigma'_1}{2} = \frac{1-\delta}{2}\sigma'_1 = \frac{1-\delta}{3}\sigma_1 ; & \rho_{22} = \rho_{33} &= -\frac{\rho_{11}}{2} \\ & ; \\ S_{11} = S_1 &= \sigma'_1 - \rho_1 = \frac{1+\delta}{2}\sigma_1 = \frac{1+\delta}{3}\sigma'_1 ; \\ S_{22} = S_2 = S_3 &= \sigma'_{22} - \rho_{22} = -\frac{1+\delta}{6}\sigma_1 = -\frac{1+\delta}{4}\sigma'_1 ; \\ C_p &= \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1+\delta}{2} \right) \sigma_1 ; \end{aligned}$$

$$(при \ e_1^p = 0, \ \delta = 1, \ \sigma_1 = \sigma_T, \ \rho_1 = 0, \ C_p = C_p^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T)$$

В случае изотропного упрочнения:  $C_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1, \ \sigma_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} C_p$

3) На основе полученных данных для различных значений  $k_p$  вычисляются материальные функции моделей пластичности:  $C_p^0$ ,  $g_\kappa^p(\kappa_p)$ ,  $q_\kappa^p(\kappa_p)$ ,  $g_1$ ,  $g_2$

$$\begin{aligned} C_p^0 &= C_p(\kappa_p = 0) ; \\ g_\kappa^p &= \frac{\partial \rho_1}{\partial e_1^p}, \quad ; \\ q_\kappa^p &= \frac{\partial C_p}{\partial e_1^p}, \quad ; \\ g_1 &= \frac{\partial \rho_1}{\partial e_1^p}, \quad при \ \kappa_p = 0 ; \\ g_2 &= \frac{g_1}{\rho_{max}} ; \end{aligned}$$

*1.3.2.2 Последовательность вычислений для получения материальных функций моделей пластичности при отсутствии данных об эффекте Баушингера*

1) Строится зависимость  $\sigma_1 \sim e_1^p$ ; ( $e_1^p = e_1 - \sigma_1 / E$ ).

2) Для зоны линейного упрочнения (после завершения участка нелинейного упрочнения, при котором можно считать  $\rho_1 = \rho_{\max} = const$ ) определяются:

$$\rho_{\max}; \quad \Delta\sigma_1 = G_k \Delta e_1^p; \quad (G_k = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta e_1^p}) \quad \Delta C_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} G_k \Delta e_1^p; \quad q_k^p = \sqrt{\frac{2}{3}} G_k$$

3) Поскольку принимается, что  $q_k^p = const$

$$C_p(k_p) = C_p^0 + q_k^p e_1^p = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_T + G_k e_1^p)$$

4) Строится зависимость  $\rho_1(k_p)$  на основе соотношения:

$$\rho_1 \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sqrt{\frac{3}{2}} C_p) = \frac{2}{3} (\sigma_1 - \sigma_T - G_k e_1^p);$$

5) Определяются модули анизотропного упрочнения:

$$g_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial e_1^p}, \quad \text{при } \kappa_p = 0; \quad g_2 = -\frac{g_1}{\rho_{\max}};$$

6) На основе полученных материальных функций восстанавливается кривая  $\sigma_1 \sim e_1$ . Корректируются значения материальных функций.

### 1.3.2.3 Последовательность вычислений для получения материальных функций моделей пластичности в случае линейного упрочнения

Известны  $\sigma_T, E, \nu, E_k = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta e_1} = const$

1) Определяются параметры упругости  $G, K$ .

2) Для выбранного значения деформации  $e_1$  определяется:

$$e_1^p = e_1 - e_1^e = e_1 - \frac{\sigma_T + \Delta\sigma}{E} = \Delta e - \frac{\Delta e E_k}{E};$$

$$e_1^p = \Delta e \left( \frac{E - E_k}{E} \right); \quad \Delta e = e_1 - \frac{\sigma_T}{E};$$

3) Определяется

$$G_k = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta e_1^p} = \frac{\Delta e E_k \cdot E}{\Delta e (E - E_k)} = \frac{E_k \cdot E}{E - E_k};$$

- в случае кинематического упрочнения

$$C_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T = const.$$

$$g_k^p = g_l = \frac{2}{3} G_k = \frac{2}{3} \frac{E_k E}{(E - E_k)} = const.$$

- в случае изотропного упрочнения

$$C_p(\kappa_p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1(\kappa_p), \text{ или:}$$

$$q_k^p = \sqrt{\frac{2}{3}} G_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{E_k E}{E - E_k};$$

$$g_k^p = g_l = 0; \quad g_2 = 0.$$

#### **1.4 Общие соотношения моделей накопления повреждений**

В основу соотношений, используемых для описания процессов накопления повреждений в рамках предлагаемой модели поврежденного материала, положено предположение о том, что разрушение в точке материала происходит при достижении в этой точке некоторой энергии  $W$  критического значения  $W=W^R$ . Конкретный вид этой энергии определяется механизмом рассматриваемого разрушения и представляет собой работу некоторой части тензора напряжений на необратимых деформациях. При этом предполагается, что для каждого конкретного материала величина  $W^R$ , соответствующая выбранному механизму разрушения, зависит от реализуемого вида напряженно-деформированного состояния (вида НДС) и температуры  $T$ . Таким образом, разрушение представляется как процесс, характеризуемый изменением энергии разрушения  $W$  от значения  $W=0$  для неповрежденного материала до  $W=W^R$  – полного разрушения материала в рассматриваемой точке.

Поскольку величина  $W^R$  зависит от материала, вида НДС и температуры, для описания текущего состояния поврежденности наряду с энергией  $W$  удобнее ввести в рассмотрение функцию  $\Psi$  (функцию поврежденности)[3,5,6], представляющую собой нормированный аналог энергии  $W$ . Для неповрежденного материала  $\Psi=0$ , в процессе разрушения значение  $\Psi$  увеличивается до предельного значения  $\Psi=1$ .

Изменение функции поврежденности  $\Delta \Psi$  связано с изменением энергии  $\Delta W$  при фиксированном виде НДС, характеризуемом значением параметра  $\Pi$  (параметра вида НДС) соотношением

$$\Delta \Psi = \frac{\Delta W}{W^R(\Pi)}. \quad (1.19)$$

В качестве параметра, определяющего вид НДС, используется величина  $\Pi$ , определяемая через главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в точке тела с помощью зависимости [5]:

$$\Pi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}. \quad (1.20)$$

Величина  $\Pi$  монотонно меняется от значения  $\Pi = -1$  при всестороннем сжатии до  $\Pi = +1$  при всестороннем растяжении. При чистом сдвиге  $\Pi = 0$ , при одностороннем растяжении  $\Pi = 1/\sqrt{3}$ .

При развитии в материале одновременно нескольких видов повреждений для описания каждого вида используется своя функция  $\Psi_k$ , причем для каждой функции принимается справедливым условие линейного суммирования

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^n \Delta\Psi_{ki} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta W_{ki}}{W_k^R(\Pi)}, \quad (1.21)$$

где  $\Delta W_{ki}$  - изменение энергии “ $k$ ”-ого вида на элементарном шаге изменения нагрузки,  $W_k^R$  - критическое значение энергии “ $k$ ”-ого вида.

Как указывалось выше, для описания влияния текущего уровня поврежденности на процесс деформирования в рассматриваемой модели поврежденного материала вводится скалярная мера поврежденности  $\omega$ . Величина  $\omega$  рассматривается как величина, инвариантная по отношению к виду поврежденности, виду НДС и траекториям нагружения, причем изменение ее  $\Delta\omega$  складывается из изменений меры поврежденности каждого вида  $\Delta\omega_k$ , т.е.

$$\Delta\omega = \sum \Delta\omega_k. \quad (1.22)$$

Изменение меры поврежденности каждого вида  $\Delta\omega_k$  в свою очередь связано с накопленным значением  $\bar{\omega}$ , а также с изменением функции поврежденности соответствующего вида  $\Delta\Psi_k$ . Для установления такой связи, прежде всего, необходимо установить особенности развития накопления повреждений в реальных материалах.

Современные теоретические и экспериментальные исследования явлений разрушения позволяют рассматривать разрушение как многостадийный процесс возникновения и развития необратимых дефектов в материале, определяемый всей кинетикой напряженно-деформированного состояния

конструкций в процессе их нагружения [5,9,10]. Согласно этому представлению в процессе разрушения материала происходит последовательное развитие трех основных стадий.

В пределах первой стадии происходит зарождение рассеянных по объему материала повреждений в виде микропор и микродефектов, не приводящее к заметному влиянию этих повреждений на физико-механические характеристики материала. Применительно к рассмотренной выше модели поврежденного материала для этой фазы можно считать  $\Delta\omega=0$ .

Вторая стадия характеризуется дальнейшим развитием и взаимодействием возникающих дефектов до критического значения, соответствующего нарушению сплошности материала в рассматриваемой точке и сопровождается нарастающим влиянием повреждений на физико-механические характеристики материала (в частности, дестабилизацией процесса циклического деформирования при циклических нагружениях). С наступлением этой фазы начинается интенсивное взаимодействие повреждений, определяемых различными механизмами разрушения. Конец фазы соответствует появлению в материале макроскопической трещины.

В пределах третьей стадии происходит слияние образовавшихся микродефектов в одну или несколько магистральных трещин, приводящих к разделению на части (фрагментации) рассматриваемого элемента конструкции.

Относительные длительности каждой из стадий зависят от свойства материалов, характера напряженного состояния и условий нагружения. Однако при проведении прочностных расчетов на стадии проектирования конструкций обычно исходят из предположений, что появление магистральной трещины (начало третьей стадии) равносильно полному разрушению и при оценке предельных нагрузок учитывают лишь две первые стадии разрушения, доля которых может составлять 90 и более процентов ресурса безопасности работы конструкции.

Учет наличия названных фаз при описании накопления повреждений в предлагаемой модели [6] осуществляется по аналогии с моделями, описанными в [5], путем введения переменной, определяющей завершение первой фазы. В качестве такой переменной используется величина  $\Psi_k^\alpha$ , определяемая для каждого  $k$ -ого вида поврежденности значением упомянутой выше функции поврежденности к концу первой фазы. При этом зависимость изменения меры повреж-

денности  $\Delta\omega_k$  от изменения функции поврежденности  $\Delta\Psi_k$  принимается в виде [6]:

$$\Delta\omega_k = q \cdot \bar{\omega}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \Delta\Psi_k^0,$$

$$\Delta\Psi_k^0 = \Delta\Psi_k / (1 - \Psi_k^\alpha) \quad \text{при} \quad \Psi_k > \Psi_k^\alpha,$$

$$\Delta\Psi_k^0 = 0 \quad \text{при} \quad \Psi_k \leq \Psi_k^\alpha,$$
(1.23)

$q=q(T)$  – функция материала.

Иначе говоря, мера поврежденности в точке тела становится отличной от нуля лишь тогда, когда функция поврежденности  $\Psi_k$  какого-либо вида «к» достигает некоторого амплитудного значения  $\Psi_k^\alpha$ . При этом принимается, что дальнейшее изменение функции поврежденности  $\Delta\Psi_s$  любого другого вида «s» будет приводить к необратимому изменению меры поврежденности  $\Delta\omega_s$

$$\Delta\omega_s = q \bar{\omega}^{\frac{q-1}{q}} \Delta\Psi_s^0,$$

$$\Delta\Psi_s^0 = \Delta\Psi_s / (1 - \Psi_s^\alpha),$$

где  $\Psi_s^\alpha$  - амплитудное значение рассматриваемого вида поврежденности к концу первой фазы.

При таком алгоритме вычисления меры повреждений, изменения величин  $\Delta\omega$  можно считать инвариантным по отношению к механизмам развивающихся повреждений и непосредственно суммировать их для вычисления текущего значения меры  $\omega$ .

Для каждого вида поврежденности соответствующее значение  $\Psi_k^\alpha$  является функцией температуры и характерного параметра  $p_k$ , определяющего рассматриваемый процесс деформирования  $\Psi_k^\alpha = \Psi_k^\alpha(T, p_k)$ .

Конкретные соотношения, определяющие вид функций поврежденности  $\Psi_k$ , устанавливаются для каждого вида разрушения на основе соответствующих частных моделей.

В последующих параграфах приводятся описания нескольких, апробированных в ВК УПАКС, вариантов конкретных моделей, описывающих накопление повреждений в материале конструкций на основе различных

механизмов разрушения при исследовании процессов деградации материалов при квазистатических термосиловых нагружениях.

### **1.5 Кинетические уравнения накопления повреждений при пластическом деформировании**

В качестве «опасной» энергии, используемой для описания процесса накопления повреждений в материалах, в условиях пластического деформирования принимается часть энергии диссипации (энергия пластического разрыхления  $W_1$ ), определяемая работой тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$  на пластических деформациях

$$W_1 = \int_0^{e^p} \rho_{ij} de_{ij}^p. \quad (1.24)$$

Величина изменения этой энергии  $\Delta W_1$  на элементарном шаге изменения внешних воздействий определяется изменением пластических деформаций  $\Delta e_{ij}^p$  и текущим значением тензора остаточных напряжений  $\rho_{ij}$  [4-6]

$$\Delta W_1 = \langle \Delta W \rangle = \langle \rho_{ij} \cdot \Delta e_{ij}^p \rangle, \quad (1.25)$$

где

$$\langle \Delta W \rangle = \begin{cases} \Delta W & \text{при } \Delta W > 0 \\ 0 & \text{при } \Delta W \leq 0. \end{cases}$$

Также принимается, что разрушение материала (т.е.  $\omega=1$ ) происходит при достижении энергии пластического разрыхления  $W_1$  некоторой фиксированной величины  $W_1^R$ , зависящей от температуры  $T$  и реализуемого вида НДС [5,6]

$$W_1^R = f_1(\Pi) \cdot W_0^R(T), \quad (1.26)$$

где  $W_0^R(T)$  - предельная энергия пластического разрыхления при одноосном растяжении,  $f_1(\Pi)$  – функция вида НДС ( $0 \leq f_1(\Pi) < \infty$ ), определяемая на основе аппроксимации, полученной из экспериментов зависимости  $W_1^R$  от вида НДС.

Для описания функции  $f(\Pi)$  используется её аналитическое представление в виде гиперболической зависимости

$$f(\Pi) = f_1(\Pi) = \frac{a_1 \Pi + a_2}{\Pi + a_3} \quad (1.27)$$

в диапазоне  $-1 \leq \Pi \leq 0$ , а также в виде квадратичной параболы

$$f(\Pi) = f_2(\Pi) = b_1 + b_2\Pi + b_3\Pi^2 \quad (1.28)$$

на участке  $0 \leq \Pi \leq 1$

В точке  $\Pi = 0$ , соответствующей чистому сдвигу  $f_1(0) = f_2(0)$ , а в точке  $\Pi = 1/\sqrt{3}$ , соответствующей одноосному растяжению  $f_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$ .

Недостающие условия для определения коэффициентов  $a_1 \div a_3$  и  $b_1 \div b_3$  в выражениях (1.27) - (1.28) могут быть получены, если известно по два дополнительных значения для функций  $f_1(\Pi)$  и  $f_2(\Pi)$ . При отсутствии таких данных в качестве первого приближения можно принять

$$\Pi = -1 \quad (\text{всестороннее сжатие}) \quad f_1(-1) = \infty$$

$$\Pi = 0 \quad (\text{чистый сдвиг}) \quad f_1(0) = f_2(0) = 1.5$$

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{одноосное растяжение}) \quad f_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.0$$

$$\Pi = 1 \quad (\text{всестороннее растяжение}) \quad f_2(1) = 0.$$

В случаях квазистатических нагружений, характеризуемых односторонним накоплением пластических деформаций, можно не учитывать рассмотренные выше стадии накопления повреждений и представить изменение функции поврежденности  $\Delta\Psi_1^0$  в виде

$$\Delta\Psi_1^0 = \Delta\Psi_1 = \Delta W_1 / W_1^R, \quad (1.29)$$

Изменение меры поврежденности  $\Delta\omega_1$  определяется на основе соотношения (1.23), причем для определения полного значения  $\omega$  используется линейное правило суммирования повреждений:

$$\Delta\omega_1 = q \cdot \bar{\omega}^{\frac{q-1}{q}} \cdot \Delta\Psi_1^0 \quad (1.30)$$

$$\omega = \bar{\omega} + \Delta\omega_1$$

где  $\bar{\omega}$  – накопленное значение функции  $\omega$ ,  $q = q(T)$  – функция материала.

Таким образом, материальными функциями рассмотренной модели могут служить величины  $W_0^R(T)$ ,  $q(T)$ .

Для приближенного определения функций  $W_0^R(T)$  и  $q(T)$  в случае квазистатических нагружений можно использовать результаты испытаний деформирования образцов до их разрушения в условиях одноосного

растяжения для ряда фиксированных значений температур. При этом предварительно должны быть проведены базовые эксперименты и получены необходимые материальные функции термопластичности.

Дальнейшие действия осуществляются на основе следующего алгоритма.

1) на основе результатов одноосного разрушения образца определяется предельное значение пластической деформации  $e_1^R$ ; с диаграммы деформирования снимается зависимость приведенного напряжения  $\sigma_1^*(e_1^P)$  от пластической деформации  $e_1^P$ ;

2) на основе численного моделирования процесса деформирования фрагмента рабочей части образца в условиях однородного жесткого одноосного растяжения с использованием полученных материальных функций термопластичности, определяются:

-зависимость эффективных напряжений  $\sigma_1$  и энергии пластического разрыхления  $W$  от пластической деформации  $e_1^P$ ;

- предельное значение энергии пластического разрыхления  $W_0^R$ , соответствующее деформации  $e_1^P = e_1^R$ .

3) для ряда значений  $e_1^P$  на основе полученных из эксперимента приведенных напряжений  $\sigma_1^*$  и полученных в результате численного моделирования эффективных напряжений  $\sigma_1$  вычисляются текущие значения мер поврежденности  $\omega(e_1^P)$

$$\omega(e_1^P) = (\sigma - \sigma^*) / \sigma,$$

4) для выбранных значений  $e_1^P$  вычисляются значений функции поврежденности  $\psi(e_1^P)$  и, полагая, что при монотонном нагружении  $\omega = \psi^q$ , значения параметров  $q(e_1^P)$ :

$$\psi(e_1^P) = \frac{W}{W_0^R}; \quad q(e_1^P) = \ln \omega / \ln \psi,$$

где  $W = W(e_1^P)$ - энергия разрыхления, полученная на основе результатов численного моделирования.

5) на основе зависимости  $q(e_1^P)$  в зоне заметного влияния  $\omega$  на уровень эффективных напряжений выбирается значение  $q(e_1^P) = \text{const}$ .

6) с учетом полученных значений  $W_0^R$  и  $q$  проводится численное моделирование процесса разрушения экспериментального образца и уточняются значения  $W_0^R$  и  $q$ .

Аналогичные операции осуществляются для других значений температур и в результате строятся зависимости  $W_0^R(T)$  и  $q(T)$ .

В приведенных выше уравнениях предлагалось, что предельная энергия пластического разрыхления, зависящая от истории изменения реализуемых видов НДС, тем не менее, мало зависит от реализуемых траекторий деформирования.

В частности, согласно [10], эта энергия не зависит от числа циклов при малоцикловом нагружении и близка к энергии статического разрушения при одноосном растяжении, вычисляемой с учетом истинного распределения деформаций в шейке образца. Однако при практическом определении предельной энергии в макрообъемах, характерных для вычисления, основанных на МКЭ, величина ее в случаях односторонне накапливаемых пластических деформаций (квазистатических нагружений) и малоцикловых нагружениях может оказаться существенно различной. В связи с этим оказалось целесообразным независимо определять предельную энергию для квазистатических и малоцикловых нагружений, а при наличии обоих видов нагружений суммировать соответствующие повреждения как для различных механизмов разрушения.

Моделирование процессов накопления усталостных повреждений при малоцикловых нагружениях предполагает возможность адекватного описания кинетики пластических деформаций в процессе циклических нагружений, которое может быть осуществлено с помощью рассмотренной выше модели термопластичности, учитывающей характерные особенности пластического деформирования при циклических нагружениях.

Кроме этого, предельная энергия при малоцикловых нагружениях может быть определена непосредственно лишь из испытаний на малоцикловую усталость, то есть, при вычислении предельной энергии  $W_1^R$  в соотношении

(1.26), вместо энергии  $W_0^R(T)$  при одноосном растяжении, необходимо использовать энергию  $W_c^R(T)$ , определяемую по результатам малоциклового разрушения.

Также следует иметь в виду, что при циклических нагружениях значительно большую роль играет учет двух стадий накопления повреждений.

В соответствии с приведенными выше соотношениями (1.23), при учете двух стадий накопления повреждений, изменение активной части функции поврежденности при малоцикловых нагружениях  $\Delta\Psi_1^0$  принимается в виде [6]:

$$\Delta\Psi_1^0 = \begin{cases} \Delta\Psi_1 / (1 - \Psi_1^\alpha) & \text{при } \Psi_1 \geq \Psi_1^\alpha \text{ или } \bar{\omega} > 0, \\ 0 & \text{при } \Psi_1 < \Psi_1^\alpha \text{ и } \bar{\omega} = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\Delta\Psi_1 = \Delta W_1 / W_1^R, \quad (1.32)$$

$$\Psi_1^\alpha = \Psi_1^\alpha(T, \rho_c) = W_1^\alpha / W_1^R, \quad (1.33)$$

где  $W_1^\alpha = W_1^\alpha(T, \rho_c)$  - амплитудное значение энергии пластического разрыхления к концу первой фазы, являющееся функцией температуры  $T$  и параметра  $\rho_c$  [5] (см.1.14).

Амплитудное значение функции поврежденности  $\psi_1^\alpha(T, \rho_c)$ , также как и предельную энергию  $W_c^R(T)$ , целесообразно определять на основе результатов малоцикловых испытаний.

Изменение меры поврежденности  $\Delta\omega_1$  определяется на основе соотношения (1.30), причем для определения полного значения  $\omega$  также используется линейное правило суммирования повреждений

$$\Delta\omega_1 = q \cdot \bar{\omega}^{q-1} \cdot \Delta\Psi_1^0; \quad \omega = \bar{\omega} + \Delta\omega_1,$$

где  $\bar{\omega}$  – накопленное значение функции  $\omega$ ,  $q = q(T)$  – функция материала, конкретные значения которой также могут быть определены на основе результатов малоцикловых испытаний.

Таким образом, для моделирования процессов накопления повреждений при малоцикловых нагружениях могут быть использованы соотношения (1.24)-(1.30), дополненные соотношениями (1.31)-(1.33) с материальными функциями

$W_c^R(T)$ ,  $\psi_1^\alpha(T, \rho_c)$ ,  $q(T)$ , определенными на основе проведения малоцикловых испытаний.

Для приближенного определения функции  $W_c^R(T)$  для малоцикловых нагружений можно использовать результаты испытаний малоциклового разрушения экспериментальных образцов при жестком симметричном циклическом нагружении.

На основе проведения таких экспериментов для ряда фиксированных значений температур и заданных амплитуд размаха пластических деформаций определяется предельное число циклов  $N_R$  до разрушения образца. Далее для каждого значения температуры и выбранной амплитуды деформации производится численное моделирование процесса циклического деформирования материала (фрагмента рабочей части образца в условиях однородного жесткого одноосного растяжения-сжатия) для  $N_R$  циклов на основе которого вычисляется приближенное значение энергии  $W_c^R(T)$ .

Для определения функций  $\psi_1^\alpha(T, \rho_c)$  могут быть использованы результаты испытаний на малоцикловую усталость при заданных амплитудах деформаций, соответствующих различным значениям  $\rho_c$ . При этом число циклов  $N_\alpha$ , соответствующее завершению первой стадии, можно определить по началу разупрочнения материала (уменьшению амплитуды напряжений). При отсутствии необходимых экспериментальных данных число циклов  $N_\alpha$  можно определить на основе эмпирической зависимости, предложенной Мэнсоном [10]:

$$N_\alpha = \begin{cases} N_R - 14N_R^{0,6} & \text{при } N_R > 700 \text{ циклов} \\ 0 & \text{при } N_R \leq 700 \text{ циклов} \end{cases},$$

где  $N_R$  - общее число циклов до появления макроскопической трещины при заданном размахе пластической деформации.

Затем производится численное моделирование процесса циклического деформирования материала для каждой амплитуды деформации, соответствующей полученному из экспериментов значению  $N_\alpha$ , определяется величина энергии  $W_1^\alpha$  и вычисляется значение функции  $\psi_1^\alpha = W_1^\alpha / W_1^R$ .

Такие вычисления производятся для всех выбранных амплитуд деформаций, соответствующих определенным значениям параметра  $\rho_c$ , для каждого фиксированного значения температуры  $T$ .

На основе полученных результатов строится табличная зависимость функции  $\psi_1^\alpha = \psi_1^\alpha(T, \rho_c)$ .

В приведенных выше вариантах моделей полагалось, что в качестве «опасной» энергии, используемой для описания процесса накопления повреждений в материалах, в условиях пластического деформирования, принимается часть энергии диссипации, определяемая работой тензора остаточных микронапряжений  $\rho_{ij}$  на пластических деформациях. Однако в практике расчетов возникают ситуации при которых указанная доля энергии не может быть вычислена, либо из за отсутствия надежных данных о параметрах, описывающих анизотропную часть пластического упрочнения материала, либо при исчезновении эффектов анизотропного упрочнения, которое наступает при значениях температур, превышающих температуру рекристаллизации материала. В этих ситуациях, качестве «опасной» энергии, по аналогии с (1.24), можно использовать энергию пластического упрочнения, определяемую работой части девиаторной составляющих тензора напряжений  $a_{ij}$ , соответствующих стадии упрочнения на пластических деформациях:

$$W_1 = \int_0^{e^p} a_{ij} de_{ij}^p ; \quad a_{ij} = \sigma'_{ij} \left(1 - \frac{\sigma_T^0}{\sigma_T}\right); \quad (1.34)$$

где:  $\sigma_T, \sigma_T^0$  - текущее и начальное значения пределы текучести материала.

Для такой модели сохраняются без изменения соотношения (1.26-1.33) рассмотренных выше моделей с учетом определения энергии  $W_1$  на основе (2.34) и установления зависимости амплитудного значения энергии пластического упрочнения к концу первой фазы  $W_1^\alpha$  от параметра  $\chi_c$ , характеризующего размах пластической деформации в цикле  $W_1^\alpha = W_1^\alpha(T, \chi_c)$ :

## 1.6 Кинетические уравнения накопления повреждений в условиях ползучести

В качестве переменной, определяющей процесс накопления повреждений при ползучести, принимается соответствующая доля энергии диссипации, изменение которой на шаге нагружения может быть записано в виде [5,6]:

$$\Delta V = \sigma'_{ij} \cdot \Delta e_{ij}^c \quad (1.35)$$

Соответствующее изменение функции поврежденности

$$\Delta \Psi_2 = \frac{\Delta V}{V^R}, \quad (1.36)$$

где  $V^R = V^R(I, T)$  - предельное значение энергии диссипации при ползучести, соответствующее текущему виду НДС и действующей температуре.

Зависимость функции  $V^R$  от вида НДС и температуры может приниматься по аналогии с пластичностью на основе соотношения

$$V^R = f_2(I) \cdot V_0^R(T), \quad (1.37)$$

где  $V_0^R(T)$  - предельное значение энергии диссипации ползучести при одноосном растяжении,  $f_2(I)$  – функция вида НДС ( $0 \leq f_2(I) < \infty$ ), определяемая на основе аппроксимации, полученной из экспериментов зависимости  $V^R$  от вида НДС.

При отсутствии необходимой экспериментальной информации зависимость функции  $f_2(I)$  от вида НДС может приближенно приниматься такой же, как и для пластичности на основе соотношений (1.27-1.28).

Вклад рассматриваемого вида поврежденности в изменение меры поврежденности, по аналогии с пластичностью, принимается в виде

$$\Delta \omega_2 = s \cdot \bar{\omega}^{\frac{s-1}{s}} \cdot \Delta \Psi_2,$$

где  $s = s(T)$  – функция материала.

Таким образом, материальными функциями модели могут служить величины

$$V_0^R(T), \quad s(T).$$

Получение функций  $V_0^R(T)$  и  $s(T)$  можно осуществить путем подбора из условия удовлетворительной аппроксимации третьего участка экспериментальной кривой деформации ползучести на основе проведения вычислительных экспериментов.

### ***1.7 Моделирование хрупких повреждений***

Описание эффектов хрупкого разрушения строится на основе кинетического уравнения для изменения меры поврежденности  $\Delta\omega_3$  [5-7], позволяющего представить развитие эффектов хрупкого разрушения как квазистационарный процесс, определяемый соотношениями

$$\Delta\omega_3 = C \frac{\tilde{\sigma}_1 - \sigma_0^R}{\tilde{\sigma}_1} \quad \text{при} \quad \tilde{\sigma}_1 > \sigma_0^R$$

$$\Delta\omega_3 = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{\sigma}_1 \leq \sigma_0^R, \quad (1.38)$$

где  $\tilde{\sigma}_1$  – прогнозируемые значения главных растягивающих напряжений (эффективных напряжений);  $\sigma_0^R$  – разрушающие значения эффективных нормальных напряжений при одноосном растяжении;  $C$  – регуляризационный параметр, выбираемый на основе применения схемы «релаксации состояния», используемой для реализации вычислительного процесса при моделировании хрупких повреждений в ВК УПАКС.

Необходимость введения схемы релаксации состояния вызвана тем, что в используемых моделях момент хрупкого разрушения определяется моментом превышения главных растягивающих напряжений  $\sigma_1$  в точке тела некоторого заданного значения  $\sigma_0^R$ . При этом в процессе численного решения задачи прогнозируемое значение  $\tilde{\sigma}_1$  в некоторой точке ранее неповрежденного материала ( $\bar{\omega} = 0$ ) может значительно превышать значение  $\sigma_0^R$ , что должно приводить к полному разрушению начально неповрежденного материала в этой точке или прогнозу изменения меры поврежденности на этом шаге  $\Delta\bar{\omega}_3 = 1.0$ .

Если материал в рассматриваемой точке был уже поврежден, то прогнозируемое значение изменения поврежденности на шаге будет равным  $\Delta\bar{\omega}_3 = 1.0 - \bar{\omega}$ , где  $\bar{\omega}$  накопленное к исходному состоянию значение меры поврежденности. Однако действительное значение  $\sigma_1$  связано сложными

нелинейными зависимостями со значением параметров, характеризующих распределение НДС в окрестности рассматриваемого узла и текущим уровнем меры поврежденности  $\tilde{\omega}$ , меняющихся в пределах шага. При этом если допустить возможность изменения от исходного состояния меры поврежденности величину  $\Delta\tilde{\omega}_3$ , меньшую прогнозируемой ( $\Delta\tilde{\omega}_3 < \Delta\bar{\omega}_3$ ), то текущие напряжения  $\tilde{\sigma}_1$  могут существенно уменьшиться и оказаться меньше  $\sigma_0^R$ , за счет перераспределения напряжений в окрестности рассматриваемой точки. Таким образом, истинные значения напряжения  $\tilde{\sigma}_1$  и изменения меры поврежденности  $\Delta\tilde{\omega}_3$  должны располагаться в промежутке  $\tilde{\sigma}_1 \leq \sigma_0^R$   $0 < \Delta\tilde{\omega}_3 \leq \Delta\bar{\omega}_3$ .

В связи с этим для определения текущих значений  $\tilde{\sigma}_1$  и  $\Delta\tilde{\omega}_3$ , в стандартный процесс решения краевой задачи расчета конструкции на шаге нагружения, встраивается дополнительная процедура, согласно которой

- для всех точек материала, в которых выполняется условие  $\tilde{\sigma}_1 \geq \sigma_0^R$ ,

изменение поврежденности  $\Delta\tilde{\omega}$  на шаге представляется в виде:  $\Delta\tilde{\omega}_3 = \sum_{i=1}^n \delta\omega_i$ , где

$\delta\omega_i$  - некоторое дозированное значение изменения меры поврежденности;

- решение задачи на текущем шаге представляется в виде последовательности  $n$  подшагов;

- для каждого  $i$ -го подшага решается нелинейная краевая задача, с учетом текущих значений мер поврежденности в точках материала  $\tilde{\omega} = \bar{\omega} + \Delta\tilde{\omega}_3$  при неизменном уровне внешних воздействий.

На каждой итерации такой задачи новые значения параметров НДС и изменений меры поврежденности  $\delta\omega_i$  в точках материала с учетом перераспределения текущих напряжений. Итерационный процесс заканчивается, если текущее значение  $\tilde{\sigma}_1$  становится равным  $\tilde{\sigma}_1 \leq \sigma_0^R$ , или если значение меры поврежденности достигнет предельного значения  $\tilde{\omega} = 1$ .

Текущие значения величин  $\delta\omega_i$  выбираются при этом с учетом соображений сходимости итерационных процессов и минимальной трудоемкости процедуры в целом.

Число подшагов  $n$  определяется выполнением приведенных выше условий во всех точках исследуемой конструкции.

### *1.8 Общий алгоритм реализации физических соотношений модели поврежденного материала*

Исследование поведения конструкций на основе рассмотренных выше физических соотношений приводит к сложным нелинейным системам разрешающих уравнений. Значительная часть величин, входящих в эти уравнения, является функционалами, зависящими от предшествующей истории процесса деформирования, и может быть определена путем интегрирования для конкретных траекторий нагружения. Поэтому решение таких нелинейных задач строится обычно на основе инкрементальной формулировки исходных уравнений и применения современных шаговых методов.

При численном решении задач упруговязкопластического деформирования на основе шаговых схем происходит накопление ряда ошибок, определяемых различными этапами огрубления реального физического процесса [11]. Все эти ошибки можно разбить на три группы.

Первая группа ошибок связана с погрешностью аппроксимации траекторий нагружения при квазистатическом характере изменения внешних воздействий, так как траектория нагружения представляется в виде кусочно-ломаной линии в пространстве параметров нагружения с линейной интерполяцией значений полей в пределах отдельных шагов. В этом случае повысить точность решения задачи несложно, так как в реальных процессах нагружения траектории в виде кусочно-ломаных являются наиболее распространенными, а погрешности аппроксимации криволинейных участков могут быть снижены измельчением шага нагружения.

Вторая группа погрешностей связана с возможным нарушением равновесного состояния системы за счет несоответствия найденных полей напряжений и деформаций, полученных в текущем приближении, полям необратимых деформаций.

Третья группа погрешностей связана с неточностью вычисления величин изменения необратимых деформаций при определении и интегрировании скоростей их изменения. Обычно принимаемое предположение о постоянстве скоростей необратимых деформаций на шаге нагружения может привести к значительным ошибкам даже при исследовании лучевых процессов за счет нелинейности функций, характеризующих упрочнение материала.

Самым простым способом снижения перечисленных погрешностей является разбиение исследуемых процессов на возможно большее число шагов нагружений и более точном выполнении условий равновесия на каждом из них. В этом случае величина шага нагружения выбирается из условия точности вычисления деформаций на шаге и является достаточно малой даже при исследовании монотонных нагружений, поэтому трудоемкость решения задачи на основе подобных схем является чрезвычайно высокой.

Для повышения эффективности применения шаговых методов в настоящей работе используется комбинированная шаговая схема [4-7] в которой шаги каждого уровня несут различную функциональную нагрузку, при этом их размеры определяются из различных соображений.

На шагах верхнего уровня, называемых этапами нагружения, осуществляется внешняя линеаризация задачи. Реальная траектория нагружения представляется в виде кусочно-линейной кривой в пространстве параметров нагружения и аппроксимируется совокупностью прямолинейных участков, величина которых определяется только из условий удовлетворительной аппроксимации реальных траекторий нагружения.

Решение нелинейных задач на этапах осуществляется с использованием выбранной схемы физической линеаризации (в ВК УПАКС наиболее широко используется схема в форме метода начальных напряжений) путем итерационного уточнения равновесного состояния для текущей деформированной конфигурации конструкции.

Для вычисления изменений необратимых деформаций в пределах этапа, последний разбивается на ряд шагов нижнего уровня. На внутренних шагах все вычисления строятся независимо для отдельных точек конструкции без коррекции уравнений равновесия.

Протяженность шагов нижнего уровня  $\delta\tau_r (\sum \delta\tau_r = 1)$  выбирается из условий, обеспечивающих заданную точность вычисления скоростей изменения необратимых деформаций и поврежденности для внутренних точек траектории нагружения и интегрирования их в пределах рассматриваемого этапа. При вычислении текущей протяженности шага  $\delta\tau$  в текущей точке траектории деформирования сначала производится независимое вычисление протяженности из условий пластичности  $\delta\tau^p$ , ползучести  $\delta\tau^c$ , а затем выбирается наименьшая из протяженностей

$$\delta\tau = \min(\delta\tau^p, \delta\tau^c).$$

Процесс нагружения на шаге представляется в виде двух актов: мгновенного изменения деформаций  $\delta e_{ij}$  и температуры  $\delta T$  и релаксации напряжений за промежуток времени  $\delta t = \Delta t \delta\tau$ . Для текущего шага на основе соответствующих частных моделей последовательно вычисляются изменения пластических деформаций  $\delta e_{ij}^p$ , поврежденности  $\delta\omega_1$ , деформаций ползучести  $\delta e_{ij}^c$  и повреждений от ползучести  $\delta\omega_2$ . Далее производится коррекция текущего уровня напряжений  $(\sigma_{ij})_r$ , поврежденности  $\omega_r$  и параметров, характеризующих историю необратимого деформирования.

При вычислении мгновенных составляющих деформаций протяженность  $\delta\tau^p$  выбирается из условий, чтобы весь участок упругого деформирования (если таковой имеет место) полностью укладывался в один первый шаг  $(\delta\tau^p)_1$ , а последующие шаги не приводили к превышению прогнозируемых величин изменения напряжений  $\Delta\sigma'_{ij}$  на этапе некоторой заданной доли текущего радиуса поверхности текучести  $C_p$

$$(\delta\tau^p)_r = \frac{C_p}{M(1 - \delta\tau_1^p) \cdot |\Delta\sigma'_{ij}|}; \quad M \approx 15 - 20.$$

После вычисления для текущего шага  $\delta\tau^p$  величин изменения пластических деформаций  $\delta e_{ij}^p$  корректируется текущий уровень напряжений и значения параметров  $b_q^p$ .

При вычислении деформаций ползучести размер шага  $(\delta\tau^c)_r$ , по аналогии с шагом пластичности, выбирается из условия, чтобы величина прогнозируемого изменения напряжений за текущий шаг не превышала заданной доли радиуса поверхности ползучести. Изменение деформации ползучести на шаге вычисляется на основе схемы "предиктор-корректор", после чего корректируется текущий уровень напряжений и значений параметров  $b_i^c$ .

Оценка поврежденности материала конструкций осуществляется на текущем шаге сразу же после вычисления изменений необратимых деформаций соответствующего вида. В частности, вычисление приращений поврежденности за счет пластического разрыхления и соответствующих текущих ее значений

производится на основе данных, полученных в результате вычисления приращений пластических деформаций. Для текущих значений напряжений вычисляются значения главных напряжений, а затем значение функции вида НДС  $f_1(I)$  и соответствующее значение функции  $(\delta\psi)_r$ . Далее вычисляются элементарное и текущее изменения меры поврежденности

$$(\Delta\omega)_r = (\Delta\omega)_{r-1} + (\delta\omega)_r.$$

Ввиду того, что во всех соотношениях, определяющих модели материала, используются истинные напряжения, коррекция их за счет изменения поврежденности на шагах нижнего уровня не производится. Корректируются лишь приведенные напряжения на шаге верхнего уровня в общей модели поврежденного материала, определяемой соотношениями (2.1).

Непосредственное влияние текущей поврежденности на внутренние параметры состояния сказывается за счет изменения полных деформаций, получаемых в результате решения на текущей итерации линеаризованной краевой задачи.

В случае учета эффектов хрупкого разрушения изменение поврежденности этого вида осуществляется параллельно с анализом поврежденности за счет пластичности и ползучести.

Таким образом, в результате последовательного вычисления величин, входящих в уравнения пластичности, ползучести и накопления повреждений, на каждом шаге низшего уровня и суммирования их в пределах этапа нагружения могут быть определены все значения функций, необходимые для получения текущего приближения решения нелинейной задачи.

## 2. Решение задач нелинейного деформирования и разрушения конструкций на основе МКЭ

### 2.1. Методические основы решения нелинейных квазистатических задач

Сложность анализа поведения деформируемых систем на основе рассмотренных моделей поврежденного материала значительно возрастает, если наряду с физической нелинейностью необходимо учитывать нелинейность геометрических соотношений.

При решении нелинейных задач механики деформируемого тела, нелинейность которых обусловлена учётом меняющейся метрики исследуемых объектов, возможны различные, эквивалентные с теоретической точки зрения, подходы [12], отличающиеся, в основном, выбором базовых конфигураций, к которым относятся все переменные задачи: Лагранжев подход, использующий в качестве базовой начальную недеформируемую конфигурацию, Эйлеров подход, использующий конечную конфигурацию и различные варианты инкрементальных формулировок, использующие некоторые промежуточные конфигурации. Для рассматриваемых задач исследования поведения конструкций с учётом и физической и геометрической нелинейности наиболее удобной является инкрементальная формулировка с использованием в качестве базовой – сопутствующей деформированной конфигурации конструкции [12]. Такая формулировка позволяет использовать при исследовании процесса нагружения конструкций современные физические модели, описывающие поведение материала с учётом влияния истории предшествующего необратимого деформирования, и, кроме того, приводит к весьма технологичной и физически наглядной схеме линеаризации задачи.

Для характеристики поведения исследуемой деформируемой системы в процессе её нагружения в рассмотрение вводятся три отсчётных состояния системы: начальное (ненагружённое), исходное и текущее, характеризующие соответствующими моментами времени  $t$  и координатами точек  $x_i$ , определяющих конфигурацию конструкции:

- начальное  $t = t^0$ ;  $x_i^0 = x_i(t^0)$ ;

- исходное  $t = \bar{t}$ ;  $\bar{x}_i = x_i(\bar{t})$ ;

- текущее  $t = \bar{t} + \Delta t$ ;  $x_i = x_i(t)$ .

В процессе пошагового решения задачи конфигурация системы  $\bar{x}_i$  в исходном состоянии используется в качестве начальной лагранжевой системы на шаге нагружения для определения текущего состояния и текущей конфигурации системы  $x_i$  в конце шага. Связь между конфигурациями системы в исходном и текущем состояниях определяется с учетом смещений точек конструкции  $\Delta u_i$  за текущий шаг нагружения:

$$x_i = \bar{x}_i + \Delta u_i. \quad (2.1)$$

В качестве меры деформации системы на шаге нагружения используется модифицированный тензор приращений деформации Грина [12], определенный в метрике исходной конфигурации:

$$\begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \Delta \varepsilon_{ij} + \Delta \eta_{ij}; \\ \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}); \\ \Delta \eta_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для характеристики напряженного состояния конфигураций используется модифицированный тензор напряжений Кирхгофа [12]  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \Delta \sigma_{ij}; \quad (2.3)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}$  - тензор напряжений Эйлера в исходном состоянии  $\bar{x}_i$  перед приложением очередного шага нагрузки,  $\Delta \sigma_{ij}$  - приращение тензора напряжений Пиолы - Кирхгофа второго рода на шаге нагружения, отнесенного к исходному состоянию.

В конце каждого шага тензор  $\sigma_{ij}$  преобразуется в тензор напряжений Эйлера, который используется в качестве тензора начальных напряжений для следующего шага

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{DET J} J_{ik} \sigma_{kl} J_{jl}, \quad (2.4)$$

где  $J_{ij} = \partial x_i / \partial \bar{x}_j$ .

Пусть состояние деформируемой системы в исходной конфигурации  $\bar{x}_i$  характеризуется значением температуры  $\bar{T}$  и объёмных сил  $\bar{F}_i (i = \overline{1,3})$ , заданных в объёме конструкции  $V$ , поверхностных сил  $\bar{P}_i (i = \overline{1,3})$ , заданных на части поверхности  $\Sigma_1$ , а также значением начальных напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$  и параметров  $\bar{r}_\alpha^p, \bar{r}_\beta^c, \bar{r}_\gamma^i$ , характеризующих текущую историю необратимого деформирования и повреждённость материала в исходном состоянии. В процессе изменения внешних воздействий на шаге нагружения перечисленные выше поля получают приращения  $\Delta F_i, \Delta P_i$ , соответственно. Кроме этого, на части граничных поверхностей  $\Sigma_2$  может произойти изменение заданных граничных перемещений:

$$\Delta u_i^G = u_i^G - \bar{u}_i^G (i = \overline{1,3}). \quad (2.5)$$

Тогда уравнения равновесия деформируемой системы на шаге нагружения (глобальные и для приращения воздействий) могут быть получены из принципа возможной работы, записанного для текущего состояния:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) - F_i \delta(\Delta u_i)) dV - \int_{\Sigma_1} P_i \delta(\Delta u_i) d\Sigma = \\ \int_V ((\bar{\sigma}_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \delta(\Delta e_{ij}) - (\bar{F}_i + \Delta F_i) \delta(\Delta u_i)) dV - \int_{\Sigma_1} (\bar{P}_i + \Delta P_i) \delta(\Delta u_i) d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

В (3.6) интегрирование осуществляется по площадям и объёмам текущей конфигурации системы.

Полагая изменения деформаций на шаге нагружения достаточно малыми и принимая допущение о справедливости суммирования на шаге приращений упругих  $\Delta e_{ij}^e$  и необратимых  $\Delta e_{ij}^*$  деформаций  $\Delta e_{ij} = \Delta e_{ij}^e + \Delta e_{ij}^*$ ,

можно записать соотношения (2.1), связывающие приращения напряжений  $\Delta \sigma_{ij}$ , и деформаций  $\Delta e_{ij}$  в виде

$$\Delta \sigma_{ij} = c_{ijkl} \cdot (\Delta e_{kl} - \Delta d_{kl}), \quad (2.7)$$

где  $c_{ijkl}$  - тензор упругих характеристик материала.

При этом материалные функции моделей упругости, пластичности, ползучести и накопления повреждений должны быть построены на основе истинных диаграмм деформирования материала.

Преобразуя (2.6) с учётом соотношений (2.2), (2.7) и пренебрегая членами высшего порядка малости можно получить линейризованную (по геометрической нелинейности) форму записи принципа возможной работы для шага нагружения:

$$\int_V ((c_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta d_{kl}) - \bar{\sigma}_{ij})\delta(\Delta\varepsilon_{ij}))dV - \int_V \bar{\sigma}_{ij}\delta(\Delta\eta_{ij})dV - \int_V (\bar{F}_i + \Delta F_i)\delta(\Delta u_i)dV - \int_{\Sigma_1} (\bar{P}_i + \Delta P_i)\delta(\Delta u_i)d\Sigma = 0 \quad (2.8)$$

При фиксированных на текущем шаге значениях коэффициентов  $\Delta d_{ij}$  линейризованная система (2.8) эквивалентна условию стационарности функционала:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \cdot \int_V \Delta\varepsilon_{ij} \cdot c_{ijkl} \cdot (\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta d_{kl}) \cdot dV + \int_V \Delta\eta_{ij} \cdot \bar{\sigma}_{ij} \cdot dV - \\ & - \int_V \Delta u_i \cdot (F_i + \Delta F_i) \cdot dV - \int_{\Sigma_1} \Delta u_i \cdot (P_i + \Delta P_i) \cdot d\Sigma + \int_V \Delta\varepsilon_{ij} \cdot \bar{\sigma}_{ij} \cdot dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из условия стационарности функционала (2.9) следуют дифференциальные уравнения равновесия системы в исходном состоянии, а также инкрементальные уравнения равновесия на шаге для напряжений, связанных с изменениями деформаций и перемещений соотношениями (2.2).

Условие стационарности функционала (2.9)

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.10)$$

вместе с уравнениями (2.1), (2.2), (2.7)) и кинетическими условиями (2.5) на части поверхности  $\Sigma_2$ , составляют полную систему линейризованных уравнений, описывающих поведение конструкции на шаге нагружения.

В соответствии с рассмотренными в предыдущем разделе схемами физической линейризации задачи в рамках метода начальных напряжений, условие стационарности функционала (2.10) можно представить в виде следующего операторного уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi = HU + R = 0, \\ H = H_o(\bar{t}) + H_\sigma(\bar{t}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $H = H(t)$  - линейный оператор, состоящий из двух операторов:  $H_o(\bar{t})$ , зависящего от конфигурации деформированной системы  $\bar{x}_i$  в исходном состоянии и характеристик упругости материалов, определенных при температуре  $T$  текущего состояния, и  $H_\sigma(\bar{t})$ , зависящего от конфигурации  $\bar{x}_i$  и уровня началь-

ных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  в исходном состоянии (при решении задач в геометрически линейной постановке  $H_\sigma = 0$  и  $H = H_0(\bar{t})$ );

-  $U$  - изменения перемещений точек конструкции для текущего шага нагружения;

-  $R$  - вектор нагрузки, включающий в себя постоянную  $R^0$  и переменную  $r$ :

$$R = R^0 + r. \quad (2.12)$$

Постоянная составляющая вектора  $R^0 = R^0(\bar{t})$  определяется совокупностью внешних воздействий на конструкцию в виде изменений на шаге нагружения объемных и поверхностных сил, температуры, граничных перемещений, а также величиной возможной невязки уравнений равновесия в исходном состоянии. Переменная часть вектора  $r = r(U, t)$  включает в себя нелинейные члены, зависящие от решения задачи, и определяется текущими значениями дополнительных деформаций  $\Delta d_{ij}$ .

При решении задач на шаге нагружения оператор  $H$  и вектор  $R^0$  формируются в начале шага и не меняются в процессе последовательных приближений. При этом решение задачи (2.11) представляется в виде

$$U = U^0 + u; \quad (2.13)$$

где  $U^0 = H^{-1}R^0$  соответствует решению задачи (2.11) в линейном приближении,  $u$  - нелинейная часть вектора решения, зависящая от вектора  $r$ .

Таким образом, в соответствии с рассмотренной выше схемой физической линеаризации, решение нелинейной задачи (2.11) на шаге нагружения может быть сведено к однократному нахождению вектора линейной части решения  $U_0$  и последовательному уточнению нелинейного вектора  $u$  в процессе последовательных приближений из уравнения

$$u = H^{-1}r(U) \quad (2.14)$$

В дискретной формулировке задачи на основе МКЭ операторному уравнению (2.11) соответствует система алгебраических уравнений, в которой роль операторов  $H_0$  и  $H_\sigma$  играют матрицы жесткости конструкции  $[H_0]$  и  $[H_G]$  соответственно, а роль векторов  $U$ ,  $R^0$  и  $r$  - вектора узловых перемещений и узловых сил дискретной модели конструкции  $\{U\}$ ,  $\{R^0\}$  и  $\{r\}$ .

$$([H_0] + [H_G]) \cdot \{U\} = \{R^0\} + \{r\}, \quad (2.15)$$

где  $[H_0]$ ,  $[H_G]$ ,  $\{U\}$ ,  $\{R^0\}$ ,  $\{r\}$  - начальная матрица жёсткости, инкрементальная геометрическая матрица жёсткости, вектор приращений узловых перемещений, постоянная составляющая вектора узловых сил и составляющая вектора узловых сил, определяемых эффектами необратимого деформирования.

Таким образом, согласно принятой схеме геометрической линеаризации, необходимо на каждом шаге среднего уровня (подэтапе) пересчитывать матрицу жёсткости системы и корректировать вектор узловых сил с учетом невязки уравнений равновесия в исходном состоянии в соответствии с последними слагаемыми функционала (2.9):

$$\int_{\bar{V}} \Delta u_i \cdot F_i \cdot dV + \int_{\bar{\Sigma}_1} \Delta u_i \cdot P_i \cdot d\Sigma - \int_{\bar{V}} \Delta \varepsilon_{ij} \cdot \bar{\sigma}_{ij} \cdot dV \quad (2.16)$$

## ***2.2. Принципиальная схема организации вычислительного процесса***

Как уже отмечалось выше, исследование процессов деформирования и разрушения конструкций при термосиловых квазистатических нагружениях на основе рассмотренных выше моделей и алгоритмов может быть сведено к пошаговому интегрированию разрешающих уравнений, записанных для текущей конфигурации конструкции в рамках комбинированной шаговой схемы [4-6,11].

В соответствии с этой схемой процесс нагружения конструкции для каждой из ее точек представляется в виде соответствующего набора траекторий нагружения. Каждая из траекторий представляет собой кривую в пространстве параметров нагружения, независимыми координатами которого являются время, температура, а также компоненты разложения по пространственным осям векторов объемных сил, поверхностных сил и граничных перемещений. При дискретизации процесса нагружения величина приращений внешних воздействий (этапов нагружения) определяется условиями удовлетворительной аппроксимации истинной траектории нагружения совокупностью прямолинейных участков (т.е. линейным изменением в них функций нагружения).

В отличие от большинства традиционно используемых шаговых схем, в предлагаемой методике размер шага может быть значительно большим, так как благодаря применению внутренней шаговой схемы, о которой говорилось в

предыдущем разделе, размер шага здесь значительно меньше влияет на точность вычисления внутренних характеристик процесса деформирования. В частности, при монотонных процессах нагружения в один шаг можно включать полное изменение внешних воздействий, как это делается при решении задач на основе деформационной теории пластичности. При увеличении кривизны траектории нагружения, а также при исследовании стадий процесса, при которых накопленная поврежденность начинает заметно влиять на характеристики процесса деформирования, размер шага приходится уменьшать. Кроме того, при наличии изломов траектории нагружения дискретизация процесса по шагам должна обеспечивать совмещение узлов дискретизации с точками излома траектории.

Дополнительные ограничения на размер шага верхнего уровня накладываются также при решении задач с учетом геометрической нелинейности из-за допускаемой на каждом шаге погрешности в уравнениях равновесия при определении начального состояния исследуемой деформируемой системы. Величина этой погрешности зависит от размера используемого шага и в значительной степени погашается учетом корректирующих членов на каждом последующем шаге. При этом для сохранения точности решения задачи, без введения дополнительного итерационного процесса по уточнению начального состояния деформируемой системы, введен дополнительный уровень дискретизации процесса по параметру нагружения в виде подэтапов нагружения.

Подэтап представляет собой отдельный шаг нагружения, эквивалентный по своим функциям шагу верхнего уровня (этапу нагружения) с регламентацией размера, определяемого максимальной величиной возникающих на этом шаге приращений деформаций. Размер подэтапа либо задается в виде числа разбиений текущего этапа на подэтапы, либо вычисляется автоматически путем задания допускаемой величины приращений деформаций. Для определения изменения необратимых деформаций в пределах этапов (подэтапов) нагружения используется рассмотренная выше внутренняя шаговая схема.

На каждом этапе нагружения решается нелинейная краевая задача для соответствующего изменения внешних воздействий с учетом всей предшествующей истории необратимого деформирования и накопленной

поврежденности материала. Ее линейризация осуществляется на основе выбранной схемы физической линейризации и схемы самокоррекции, используемой при решении задач в геометрически нелинейной постановке.

Численное решение линейризованных задач осуществляется на основе МКЭ с использованием рассмотренных ниже моделей изопараметрических квадратичных КЭ с сирендиповой аппроксимацией поля перемещений.

При использовании для физической линейризации нелинейных задач метода начальных напряжений, решение задачи на каждом подэтапе сводится к однократному нахождению вектора линейной части решения  $\{Q_0\}$  и последовательному уточнению нелинейного вектора  $\{q^n\}$  из уравнений:

$$\{Q_0\} = [H]^{-1} \{R_0\};$$

$$[H]\{q^n\} - \{r(Q^{n-1})\} = 0.$$

$$\{Q^n\} = \{Q_0\} + \{q^n\}$$

где  $\{R_0\} = \{R_0(\bar{t})\}$  - постоянная составляющая вектора нагрузки, определяемая совокупностью внешних воздействий на конструкцию в виде изменений на шаге нагружения объемных и поверхностных сил, температуры, граничных перемещений;

$\{r\} = \{r(Q)\}$  - переменная часть вектора включает в себя нелинейные члены, зависящие от решения задачи и определяется текущими значениями необратимых деформаций.

С целью ускорения сходимости итерационных процессов, при такой форме организации вычислений, в ВК УПАКС реализована специальная схема промежуточных экстраполяции [5-7].

Возможна другая, альтернативная форма организации процесса последовательных приближений решения физически нелинейных задач, согласно которой нелинейная часть решения на шаге нагружения определяется на основе последовательности:

$$[H](\{q^n\} - \{q^{n-1}\}) - \{R_F\} + \sum_{\Delta V} [B]^T \{\sigma^{n-1}\} = 0,$$

где  $\{q^n\}$  и  $\{q^{n-1}\}$  - значения приращений компонент вектора узловых перемещений на текущем шаге нагружения в двух соседних приближениях;  $\{R_F\}$  - постоянная составляющая вектора узловых сил конструкции, определяемая совокупностью силовых внешних воздействий на конструкцию на шаге нагружения (без учета температурных составляющих), последнее слагаемое -

вектор внутренних узловых сил, вычисляемый на основе значений компонент тензора напряжений  $\{\sigma^{n-1}\}$  в физических узлах конечного элемента в  $n-1$  приближении,  $[B]$ - матричный оператор, связывающий деформации в элементе с его узловыми перемещениями.

В этой схеме, при использовании для линеаризации задачи схемы метода Ньютона, матрица  $[H]$  вычисляется на основе касательных матриц, связывающих изменения напряжений с изменениями деформаций в физических узлах для каждой текущей итерации.

В случае применения для решения физически нелинейных задач рассмотренной выше схемы метода начальных напряжений (такая схема используется в качестве основной в ВК УПАКС), исследование поведения конструкций на этапе (подэтапе) нагружения сводится к выполнению последовательности следующих типовых операций.

1. Формирование полей, характеризующих нагружение конструкций на текущем этапе (подэтапе) (формирование полей внешних воздействий и времени, соответствующих началу и концу текущего этапа нагружения).

2. Вычисление матриц жесткости и векторов узловых сил, обусловленных изменением внешних воздействий для конечных элементов, входящих в состав исследуемой конструкции. В случае применения схемы самокоррекции при вычислении вектора узловых сил следует учитывать дополнительные силы, обусловленные невязкой уравнений равновесия, определяемых соотношением (2.16). Здесь же производится построение матрицы  $[H]$  и вектора узловых сил  $\{R^0\}$  результирующей системы. Все эти вычисления, так же как и последующее обращение матрицы  $[H]$ , производится лишь для тех этапов, на которых меняются жесткостные характеристики конструкции (при учете геометрической нелинейности - для каждого подэтапа, без учета геометрической нелинейности - для первого этапа, а также всех последующих, на которых произошло изменение температуры).

3. Вычисление вектора узловых сил конструкции  $\{r\}$ , обусловленных изменением необратимых деформаций и поврежденности (т.е. дополнительных деформаций  $\Delta d_{ij}$ ). Вычисления производятся лишь для тех КЭ, в которых названные величины изменились по сравнению с их значениями на предыдущей итерации.

4. Решение системы алгебраических уравнений для текущего вектора узловых сил ( $[H]\{U^0\} - \{R^0\} = 0$  - на первой итерации и  $[H]\{u\} - \{r\} = 0$  - на последующих) с учетом результатов приведения матрицы  $[H]$  к диагональному виду при первом ее обращении.

5. Проведение анализа поведения решения в процессе последовательных приближений на основе полученных в текущих приближениях значений векторов узловых перемещений  $\{u\}$  (проверка условий монотонности изменения компонент решения  $u_i$ , оценка изменения длины вектора  $L = |\{u\}|$  в процессе приближений). Экстраполяция решения согласно рассмотренной ниже схеме промежуточных экстраполяций [44] при выполнении необходимых условий монотонности процесса приближений.

6. Вычисление в физических узлах конструкции величины изменения деформаций  $\Delta e_{ij}$  для текущего значения вектора узловых перемещений  $\{U\} = \{U^0\} + \{u\}$ .

7. Вычисление в физических узлах конструкции величин изменения необратимых деформаций  $\Delta e_{ij}^p, \Delta e_{ij}^c$  меры поврежденности  $\omega$ , дополнительных деформаций  $\Delta d_{ij}$ , а также параметров, характеризующих текущую историю необратимого деформирования.

8. Проверка условий окончания процесса последовательных приближений на основе используемого критерия сходимости и при их нарушении - повторение всех операций, начиная с пункта 3.

9. Уточнение полей, характеризующих НДС в каждом физическом узле конструкции (уточнение текущей деформированной конфигурации, приведение к этой конфигурации поля напряжений) и определяющих начальное состояние для следующего шага нагружения.

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструкций без оценки предельных значений параметров внешних воздействий, соответствующих их разрушению или исчерпанию их несущей способности, полное решение задачи сводится к последовательному выполнению описанных выше операций для намеченных этапов нагружения. Для задач, связанных с оценкой прочности конструкций, алгоритм решения дополняется рядом процедур, обеспечивающих анализ выполнения соответствующих критериальных условий [4-7].

При этом для получения возможно более полной картины текущего состояния конструкции одновременно используются несколько различных критериев разрушения (предельного состояния), оценка значимости и приоритет которых устанавливается либо заранее, либо оперативно в процессе решения конкретной задачи. Среди них наиболее важными являются два основных критерия. Первый, связанный с локальным нарушением прочности, определяется условием достижения в одном или нескольких смежных физических узлах допустимого значения меры поврежденности  $|\omega|$

$$\omega > |\omega|.$$

Второй критерий определяет условие исчерпания конструкцией ее несущей способности (глобальное нарушение прочности). При этом малое изменение внешних воздействий заданного вида приводит к большим изменениям перемещений и деформаций, интенсивно возрастающим по мере увеличения параметра нагрузки, т.е. наступает потеря устойчивости необратимого деформирования. Проверка такого состояния конструкции осуществляется по изменению определителя системы алгебраических уравнений на этапах нагружения, а также на основе анализа изменения вектора узловых перемещений  $\{u\}_n$  нелинейной части решения задачи на текущем этапе в процессе последовательных приближений. Длина этого вектора  $L_n = |\{u\}_n|$  является функцией номера приближения  $n$  и обладает рядом особенностей, позволяющих использовать ее для установления момента начала потери устойчивости. В частности, при достаточной гладкости функций, определяющих процесс необратимого деформирования материала,  $L_n$  является гладкой, монотонно возрастающей функцией, имеющей положительную первую производную  $dL/dn > 0$ .

Для сходящихся процессов  $dL/dn < 0$  и при возрастании  $n$  функция и ее производные стремятся к своим предельным значениям

$$L_n \rightarrow L^*; \quad dL/dn \rightarrow 0; \quad d^2L/dn^2 \rightarrow 0.$$

На участке расходящегося процесса при возрастании  $n$  функция беспрестанно растет, а ее вторая производная становится положительной.

Перечисленные особенности поведения функции  $L_n$  позволили использовать ее для оценки несущей способности конструкций в процессе

необратимого деформирования. При этом признаком исчерпания несущей способности служит условие

$$dL/dn > 0; \quad d^2L/dn^2 > 0 .$$

Проверка такого условия осуществляется в процессе последовательных приближений в составе операций п.5 рассмотренного выше алгоритма. При выполнении этого условия производится еще несколько приближений, используемых для подтверждения факта исчерпания конструкцией несущей способности, после чего решение задачи может быть прекращено.

### ***2.3. Построение семейства изопараметрических конечных элементов***

Разработка эффективных методик, используемых для анализа конструкций общего вида на основе МКЭ, требует наличия определенного набора КЭ, описывающих НДС отдельных фрагментов, как с позиций сплошной среды, так и прикладных теорий пластин и оболочек. При этом желательно, чтобы каждый тип КЭ был достаточно эффективным в возможно более широкой области применения. Иначе говоря, КЭ оболочек и пластин должны хорошо работать в широком диапазоне изменения толщин и видов нагружения, а КЭ сплошной среды - описывать не только общие, но и характерные для пластин и оболочек виды НДС при расположении таких элементов в один слой по толщине и соотношениях сторон того же порядка, что и в соответствующих тонкостенных элементах.

Для описания НДС общего вида в настоящее время все более широкое распространение получают изопараметрические КЭ, в которых искомые функции и геометрические параметры аппроксимируются в декартовой системе координат полиномами одинаковой степени. Удовлетворяя основным условиям, гарантирующим сходимость конечно-элементных решений, такие модели позволяют получать достаточно хорошие результаты, когда соотношения размеров сетки КЭ в различных направлениях близко к единице. Однако, при изменении этого соотношения, к которому приходится прибегать при решении задач с различным характером изменяемости функций вдоль различных направлений, точность и скорость сходимости таких моделей оказываются неудовлетворительными.

Основные причины низкой точности элементов, находящихся в названных условиях, различные способы их устранения и варианты построения

эффективных моделей КЭ сплошной среды, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям рассмотрены в [6]. Ниже представлено описание реализованного в ВК УПАКС семейства универсальных изопараметрических КЭ, значительно превосходящих по точности и скорости сходимости многие существующие элементы подобного типа.

В основу построения изопараметрических КЭ положен принцип отображения регулярных элементов, имеющих прямолинейные стороны, ребра и грани в локальной системе координат, на порождаемые криволинейные элементы в глобальной декартовой системе. При этом между локальной и глобальной системой координат должно быть установлено взаимно однозначное соответствие. В МКЭ для установления такого соответствия используются функции формы, подобные тем, которые применяются для аппроксимации в элементах искомых функций. Отображение из локальной системы координат  $\xi, \eta, \zeta$  в декартову  $x, y, z$  осуществляется посредством соотношений [6]:

$$x = N_i(\xi, \eta, \zeta)x_i, \quad i = 1 \div m$$

$$y = N_i(\xi, \eta, \zeta)y_i,$$

$$z = N_i(\xi, \eta, \zeta)z_i,$$

где  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  - функции формы элемента, являющиеся функциями локальных координат  $\xi, \eta, \zeta$ ;  $x_i, y_i, z_i$  - декартовы координаты базовых узлов элемента,  $m$  - число базовых узлов.

В изопараметрических элементах функции формы  $N_i$ , используемые для описания геометрии элемента, и число базовых узлов принимаются такими же, как для аппроксимации искомой функции. Например, в локальной системе координат изменение функции в этом же элементе может быть записано в виде

$$u(\xi, \eta, \zeta) = N_j(\xi, \eta, \zeta)u_j, \quad j = 1 \div n.$$

Исходными соотношениями, определяющими матрицу жесткости КЭ  $[k]$ , как известно [6], являются соотношения

$$[k] = \int_{\Delta V} [B]^T [C] [B] dV, \quad (2.35)$$

где  $[C]$  – матрица коэффициентов упругости материала элемента.

$$[C] = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{vmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (2.36)$$

$$[B]=[D][N], \quad (2.37)$$

$$\text{где } [D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$[N]$  – матрица функций формы КЭ

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$\Delta V$  - объем КЭ.

Из уравнений (2.37-2.39) следует, что при построении матриц жесткости изопараметрических элементов необходимо вычислять производные от различных функций по декартовым координатам и выполнять интегрирование по площадям и объемам элемента. Непосредственно сделать это не удастся, т.к. функции записаны в локальной системе. Поэтому для получения матрицы жесткости элемента приходится выполнять два преобразования.

Первое из них связано с выражением глобальных производных функций формы через локальные. Рассмотрим получение частных производных функции  $u(\xi, \eta, \zeta)$  по декартовым координатам  $x, y, z$ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} u_i; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} u_i; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} u_i$$

Очевидно,

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}$$

Аналогичные выражения можно получить для  $\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}$  и  $\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}$ .

В матричном виде эти соотношения можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Вектор в левой части (2.24) вычисляется легко, т.к.  $N_i$  являются функциями локальных координат. Поэтому вектор производных от  $N_i$  по декартовым координатам можно получить в виде

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}. \quad (2.41)$$

В свою очередь матрица  $[J]$  может быть получена в виде произведения двух матриц, одна из которых содержит константы, а коэффициенты другой легко вычисляются

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & & \cdot \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Второе преобразование связано с интегрированием функций по элементу. Элементарный объем в криволинейных координатах преобразуется по известной формуле

$$dx dy dz = \det[J] d\xi d\eta d\zeta.$$

Если учесть, что матрица жесткости элемента определяется соотношениями (3.35), то вычисление ее коэффициентов сводится к интегрированию матрицы

$$\int_v [G] dV = \int_v [B]^T [C] [B] dV. \quad (2.43)$$

Так как локальные координаты являются нормализованными координатами, то с учетом рассмотренных выше преобразований интеграл (2.43) может быть записан в виде

$$\int_v [G(x, y, z)] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [G(\xi, \eta, \zeta)] |\det[J]| d\xi d\eta d\zeta.$$

Интегрирование здесь осуществляется по объему куба, а не искривленной призмы, поэтому пределы интегрирования записываются просто.

Следует отметить что, несмотря на формальную простоту, выражения для коэффициентов матрицы  $[G]$  оказываются весьма сложными, и получить их в явном виде не представляется возможным. Поэтому построение матрицы жесткости изопараметрических элементов осуществляется с помощью численного интегрирования.

При выборе метода интегрирования в МКЭ принимают во внимание необходимость получения возможно более высокой точности результата при минимальном числе внутренних точек, т.к. вычисление подинтегральных функций связано со значительными затратами машинного времени. Поэтому в большинстве случаев при выполнении численного интегрирования в МКЭ используются квадратурные формулы Гаусса.

Интеграл от одномерной функции  $f(\xi)$  в нормализованных координатах, согласно формуле Гаусса, может быть представлен в виде

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(\xi_i),$$

где  $\alpha_i$  - весовые коэффициенты, значения которых зависят от числа точек интегрирования  $\xi_i$ . Формула Гаусса позволяет точно вычислить интеграл от полинома степени  $2n-1$ , где  $n$  - число точек интегрирования. Положения  $\xi_i$  точек Гаусса и соответствующие значения весовых коэффициентов  $\alpha_i$  можно найти в [6].

При вычислении интегралов по двум и трем переменным, формулы интегрирования по схеме Гаусса имеют вид

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \alpha_i \alpha_j f(\xi_i, \eta_j),$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} \alpha_i \alpha_j \alpha_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k),$$

где  $n_1, n_2, n_3$  - количество точек интегрирования по каждому из направлений. Обычно принимается  $n_1=n_2=n_3$ .

Координаты  $\xi_i, \eta_j, \zeta_k$  и весовые коэффициенты  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$  совпадают с соответствующими значениями для одномерного случая.

В настоящей методике в качестве базового элемента используется изопараметрический двадцатиузловой шестигранный КЭ с квадратичной сирендиповой аппроксимацией функций.

Общий вид и нумерация узлов используемого КЭ изображены на рис. 1

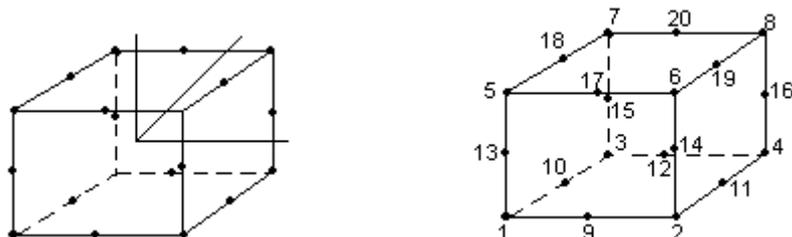


Рис. 1

Функции формы для такого элемента принимаются в виде:

угловые узлы:  $N_i = \frac{1}{8} (1 - \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i - 2)$

на ребрах:  $\xi_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$

на ребрах:  $\eta_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)$

(2.44)

на ребрах  $\zeta_i = 0 \quad N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$

Элемент имеет шестьдесят степеней свободы (по три перемещения в каждом узле). Механические характеристики материала, напряжения, деформации, а также параметры характеризующие историю необратимого деформирования и поврежденности материала определяются в «физических» узлах элемента (в текущей версии ВК УПАКС «физические» узлы совпадают с узлами сетки КЭ).

Внешние воздействия в виде температуры, нейтронного облучения, объемных, поверхностных сил и граничных перемещений могут меняться в элементе по квадратичному закону.

При вычислении матрицы жесткости такого элемента использована рассмотренная выше методика улучшенного интегрирования [6], позволившая получить универсальный КЭ значительно превосходящий по точности и скорости сходимости многие существующие элементы подобного типа.

Благодаря применению методики улучшенного интегрирования при вычислении матрицы жесткости этого элемента, он также может быть использован в качестве универсального КЭ оболочки общего вида в диапазоне изменения относительных толщин порядка 0.1-0.001.

В вычислительном комплексе «ВК УПАКС», наряду с рассмотренным выше пространственным элементом, которому присвоен идентификатор «тип 04», также реализованы следующие типы конечных элементов.

Тип 02. Изопараметрический восьмиузловой КЭ тел вращения в условиях осесимметричной деформации. В элементе учитываются переменность механических характеристик, температуры, объемных и поверхностных сил, а также граничных перемещений, которые могут быть заданы на любой поверхности элемента. Элемент имеет шестнадцать степеней свободы (осевое и радиальное перемещение в каждом узле). При вычислении матрицы жесткости элемента применяется методика улучшенного интегрирования, позволившая использовать эти элементы в качестве универсального КЭ осесимметричных пластин и оболочек в широком диапазоне изменения относительных толщин  $h/R=0,1-0,001$ .

Тип 05. Двумерный изопараметрический восьмиузловой КЭ для анализа элементов конструкций, находящихся в условиях плосконапряженного состояния. По всем другим показателям элемент идентичен элементу 02.

Тип 06. Двумерный изопараметрический восьмиузловой КЭ для анализа элементов конструкций, находящихся в условиях плоской деформации. По всем другим показателям элемент идентичен элементу 02.

Следует отметить, что при построении жесткостных характеристик перечисленных элементов применялась рассмотренная выше схема улучшенного интегрирования, позволившая значительно снизить погрешности, связанные со

сдвиговым и мембранным запираем и другие отрицательные свойства, характерные для КЭ, в которых используются аппроксимации функций в виде неполных степенных полиномов. Применение этой схемы позволило значительно повысить точность и снизить трудоемкость получаемых решений для всех перечисленных моделей КЭ и, кроме этого, использовать "твердотельные" элементы (типа 02) в качестве универсальных КЭ, одинаково эффективных как при анализе массивных фрагментов, так и тонкостенных пластин и оболочек (при расположении КЭ в один ряд по толщине) в широком диапазоне изменения толщин до  $h/R \approx 0.001$ .

### **3. Программная реализация модели поврежденного материала в составе программных средств вычислительного комплекса ВК УПАКС**

#### ***3.1 Основные этапы решения задач и структура программных средств ВК УПАКС***

С точки зрения архитектуры ВК УПАКС (в дальнейшем ВК) представляет собой интегрированный пакет программных средств, состоящий из нескольких формально независимых компонентов:

- блока формирования информационной модели исследуемых конструкций (препроцессор);
- блока решения краевых задач (процессор);
- блока, обеспечивающего вывод и визуализацию информации об исследуемых конструкциях на различных этапах решения задачи (постпроцессор);
- блока информационного обеспечения, поддерживающего связь всех фрагментов комплекса в едином вычислительном процессе, реализующего хранение, накопление и доступ к данным, используемым в процессе решения задачи.

Решение конкретных задач в рамках ВК начинается с составления расчетной схемы решаемой задачи, содержащей информацию о типе задачи, геометрической дискретизации исследуемой конструкции, дискретизации процесса нагружения, распределения полей внешних воздействий в объеме и по поверхности конструкции и т.д., иначе говоря, всю входную информацию о решаемой задаче. Конкретный состав и форма представления этой информации зависят от средств автоматизации ввода, используемых соответствующими программами препроцессора.

Дальнейшее решение задачи производится путем последовательной загрузки перечисленных компонентов ВК согласно приведенной на рис. 2 схеме.

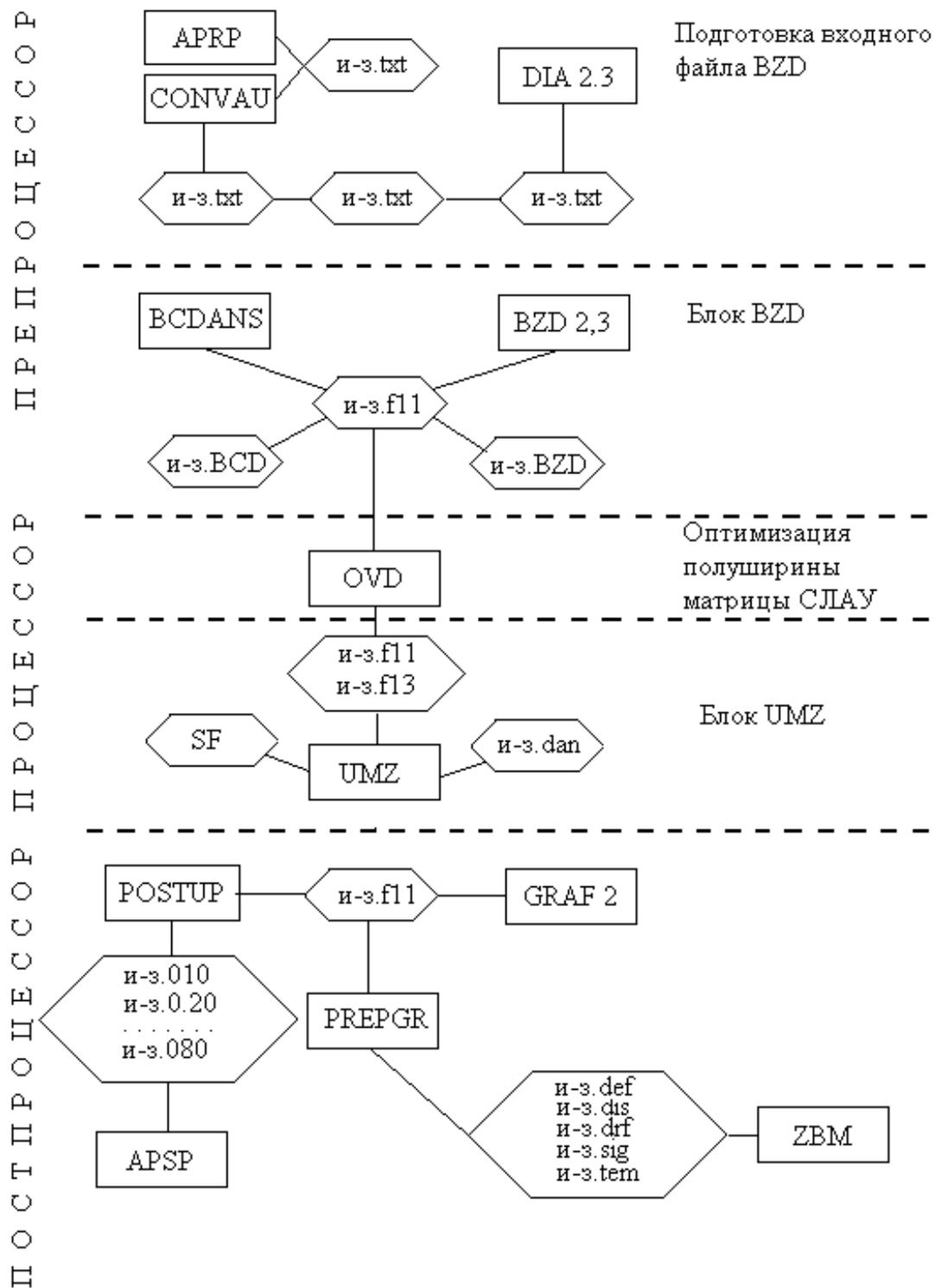


Рис. 2

## Препроцессор – блок формирования информационной модели исследуемых конструкций

С помощью препроцессора в комплексе осуществляются функции начального описания конструкции, расчетной схемы, дискретизации конструкции и отдельных ее частей (подконструкций), производится описание внешних полей и формирование входных баз данных, содержащих информационную модель исследуемой конструкции (геометрию, топологию, поля состояний), согласованную со схемой численного решения задачи.

В составе ВК функционирует ряд альтернативных препроцессоров, либо созданных непосредственно для ВК (программы DIA2,3) либо заимствованных из других систем (например, программы ANSYS).

Решение конкретных задач в рамках ВК начинается с составления расчетной схемы решаемой задачи, содержащей информацию о типе задачи, геометрической дискретизации исследуемой конструкции, дискретизации процесса нагружения, распределения полей внешних воздействий в объеме и по поверхности конструкции и т.д., иначе говоря, всю входную информацию о решаемой задаче. Конкретный состав и форма представления этой информации зависят от средств автоматизации ввода, используемых соответствующими препроцессорными программами. Вся эта информация будет запрошена далее препроцессорными программами, работающими в диалоговом режиме, либо сформирована непосредственно в текстовом редакторе.

Одновременно (до, в процессе, или после завершения составления расчетной схемы) с помощью программ, входящих в состав блока информационного обеспечения, проверяется наличие в оперативной базе данных материалов (OBD), необходимых данных по свойствам материалов, используемых в составе исследуемой конструкции и размещенных в файле «SF», и при отсутствии таковых производится дозаполнение базы данных материалов.

Дальнейшее решение задачи производится в следующем порядке:

### 1) Формирование входного файла для блока BZD

Этот файл содержит в сжатом виде параметры входных данных решаемой задачи в формате, согласованном с форматом представления данных в программных средствах блока BZD.

В ВК предусмотрено несколько возможностей создания этого файла.

- Ручное формирование файла.

- Создание входного файла с помощью автономно работающих программ диалогового задания данных, разработанных непосредственно для ВК.

В зависимости от решаемых задач в текущей версии комплекса могут быть использованы следующие программы:

-- DIA2 -- при решении задач в двумерной постановке (плосконапряженное состояние, плоская деформация, осесимметричные задачи).

-- DIA3 -- при решении задач в пространственной постановке.

Сформированный этими программами файл входных данных записывается под именем -- “имя задачи .dia” (и-з.dia).

- Создание входного файла с помощью программных средств альтернативного препроцессора APRP (например, программы ANSYS).

При использовании этой системы, формирование входного файла происходит в два этапа:

-- Запускается альтернативный препроцессор (APRP), создающий информационную модель исследуемой конструкции в своей системе представления данных. В результате формируются файлы имя задачи.txt (и-з.txt).

-- В файл и-з.txt вносятся необходимые дополнения и запускается программа-конвертор CONVAU (работает вместе с APRP), создающая файл “имя задачи. ans”(и-з.ans)

2) Формирование данных, содержащих информационную модель исследуемой конструкции

Полный набор данных, определяющих информационную модель исследуемых конструкций в формате ВК, располагается в локальной базе данных (в дальнейшем LBD).

Формирование и заполнение LBD осуществляется с помощью программного блока VZD. Блок VZD представляет собой совокупность автономных программ, предназначенных для формирования конкретной структуры LBD, формирования дискретной модели исследуемой конструкции (геометрии, кодировок, полей внешних воздействий) и занесение их в LBD в соответствии со структурой представления информации в ВК УПАКС.

Входной информацией для работы программ служит файл и-з.dia (при использовании DIA2 или DIA3 или и-з.ans (при использовании APRP), а также информация о материальных функциях моделей используемых материалов, сформированная программными средствами OBD в файле SF.

В зависимости от типа решаемой задачи и вида конструкции, могут использоваться различные варианты программ блока VZD. В текущей версии программного комплекса функционируют следующие варианты:

-- VZD2 –блок, используемый при решении задач в двумерной постановке (плоская деформация, плосконапряженное состояние и осесимметричные задачи). Входной файл --

и-з.dia.

-- VZD3 –блок, используемый при решении задач в пространственной постановке. Входной файл -- и-з.dia.

-- VCDANS –блок, используемый в том случае, если входные данные сформированы при помощи альтернативного препроцессора ANSYS. Входной файл -- и-з.ans.

Выходной информацией программного блока VZD являются массивы данных, определяющих информационную модель исследуемых конструкций, размещенные в файле "имя задачи.fl1" (и-з.fl1), а также файл "имя задачи.bzd" (и-з.bzd, при использовании VZD2 или VZD3) или "имя задачи.bcd" (и-з.bcd при использовании VCDANS), содержащие протокол прохождения задачи и некоторые результаты ее решения.

#### Процессор – блок решения краевых задач

Блок решения краевых задач предназначен для реализации на ЭВМ методик и алгоритмов численного моделирования исследуемых процессов при сформированной в результате работы препроцессора входной информации, размещаемой в LBD. С формальной точки зрения с помощью программных средств этого блока формируется последовательность полей, характеризующих промежуточные и конечное состояние конструкции при заданной начальном состоянии (характеризуемом полями начальных напряжений, деформаций, перемещений, а также параметрами, определяющими историю необратимого деформирования и поврежденности), и закон изменения внешних воздействий.

По своей архитектуре программные средства блока представляют собой работающую на единой информационной основе иерархическую открытую

модульную систему, включающую ряд головных программ (модулей верхнего уровня), составляющих верхний пользовательский уровень программных средств.

В программном комплексе УПАКС предусмотрен блок коррекции базы данных, связанный с перенумерацией неизвестных функций дискретной модели конструкции с целью получения оптимальной полуширины матрицы системы алгебраических уравнений.

Эти функции осуществляются программой "OVD".

Входной информацией для программы коррекции является файл и-з.fl1. Выходными являются скорректированный файл и-з.fl1, а также файл "имя задачи fl3", используемый для размещения массивов СЛАУ.

Непосредственное решение краевых задач в программном комплексе УПАКС осуществляется при помощи программного блока UMZ .

UMZ -- представляет собой совокупность управляющих программ, работающих на основе информационных средств комплекса УПАКС. Программы UMZ предназначены для непосредственного решения краевых задач термоупругости, термопластичности, термовязкопластичности, исследования процесса разрушения.

Для задач, рассматриваемых в настоящем отчете функцию управляющей программы UMZ выполняет программа «UMBR».

Постпроцессор – блок, обеспечивающий вывод и визуализацию информации об исследуемых конструкциях на различных этапах решения задачи

Программные средства, входящие в состав постпроцессора, обеспечивают преобразование данных, размещенных в LBD, к виду, используемому в средствах вывода, и непосредственный вывод информации в табличной и графической формах. В составе функций, выполняемых постпроцессором, предусмотрены возможности графической визуализации дискретной модели конструкции и отдельных ее частей, деформированной конфигурации конструкции и отдельных ее частей, распределений полей вдоль контуров любого фрагмента конструкции, а также линий уровня скалярных полей (интенсивностей деформаций, напряжений, мер необратимых деформаций и поврежденности). Предусмотрены также диалоговый режим работы графических средств и наличие меню, позволяющего нужное число раз менять состав изображений и масштаб изображаемых величин.

Анализ результатов решения и контроль правильности прохождения решения может быть осуществлен либо путем просмотра файла и-з.uzz, либо путем анализа графической информации (визуализации дискретной модели конструкции, ее деформированной конфигурации, эпюр и линий уровня напряжений, деформаций и других полей) при помощи следующих вариантов программных средств:

-- GRAF2 - программы графической визуализации результатов расчета объектов, рассматриваемых двумерной постановке, созданной непосредственно для ВК;

-- ZBM – программы графической визуализации пространственных объектов, работающие с массивами данных, формируемых программой-конвертором PREPGR;

- - альтернативных постпроцессорных программ APSP, заимствованных из других систем (например, программы ANSYS), работающих с массивами данных, формируемых программой-конвертором POSTUP.

### ***3.2 Информационное обеспечение программных средств ВК УПАКС***

#### **Блок информационного обеспечения**

Включает два основных компонента: локальную базу данных (LBD) и оперативную базу данных конструкционных материалов (OBD).

Локальная база данных предназначена для организации формирования, хранения и доступа к данным, определяющим состояние исследуемых конструкций в процессе их нагружения и составляющим основную информацию о задаче (информационную модель исследуемой конструкции). Информационная часть LBD располагается в файле «имя задачи.fl1».

Файл "имя задачи. fl1", содержит совокупность данных, в дальнейшем именуемых "LBD" , определяющих состояние исследуемых конструкций в процессе их нагружения и составляющих полную информационную модель конструкции. Структура LBD едина для всех задач, решаемых в рамках ВК и не меняется в процессе их решения.

Конкретный состав информации LBD однозначно определяется для каждой задачи конкретным значением управляющих параметров, характеризующих тип решаемой задачи, модели поведения материалов, число и марки используемых материалов, особенности процесса нагружения, число

подконструкций и тип каждой из них (геометрическая мерность, физическая мерность, определяемая видом НДС, используемая модель КЭ).

Структура информации, располагаемая в LBD, определяется тремя основными понятиями:

- схемой геометрической дискретизации;
- типом хранимых функций;
- характеристикой геометрических носителей, на которых заданы значения функций.

Схема принятой геометрической дискретизации предполагает наличие следующей иерархической цепочки:

конструкция → подконструкция → носитель

В соответствии с рассмотренными в предыдущих разделах алгоритмами исследования конструкций на основе МКЭ понятие подконструкции определяет некоторый фрагмент конструкции, выполненной из однородного материала, представимый в виде простой, с точки зрения топологии, геометрической фигуры (обычно в виде обобщенного четырехугольника - для задач, рассматриваемых в двумерной постановке и шестигранника - для пространственных задач) и аппроксимируемый конечными элементами какого-либо одного типа.

Каждая подконструкция имеет свою внутреннюю структуру и определяется типом используемых КЭ. В LBD предусмотрена возможность хранения информации для подконструкций, набранных из топологически регулярных КЭ различной мерности (элементов, из которых каждая грань (или ребро) имеют одинаковое число ребер (или узлов на ребре)). К такому классу относятся практически все существующие в настоящее время модели КЭ.

В рассматриваемой версии комплекса в качестве базовых используются:

- четырехугольный изопараметрический восьмиузловой конечный элемент осесимметричного тела (тип 02) и его модификации для анализа фрагментов, находящихся в условиях плосконапряженного состояния (тип 05) и плоской деформации (тип 06);
- пространственный шестигранный двадцатиузловой изопараметрический конечный элемент с квадратичным законом распределения функций (тип 04).

Понятие "носитель" в настоящей схеме определяет геометрический объект, в котором может быть задано одно, или некоторая фиксированная группа

числовых значений (скалярной или векторной). В зависимости от вида функций в качестве носителя могут выступать:

- конечные элементы;
- "физические узлы", в которых определяются значения физических полей и механических характеристик;
- "узлы координат", в которых определяются координаты базовых точек КЭ;
- "узлы функций", в которых определяются узловое значения искомых функций;
- "граничные узлы", являющиеся носителями граничных значений функций, определяемых в подконструкции;
- "граничные элементы", являющиеся носителями функций, определенных лишь на границе подконструкций.

В зависимости от типа КЭ физическими узлами могут выступать сами КЭ (при постоянном распределении физических полей в пределах элемента), все узлы, принадлежащие КЭ (узлы "С"), узлы, расположенные на пересечении ребер элемента (узлы "У").

Узлами координат могут быть все типы узлов КЭ: узлы "С", узлы "У", а также все прочие узлы (узлы "R"), расположенные внутри ребер, граней или в объеме элемента.

В качестве узлов функций выступают узлы "У" и узлы "R", либо узлы "С". В первом случае в узлах "У" и "R" может быть определено различное число компонент узловых функций, а во втором - все узлы в элементе равноценны.

Граничными узлами могут быть все узлы типа "У", "R" или "С", расположенные на границе подконструкций.

Понятие граничного элемента зависит от геометрической мерности исходного КЭ. В пространственных элементах граничным элементом является грань КЭ, расположенная на границе подконструкции, в двумерных элементах - ребро, в одномерных - граничный узел

Конкретная структура носителя для каждой подконструкции единственным образом определяется типом используемых КЭ (номером типа КЭ).

Состав и структура функций, хранимых в LBD, определяется типом подконструкций, в которых они задаются, типом решаемых задач и условиями конкретной задачи. Все функции подразделяются на три основные группы:

- функции топологии, определяемые набором данных, содержащих параметры топологического описания подконструкций, идентификации узловых неизвестных и т.д.,

- входные функции, содержащие информацию о заданных полях, значения которых не зависят от результатов вычислительного процесса;

- выходные функции, содержащие информацию о полях, начальное состояние которых задается, а все последующие состояния определяются, либо могут зависеть от результатов вычислительного процесса.

Структура входных и выходных функций в пределах подконструкции определяется следующей иерархической цепочкой:

функция → слой → носитель → компонента

Понятие "слой" вводится для возможности хранения информации, рассматриваемой функцией для нескольких временных слоев. Варьируя значением параметра, определяющего число слоев для данной функции, можно, в частности, продублировать информацию нужное число раз, или исключить ее вовсе, задав число слоев равным нулю.

Понятие носителя функции было определено выше, при этом необходимо отметить, что для каждой функции тип носителей единственным образом определяется типом используемых КЭ.

Число компонентов функции определяется в зависимости от значения управляющих параметров подконструкции, характерных для используемого типа КЭ (мерность пространства, мерность вектора узловых перемещений, мерность видов деформаций и т.д.). В процессе решения задачи содержание LBD, с фиксированной для каждой конкретной задачи структурой, последовательно заполняется данными, характеризующими текущее состояние конструкции. Поэтому файл "имя задачи. fl1", являясь основным источником входной информации, также является основным источником выходных данных.

Программные средства LBD, предназначенные для доступа к данным, функционируют непосредственно в составе программных средств ВК УПАКС.

Оперативная база данных конструкционных материалов представляет собой автономную подсистему обеспечения расчетов прочности данными по

свойствам конструкционных материалов (подробнее эта подсистема будет рассмотрена ниже). Кроме естественных функций накопления и хранения данных, с помощью средств OBD осуществляется обработка первичных экспериментальных данных, построение на их основе материальных функций, необходимых для работы различных моделей, описывающих поведение конструкционных материалов, и оперативный доступ к данным из программных средств, реализующих эти модели.

При решении конкретных задач информация, содержащая материальные функции используемых в конструкции материалов располагается в файле “SF”, представляющем собой фрагмент OBD для заданного набора материалов.

OBD представляет собой совокупность файлов, содержащих объединенную по какому-либо тематическому признаку информацию о материальных функциях конструкционных материалов, используемых в соответствующих математических моделях.

Каждый файл организован в виде файла прямого доступа с фиксированным размером записей. Номер записи идентифицируется с числовым кодом соответствующего материала.

Файлы, содержащиеся в OBD, могут иметь различную тематическую направленность, соответствующую классам решаемых задач (деформирование и разрушение различных типов материалов, теплопроводность и др.) различное содержание и внутреннюю структуру отдельных записей, однако общая структура записей принята единой для всех файлов.

Каждая запись содержит таблицы значений функций для некоторого материала при фиксированных значениях аргументов, также объединенных в соответствующие таблицы и параметры, определяющие содержание и внутреннюю структуру хранимой информации. Для получения значений функций при значениях аргументов, не совпадающих с табличными, используется их линейная интерполяция.

Для идентификации хранящихся в таблицах числовых данных каждому аргументу и функции присваиваются соответствующие порядковые номера и с номером каждой функции связываются номера определяющих ее аргументов.

Содержащиеся в записи параметры определяют следующие основные понятия:

- числовой код материала - КМ;

- числовой код моделей (КММ), которым соответствует хранящаяся в записи информация;
- число хранящихся в записи аргументов (МР) и функций (МФ);
- адреса размещения в записи таблиц значений аргументов и функций;
- числовые коды, характеризующие зависимость каждой функции от аргументов.

Информация для отдельной функции представляется в виде одномерного массива, полученного в результате развертывания соответствующей таблицы по индексам в порядке убывания номера аргумента.

Конкретный состав функций, содержащихся в записи, определяется конкретным набором моделей, для которых эти функции получены.

В каждой записи номер модели идентифицируется кодом модели КММ, представляющим собой целое число, составленное из номеров, включенных в запись модели.

Таким образом для получения из OBD необходимого набора функций некоторого материала требуется знать тематический раздел OBD, содержащий информацию о материалах для некоторого класса физических задач, конкретное имя файла BDM и код материала, определяющий марку и конкретный набор функций материала.

#### **4. Особенности реализации модели поврежденного материала в составе программных средств комплекса ЛЭГАК-ДК**

Современные возможности средств программирования (использование модульного построения программ) и вычислительной техники (более высокое быстродействие и большая оперативная память) позволяют реализовать модель поврежденного материала в более структурированной, логически завершенной форме с исключением некоторых этапов формирования данных по свойствам материалов.

##### ***4.1 Основные отличия в организации программных средств комплексов УПАКС и ЛЭГАК-ДК при решении физически нелинейных задач квазистатического деформирования конструкций***

1) Реализация изложенных методических положений осуществляется в ВК УПАКС с помощью объединенных в интегрированный пакет иерархической системы программных модулей, написанных на языке FORTRAN 77, и специализированного информационного обеспечения, которое, в частности включает в себя ОБД- автономную подсистему обеспечения расчетов прочности материальными функциями, необходимыми для работы различных моделей, описывающих поведение конструкционных материалов и оперативного доступа к данным из программных средств, реализующих эти модели.

Информационную основу ЛБД и ОБД оставляют простейшие иерархические файловые структуры, причем для хранения исходных файлов существенно используются ресурсы ВЗУ.

В связи с отсутствием в языке FORTRAN 77 средств динамического распределения памяти эта возможность была реализована в ВК УПАКС путем «ручного» распределения оперативной памяти в соответствии с организацией вычислительного процесса.

Программные средства, реализующие методические положения, в ЛЭГАК-ДК написаны на языке Fortran90. Информационные структуры ЛЭГАК-ДК построены на базе ранее созданного комплекса ЛЭГАК-3D. При этом существующие базовые структуры ЛЭГАК-ДК не позволяют в полной мере обеспечить функции оперативной базы данных, которые в ВК УПАКС выполняет ОБД, а также не содержат развитые структуры манипулирования

данными, характеризующими историю упруго-вязкопластического деформирования и накопления повреждений, необходимыми для эффективной реализации модели поврежденного материала

2) Численное решение линеаризованных задач в ВК УПАКС осуществляется на основе использования единого семейства универсальных изопараметрических КЭ с сирендиповой аппроксимацией поля перемещений, обладающих высокой эффективностью при анализе как массивных, так и тонкостенных фрагментов. В качестве физических узлов таких элементов используются узлы основной сетки. В этих узлах хранятся и вычисляются все величины, определяющие физическое состояние в точке материала (температура, деформации, параметры состояния). При этом значения деформаций в физических узлах определяются путем осреднения деформаций, полученных в рассматриваемом узле в прилегающих к этому узлу конечных элементах.

В переданной в НИИ механики версии комплекса ЛЭГАК-ДК в качестве типов элементов используются 3D-тетраэдры, шестигранники, оболочечные элементы, балочные элементы, элемент сосредоточенной массы, элемент жесткой связи, интерполяционный элемент. В качестве физических узлов используются не сеточные узлы, как в ВК УПАКС, а точки интегрирования элемента.

3) В ВК УПАКС в качестве внешних воздействий могут задаваться массовые силы, распределенные по объему тела  $V$ , поверхностные силы, распределенные по части его поверхности  $\Sigma_1$ , граничные перемещения, заданные на частях поверхности тела  $\Sigma_2$ , а также физические поля (температурные, радиационные) заданные в объеме тела  $V$ . Реализована полная версия модели поврежденного материала

В переданной в НИИ механики версии комплекса ЛЭГАК-ДК в качестве нагрузок могут быть заданы давление, сосредоточенные усилия, инерционная нагрузка, температурные воздействия (изотермические нагружения без учета зависимости характеристик материала от температуры). В качестве граничных условий могут использоваться кинематические закрепления. Реализованы модели материалов:

- линейно-упругий материал;
- упругопластический материал с билинейным изотропным упрочнением;

- упругопластический материал с изотропным упрочнением с мультилинейной аппроксимацией диаграммы деформирования.

4) Решение нелинейных задач на каждом подэтапе в ВК УПАКС осуществляется в форме метода начальных напряжений и сводится к однократному нахождению вектора линейной части решения  $\{q_0\}$  и последовательному уточнению нелинейного вектора  $\{\Delta q^n\}$  из уравнений:

$$[H]\{\Delta q^n\} - \{r(\Delta d_{ij})^{n-1}\} = 0.$$

$$\{q^n\} = \{q_0\} + \{\Delta q^n\}; \quad \{q_0\} = [H]^{-1}\{R_0\}$$

где  $\{R_0\} = \{R_0(\bar{t})\}$  - постоянная составляющая вектора нагрузки, определяемая совокупностью внешних воздействий на конструкцию в виде изменений на шаге нагружения объемных и поверхностных сил, температуры, граничных перемещений;

$\{r\} = \{r(\Delta d_{ij})\}$  - переменная часть вектора включает в себя нелинейные члены, зависящие от решения задачи и определяется текущими значениями необратимых деформаций.

Численное решение физически нелинейных задач в ЛЭГАК осуществляется на основе альтернативного использования схемы Ньютона, или метода начальных напряжений. Причем, в отличие от ВК УПАКС в ЛЭГАК используется несколько иная форма организации процесса последовательных приближений. В частности, нелинейное решение на шаге нагружения определяется на основе последовательности

$$[H](\{q^n\} - \{q^{n-1}\}) - \{R_F\} + \sum_{\Delta V} [B]^T \{\sigma^{n-1}\} = 0,$$

где  $\{R_F\}$  - постоянная составляющая вектора узловых сил конструкции, определяемая совокупностью силовых внешних воздействий на конструкцию на шаге нагружения (без учета температурных составляющих), последнее слагаемое - вектор внутренних узловых сил, вычисляемый на основе значений компонент тензора напряжений  $\{\sigma^{n-1}\}$  в точках интегрирования конечного элемента в  $n-1$  приближении,  $[B]$  - матричный оператор, связывающий деформации в элементе с его узловыми перемещениями.

#### **4.2 Основные задачи интеграции предложенной модели поврежденного материала в состав программных средств ЛЭГАК-ДК**

Для успешной интеграции рассмотренной выше модели поврежденного материала в состав программных средств ЛЭГАК-ДК потребовалось решить следующие основные задачи:

- разработать совместимое со средствами ЛЭГАК-ДК программное и информационное обеспечения общей МПМ необходимыми материальными функциями (реализующие функции оперативной базы данных);

- создать совместимое со средствами ЛЭГАК-ДК программное и информационное обеспечения, реализующие в составе программных средств ЛЭГАК-ДК соотношения первой очереди МПМ( включающие в состав первой очереди модели реализацию внутренней шаговой схемы и минимально необходимый набор частных моделей);

- создать программное и информационное обеспечения для моделирования процессов деформирования и накопления повреждений в комплексе ЛЭГАК-ДК с использованием предложенной МПМ и метода начальных напряжений;

- произвести проверку работоспособности разработанных средств, реализующих первую очередь модели поврежденного материала в составе комплекса ЛЭГАК-ДК на примерах решения тестовых задач упругопластического расчета элементов конструкций.

В состав рассматриваемой версии МПМ включены:

- модель термоупругости с учетом зависимости упругих характеристик материала от действующей температуры;

- вариант модели термопластичности с комбинированным упрочнением;

- вариант модели накопления пластических повреждений при квазистатических нагружениях.

Ввиду отсутствия в комплексе ЛЭГАК-ДК реализованных в ВК УПАКС двадцатиузловых КЭ, проверку работоспособности разработанных средств осуществляется с использованием включенных в библиотеку ЛЭГАК-ДК пространственных восьмиузловых КЭ.

В соответствии с перечисленными задачами были выполнены разработки программного и информационного обеспечения, согласованных с информационной средой пакета ЛЭГАК-ДК

### **4.3. Реализация в составе программных средств комплекса ЛЭГАК-ДК варианта модели поврежденного материала**

#### **4.3.1 Разработка программного и информационного обеспечения общей МПМ необходимыми материальными функциями (программно-информационный модуль «material»)**

Для реализации обеспечения моделей поврежденного материала необходимыми материальными функциями, которое в ВК УПАКС выполняла ОБД, для комплекса ЛЭГАК – ДК разработан программно-информационный модуль «material».

Информационную основу модуля составляют два вида текстовых файлов:

- файл с фиксированным именем «**mat\_fil**». В первой строке файла указано количество материалов ( $k_{mat}$ ), в каждой следующей строке (количество строк  $k_{mat}$ ) указано имя файла, содержащего материальные функции соответствующего материала;

- файлы с именами, указанными в файле «**mat\_fil**», каждый из которых содержит значения материальных функций конкретного материала.

Для каждого материала числовая информация перечисляется по группам параметров.

В начале каждой группы значений параметра вводится символьный идентификатор параметра из трех символов, что позволяет порядок следования групп принимать произвольным.

Полный набор материальных функций конкретного материала представляется в виде следующих трех основных разделов, содержащих данные, необходимые для функционирования набора частных моделей в версиях общей модели поврежденного материала.

#### 1. Термоупругость

| Параметры   | Идентификатор |
|---|---------------|
| T – температура (аргумент)                                    | Atu           |
| G(T) – модуль сдвига (функция)                                | Mgu           |
| K(T) – модуль объемной деформации (функция)                   | Mku           |
| $\alpha(T)$ – коэффициент температурного расширения (функция) | Mat           |
| $S_r(T)$ – разрушающее эффективное напряжение при             | Sor           |

|  |     |
|--|-----|
| одноосное растяжении (функция)   |     |
| $S_s(T)$ - разрушающее эффективное напряжение при одноосном сжатии (функция) | Sos |

## 2. Термопластичность

| Параметры  | Идентификатор |
|--|---------------|
| $T$ – температура (аргумент)   | Atp           |
| $\kappa_p$ – длина траектории пластической деформации (аргумент)   | Akp           |
| $\rho$ – интенсивность тензора остаточных микронапряжений (аргумент)   | Arp           |
| $C_p(T, \kappa_p)$ – радиус поверхности пластичности (функция)   | c2p           |
| $g_1(T)$ – начальный модуль анизотропного упрочнения (функция)   | g1p           |
| $g_2(T)$ – модуль релаксации анизотропного упрочнения (функция)  | g2p           |
| $g_T^p(T)$ – рекристаллизационный модуль анизотропного упрочнения (функция)  | Gtp           |
| $C_p^0(T)$ – радиус начальной поверхности пластичности (функция)   | c0p           |
| $q_k^p(T, \kappa_p)$ – деформационный модуль изотропного упрочнения (функция)  | Qkp           |
| $q_T^p(T, \kappa_p)$ – температурный модуль изотропного упрочнения (функция)   | Qtp           |
| $C_s(T, \rho)$ – стационарное значение радиуса поверхности пластичности при пропорциональных циклических процессах (функция) | Csp           |
| $q_c^p(T)$ – модуль циклического упрочнения при переходных циклических процессах (функция)                                   | Qcp           |
| $W_0^R(T)$ – предельное значение энергии пластического разрыхления при одноосном растяжении (функция)                        | Wop           |
| $q(T)$ – параметр модели пластического накопления  | Wqp           |

|  |     |
|--|-----|
| повреждений (функция)  |     |
| $W_c^R(T)$ – предельное значение энергии пластического разрыхления в условиях одноосного циклического деформирования (функция)             | Wcp |
| $\psi_a(T, \rho)$ – амплитудное значение функции поврежденности, соответствующее завершению первой стадии накопления повреждений (функция) | Par |
| $W_0^A(T)$ – предельное значение энергии пластического упрочнения при одноосном растяжении (функция)                                       | Uop |
| $W_c^A(T)$ – предельное значение энергии пластического упрочнения в условиях одноосного циклического деформирования (функция)              | Ucp |

### 3. Термоползучесть

| Параметры   | Идентификатор |
|---|---------------|
| $T$ – температура (аргумент)  | Atc           |
| $\tau$ – параметр упрочнения при ползучести (аргумент)  | Akc           |
| $\theta$ – параметр напряжений при ползучести (аргумент)  | Asc           |
| $C_c(T)$ – радиус поверхности ползучести (функция)  | c0c           |
| $L(T, \theta)$ – функция начальной скорости ползучести (функция)  | Flc           |
| $H(T, \tau)$ – функция упрочнения при ползучести (функция)  | Fhc           |
| $h(T, \theta)$ – добавочная функция упрочнения (функция)  | Hkc           |
| $V_0^R(T)$ – предельное значение энергии диссипации при ползучести в условиях одноосного растяжения (функция) | Voc           |
| $p(T)$ – параметр модели накопления повреждений при ползучести (функция)                                      | Vpc           |

Для каждой группы параметров вслед за идентификатором группы располагаются два числа  $m$  и  $n$ , соответствующие количеству табличных значений первого и второго аргументов (максимальное количество аргументов функций в таблицах принимается равным двум). Если группа является значениями аргумента, то для нее одно из этих чисел равно 1. Если оба числа

равны 1, то значение параметра будет постоянным и равно числу, которое следует за m и n. Вообще, если m или n больше 1, то за ними следует m×n значений параметров. Если в модели нет какой-то величины, то для этой величины вводится m=n=1 и значение, равное нулю. Причем этот ввод должен быть обязательно. Таким образом принимается, что для любого материала всегда задана полная модель, а для тех параметров, для которых данных нет, принимаются нулевые значения.

Ниже приведен пример текстового файла материала с именем xnt1, содержащий данные, необходимые для решения упругопластических задач с использованием одного из вариантов модели термопластичности с комбинированным упрочнением.

atu

```

1, 3
2.000000E+01    1.500000E+02    3.500000E+02

```

mgv

```

1, 3
7870.000000    7200.000000    6700.000000

```

mku

```

1, 3
17290.000000    24800.000000    26680.000000

```

mat

```

1, 3
1.660000E-05    1.710000E-05    1.750000E-05

```

sor

```

1, 1
0.0

```

sos

```

1, 1
0.0

```

atp

1, 3

2.000000E+01      1.500000E+02      3.500000E+02

akp

1, 8

0.000000E+00      3.000000E-03      6.000000E-03

1.000000E-02

1.800000E-02      2.200000E-02      3.000000E-02

4.000000E-02

arp

1, 1

0.0

c2p

3, 8

19.500000      18.800000      18.950000

19.500000

20.500000      20.900000      21.800000

23.050000

16.800000      17.200000      17.400000

17.700000

18.200000      18.400000      18.900000

19.500000

15.200000      16.400000      17.400000

18.200000

19.100000      19.400000      20.200000

21.100000

g1p

1, 3

2362.000000      1480.000000      931.000000

g2p  
1, 3  
250.000000 172.000000 150.000000

gtp  
1, 1  
0.000000

c0p  
1, 1  
0.0

qkp  
1, 1  
0.0

qtp  
1, 1  
0.0

csp  
1, 1  
0.0

qcp  
1, 1  
0.0

wop  
1, 3  
6.000000 5.000000 4.000000

wqp  
1, 3  
1.800000 1.800000 1.800000

wcp  
1, 1  
0.0

pap  
1, 1  
0.0

uop  
1, 1  
0.0

ucp  
1, 1  
0.0

atc  
1, 1  
0.0

akc  
1, 1  
0.0

asc  
1, 1  
0.0

c0c  
1, 1  
0.0

flc  
1, 1

```

0.0

fhc
1, 1
0.0

hkc
1, 1
0.0

voc
1, 1
0.0

vpc
1, 1
0.0

```

В модуле «material» создается производный тип данных `mat` для материала, который содержит все параметры материала (значения аргументов и функций) и выделяется динамический массив, элементами которого являются величины типа `mat` для каждого материала, используемого в расчете. Также модуль содержит внутренние подпрограммы: для заполнения шаблона для каждого материала из внешних текстовых файлов; для интерполяции функций одного и двух аргументов; для получения конкретного значения конкретной функции; для освобождения оперативной памяти.

Текст модуля «material» с подробными комментариями приводится ниже.

### **module material**

```

use obl_data_3d
implicit none
!integer(4), parameter :: szReal=8
integer(4) :: nmat
type mat      ! тип, описывающий свойства материала подконструкции
! аргументы (и количество их значений) материальных функций
термоупругости

```

real(szReal), dimension(:), pointer :: t\_upr ! температура  
integer(4) nt\_upr ! количество значений температуры t\_upr

! аргументы (и количество их значений) материальных функций

термопластичности

real(szReal), dimension(:), pointer :: t\_plast ! температура  
integer(4) nt\_plast ! количество значений температуры t\_plast

real(szReal), dimension(:), pointer :: kp\_plast ! длина траектории пластической деформации

integer(4) nkp\_plast ! количество значений kp\_plast

real(szReal), dimension(:), pointer :: ro\_plast ! интенсивность тензора

остаточных микронапряжений

integer(4) nro\_plast ! количество значений nro

! аргументы (и количество их значений) материальных функций

термоползучести

real(szReal), dimension(:), pointer :: t\_creep ! температура

integer(4) nt\_creep ! количество значений температуры t\_creep

real(szReal), dimension(:), pointer :: tau ! параметр упрочнения при

ползучести

integer(4) ntau ! количество значений tau

real(szReal), dimension(:), pointer :: tetta ! параметр напряжений при

ползучести

integer(4) ntetta ! количество значений ntetta

! материальные функции термоупругости

real(szReal), dimension(:), pointer :: G\_upr ! модуль сдвига

real(szReal), dimension(:), pointer :: K\_upr ! модуль объемной деформации

real(szReal), dimension(:), pointer :: alfa ! коэффициент температурного

расширения

! материальные функции термопластичности

real(szReal), dimension(:, :), pointer :: Cp ! радиус поверхности пластичности

`real(szReal), dimension(:), pointer :: g1` ! начальный модуль анизотропного  
 упрочнения  
`real(szReal), dimension(:), pointer :: g2` ! модуль релаксации анизотропного  
 упрочнения  
`real(szReal), dimension(:), pointer :: gpt` ! температурный модуль  
 анизотропного упрочнения  
`real(szReal), dimension(:), pointer :: Cp0` ! радиус начальной поверхности  
 пластичности  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: qpk` ! деформационный модуль  
 изотропного упрочнения  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: qpt` ! температурный модуль изотропного  
 упрочнения  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: Cs` ! стационарное значение радиуса  
 поверхности пластичности при пропорциональных циклических процессах  
`real(szReal), dimension(:), pointer :: qpc` ! модуль циклического упрочнения  
 при переходных циклических процессах

! материальные функции термползучести

`real(szReal), dimension(:), pointer :: Cc` ! радиус поверхности ползучести  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: L_creep` ! функция начальной скорости  
 ползучести  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: H_creep` ! функция упрочнения при  
 ползучести  
`real(szReal), dimension(:,:), pointer :: hcor` ! добавочная функция упрочнения  
 при ползучести

! материальные функции хрупкого разрушения

`real(szReal), dimension(:), pointer :: S0R` ! предел прочности на растяжение  
`real(szReal), dimension(:), pointer :: S0S` ! предел прочности на сжатие

! материальные функции накопления повреждений при пластичности

`real(szReal), dimension(:), pointer :: WOR` ! предельное значение энергии  
 пластического разрыхления при одноосном растяжении

real(szReal), dimension(:), pointer :: q\_plast ! параметр модели пластического накопления повреждений

real(szReal), dimension(:), pointer :: WCR ! предельное значение энергии пластического разрыхления в условиях одноосного циклического деформирования

real(szReal), dimension(:, :), pointer :: psi\_a ! амплитудное значение функции поврежденности

real(szReal), dimension(:), pointer :: W0A ! предельное значение энергии пластического упрочнения при одноосном растяжении

real(szReal), dimension(:), pointer :: WCA ! предельное значение энергии пластического упрочнения в условиях одноосного циклического деформирования

! материальные функции накопления повреждений при ползучести

real(szReal), dimension(:), pointer :: V0R ! предельное значение энергии диссипации при ползучести в условиях одноосного растяжения

real(szReal), dimension(:), pointer :: q\_creep ! параметр модели накопления повреждений при ползучести

end type mat

type(mat), allocatable :: mmat(:) ! массив материалов для всей конструкции

contains

! задание шаблона из входного текстового файла

subroutine read\_inp\_fil(n\_fil, nk)

implicit none

character(\*), intent(in) :: n\_fil ! имя входного файла

integer(4), intent(in) :: nk ! номер канала входного файла

integer(4) :: n\_fun=33 ! n\_fun-число функций во входном файле

character(3), allocatable :: func\_lab(:) ! массив меток функций

integer(4) i, j, k, m, n

real(szReal) b

```

character(3) a
allocate (func_lab(n_fun))
func_lab = ('atu','mgu','mku','mat','sor','sos',          &
           'atp','akp','arp',                            &
           'c2p','g1p','g2p','gtp','c0p','qkp','qtp','csp','qcp', &
           'wop','wqp','wcp','pap','uop','ucp',          &
           'atc','akc','asc',                            &
           'c0c','flc','fhc','hkc','voc','vpc'/) ! метки функций в исходном файле
! в общей нумерации меток функций
open (nk,file=n_fil,action='read',status='old')
do i=1,n_fun
  10 read (nk,*) a
  if (a/=func_lab(i)) go to 10
  read (nk,*) m,n
  select case (i)
  case (1)
    mmat(nmat)%nt_upr=m*n
    allocate(mmat(nmat)%t_upr(mmat(nmat)%nt_upr))
    read (nk,*) (mmat(nmat)%t_upr(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
  case (2)
    allocate(mmat(nmat)%G_upr(mmat(nmat)%nt_upr))
    if (m*n<=1) then
      read (nk,*) b
      do j=1,mmat(nmat)%nt_upr
        mmat(nmat)%G_upr(j)=b
      enddo
    else
      read (nk,*) (mmat(nmat)%G_upr(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
    endif
  case (3)
    allocate(mmat(nmat)%K_upr(mmat(nmat)%nt_upr))
    if (m*n<=1) then
      read (nk,*) b
      do j=1,mmat(nmat)%nt_upr

```

```

    mmat(nmat)%K_upr(j)=b
  enddo
else
  read (nk,*) (mmat(nmat)%K_upr(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
endif
case (4)
  allocate(mmat(nmat)%alfa(mmat(nmat)%nt_upr))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_upr
      mmat(nmat)%alfa(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%alfa(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
  endif
case (5)
  allocate(mmat(nmat)%SOR(mmat(nmat)%nt_upr))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_upr
      mmat(nmat)%SOR(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%SOR(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
  endif
case (6)
  allocate(mmat(nmat)%SOS(mmat(nmat)%nt_upr))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_upr
      mmat(nmat)%SOS(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%SOS(j),j=1,mmat(nmat)%nt_upr)
  endif

```

```

endif
case (7)
  mmat(nmat)%nt_plast=m*n
  allocate(mmat(nmat)%t_plast(mmat(nmat)%nt_plast))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%t_plast(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
case (8)
  mmat(nmat)%nkp_plast=m*n
  allocate(mmat(nmat)%kp_plast(mmat(nmat)%nkp_plast))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%kp_plast(j),j=1,mmat(nmat)%nkp_plast)
case (9)
  mmat(nmat)%nro_plast=m*n
  allocate(mmat(nmat)%ro_plast(mmat(nmat)%nro_plast))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%ro_plast(j),j=1,mmat(nmat)%nro_plast)
case (10)
  allocate(mmat(nmat)%Cp(mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do k=1,mmat(nmat)%nt_plast
      do j=1,mmat(nmat)%nkp_plast
        mmat(nmat)%Cp(k,j)=b
      enddo
    enddo
  else
    read (nk,*)
    ((mmat(nmat)%Cp(k,j),j=1,mmat(nmat)%nkp_plast),k=1,mmat(nmat)%nt_plast)
  endif
case (11)
  allocate(mmat(nmat)%g1(mmat(nmat)%nt_plast))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
      mmat(nmat)%g1(j)=b
    enddo
  else

```

```

    read (nk,*) (mmat(nmat)%g1(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (12)
allocate(mmat(nmat)%g2(mmat(nmat)%nt_plast))
if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
        mmat(nmat)%g2(j)=b
    enddo
else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%g2(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (13)
allocate(mmat(nmat)%gpt(mmat(nmat)%nt_plast))
if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
        mmat(nmat)%gpt(j)=b
    enddo
else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%gpt(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (14)
allocate(mmat(nmat)%Cp0(mmat(nmat)%nt_plast))
if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
        mmat(nmat)%Cp0(j)=b
    enddo
else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%Cp0(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (15)
allocate(mmat(nmat)%qpk(mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast))

```

```

if (m*n<=1) then
  read (nk,*) b
  do k=1,mmat(nmat)%nt_plast
    do j=1,mmat(nmat)%nkp_plast
      mmat(nmat)%qpk(k,j)=b
    enddo
  enddo
else
  read (nk,*)
((mmat(nmat)%qpk(k,j),j=1,mmat(nmat)%nkp_plast),k=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (16)
  allocate(mmat(nmat)%qpt(mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do k=1,mmat(nmat)%nt_plast
      do j=1,mmat(nmat)%nkp_plast
        mmat(nmat)%qpt(k,j)=b
      enddo
    enddo
  else
    read (nk,*)
((mmat(nmat)%qpt(k,j),j=1,mmat(nmat)%nkp_plast),k=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (17)
  allocate(mmat(nmat)%Cs(mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nro_plast))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do k=1,mmat(nmat)%nt_plast
      do j=1,mmat(nmat)%nro_plast
        mmat(nmat)%Cs(k,j)=b
      enddo
    enddo
  else

```

```

    read (nk,*)
((mmat(nmat)%Cs(k,j),j=1,mmat(nmat)%nro_plast),k=1,mmat(nmat)%nt_plast)
    endif
case (18)
    allocate(mmat(nmat)%qpc(mmat(nmat)%nt_plast))
    if (m*n<=1) then
        read (nk,*) b
        do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
            mmat(nmat)%qpc(j)=b
        enddo
    else
        read (nk,*) (mmat(nmat)%qpc(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
    endif
case (19)
    allocate(mmat(nmat)%WOR(mmat(nmat)%nt_plast))
    if (m*n<=1) then
        read (nk,*) b
        do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
            mmat(nmat)%WOR(j)=b
        enddo
    else
        read (nk,*) (mmat(nmat)%WOR(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
    endif
case (20)
    allocate(mmat(nmat)%q_plast(mmat(nmat)%nt_plast))
    if (m*n<=1) then
        read (nk,*) b
        do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
            mmat(nmat)%q_plast(j)=b
        enddo
    else
        read (nk,*) (mmat(nmat)%q_plast(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
    endif
case (21)

```

```

allocate(mmat(nmat)%WCR(mmat(nmat)%nt_plast))
if (m*n<=1) then
  read (nk,*) b
  do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
    mmat(nmat)%WCR(j)=b
  enddo
else
  read (nk,*) (mmat(nmat)%WCR(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (22)
allocate(mmat(nmat)%psi_a(mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nro_plast))
if (m*n<=1) then
  read (nk,*) b
  do k=1,mmat(nmat)%nt_plast
    do j=1,mmat(nmat)%nro_plast
      mmat(nmat)%psi_a(k,j)=b
    enddo
  enddo
else
  read (nk,*)
  ((mmat(nmat)%psi_a(k,j),j=1,mmat(nmat)%nro_plast),k=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (23)
allocate(mmat(nmat)%WOA(mmat(nmat)%nt_plast))
if (m*n<=1) then
  read (nk,*) b
  do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
    mmat(nmat)%WOA(j)=b
  enddo
else
  read (nk,*) (mmat(nmat)%WOA(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (24)
allocate(mmat(nmat)%WCA(mmat(nmat)%nt_plast))

```

```

if (m*n<=1) then
  read (nk,*) b
  do j=1,mmat(nmat)%nt_plast
    mmat(nmat)%WCA(j)=b
  enddo
else
  read (nk,*) (mmat(nmat)%WCA(j),j=1,mmat(nmat)%nt_plast)
endif
case (25)
  mmat(nmat)%nt_creep=m*n
  allocate(mmat(nmat)%t_creep(mmat(nmat)%nt_creep))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%t_creep(j),j=1,mmat(nmat)%nt_creep)
case (26)
  mmat(nmat)%ntau=m*n
  allocate(mmat(nmat)%tau(mmat(nmat)%ntau))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%tau(j),j=1,mmat(nmat)%ntau)
case (27)
  mmat(nmat)%ntetta=m*n
  allocate(mmat(nmat)%tetta(mmat(nmat)%ntetta))
  read (nk,*) (mmat(nmat)%tetta(j),j=1,mmat(nmat)%ntetta)
case (28)
  allocate(mmat(nmat)%Cc(mmat(nmat)%nt_creep))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_creep
      mmat(nmat)%Cc(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%Cc(j),j=1,mmat(nmat)%nt_creep)
  endif
case (29)
  allocate(mmat(nmat)%L_creep(mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%ntetta))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b

```

```

do k=1,mmat(nmat)%nt_creep
  do j=1,mmat(nmat)%ntetta
    mmat(nmat)%L_creep(k,j)=b
  enddo
enddo
else
  read (nk,*)
((mmat(nmat)%L_creep(k,j),j=1,mmat(nmat)%ntetta),k=1,mmat(nmat)%nt_creep)
endif
case (30)
  allocate(mmat(nmat)%H_creep(mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%ntau))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do k=1,mmat(nmat)%nt_creep
      do j=1,mmat(nmat)%ntau
        mmat(nmat)%H_creep(k,j)=b
      enddo
    enddo
  else
    read (nk,*)
((mmat(nmat)%H_creep(k,j),j=1,mmat(nmat)%ntau),k=1,mmat(nmat)%nt_creep)
  endif
case (31)
  allocate(mmat(nmat)%hcor(mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%ntetta))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do k=1,mmat(nmat)%nt_creep
      do j=1,mmat(nmat)%ntetta
        mmat(nmat)%hcor(k,j)=b
      enddo
    enddo
  else
    read (nk,*)
((mmat(nmat)%hcor(k,j),j=1,mmat(nmat)%ntetta),k=1,mmat(nmat)%nt_creep)

```

```

endif
case (32)
  allocate(mmat(nmat)%VOR(mmat(nmat)%nt_creep))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_creep
      mmat(nmat)%VOR(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%VOR(j),j=1,mmat(nmat)%nt_creep)
  endif
case (33)
  allocate(mmat(nmat)%q_creep(mmat(nmat)%nt_creep))
  if (m*n<=1) then
    read (nk,*) b
    do j=1,mmat(nmat)%nt_creep
      mmat(nmat)%q_creep(j)=b
    enddo
  else
    read (nk,*) (mmat(nmat)%q_creep(j),j=1,mmat(nmat)%nt_creep)
  endif
end select
rewind (nk)
enddo
close(nk)
deallocate (func_lab)
end subroutine read_inp_fil

```

!интерполяция функции одной переменной

```
real(szReal) function interp_1d(t,narg,parg,pfunc)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t           ! значение аргумента
```

```
integer(4), intent(in) :: narg        ! количество имеющихся значений аргумента
```

```
и функции
```

```

real(szReal), dimension(:), pointer :: parg    ! указатель на значения аргумента
real(szReal), dimension(:), pointer :: pfunc   ! указатель на значения функции
real(szReal) :: func                          ! вычисляемое интерполяционное значение
функции
integer(4) :: i
if (narg>=2) then ! количество значений аргумента больше одного
  ! аргумент внутри диапазона
  if (t>=parg(1).and.t<=parg(narg)) then
    i=1
    do while (i<narg)
      if (t>=parg(i).and.t<=parg(i+1)) then
        func=pfunc(i)+(pfunc(i+1)-pfunc(i))*((t-parg(i))/(parg(i+1)-parg(i)))
        i=narg
      else
        i=i+1
      end if
    end do
  else
    if (t<=parg(1)) then ! аргумент меньше диапазона
      func=pfunc(1)
    else ! аргумент больше диапазона
      func=pfunc(narg-1)+(pfunc(narg)-pfunc(narg-1))*((t-parg(narg-1))/(parg(narg)-
parg(narg-1)))
    end if
  endif
else ! имеется одно значение аргумента
  func=pfunc(1)
end if
interp_1d=func
end function interp_1d

! интерполяция функции двух переменных
real(szReal) function interp_2d(t1,t2,narg1,narg2,parg1,parg2,pfunc)
implicit none

```

```

real(szReal), intent(in) :: t1, t2      ! значение первого (t1) и (t2) второго
аргумента
integer(4), intent(in) :: narg1, narg2  ! количество имеющихся значений
первого (narg1) и второго (narg2) аргумента
real(szReal), dimension(:), pointer :: parg1  ! указатель на значения первого
аргумента
real(szReal), dimension(:), pointer :: parg2  ! указатель на значения второго
аргумента
real(szReal), dimension(:, :), pointer :: pfunc  ! указатель на значения функции
real(szReal) :: func                       ! вычисляемое интерполяционное значение
функции
real(szReal) :: func1, func2
integer(4) :: i, j
! количество значений и первого и второго аргумента больше одного
if (narg1>=2.and.narg2>=2) then
  ! оба аргумента внутри диапазона
  if ((t1>=parg1(1).and.t1<=parg1(narg1)).and.(t2>=parg2(1).and.t2<=parg2(narg2)))
then
  i=1
  j=1
  do while (i<narg1)
    if (t1>=parg1(i).and.t1<=parg1(i+1)) then
      do while (j<narg2)
        if (t2>=parg2(j).and.t2<=parg2(j+1)) then
          func1=pfunc(i,j)+(pfunc(i,j+1)-pfunc(i,j))*((t2-
parg2(j))/(parg2(j+1)-parg2(j)))
          func2=pfunc(i+1,j)+(pfunc(i+1,j+1)-pfunc(i+1,j))*((t2-parg2(j))/(parg2(j+1)-
parg2(j)))
          func=func1+(func2-func1)*((t1-parg1(i))/(parg1(i+1)-parg1(i)))
          i=narg1
          j=narg2
        else
          j=j+1
        end if
      end while
    end if
  end while
end if

```

```

        end do
    else
        i=i+1
    end if
end do
else
! первый аргумент меньше диапазона, второй аргумент внутри диапазона
if (t1<=parg1(1).and.(t2>=parg2(1).and.t2<=parg2(narg2))) then
    j=1
    do while (j<narg2)
        if (t2>=parg2(j).and.t2<=parg2(j+1)) then
            func=pfunc(1,j)+(pfunc(1,j+1)-pfunc(1,j))*((t2-parg2(j))/(parg2(j+1)-
parg2(j)))
                j=narg2
            else
                j=j+1
            end if
        end do
    end if
! первый аргумент меньше диапазона, второй аргумент больше диапазона
if (t1<=parg1(1).and.t2>=parg2(narg2)) then
    func=pfunc(1,narg2-1)+(pfunc(1,narg2)-pfunc(1,narg2-1))*((t2-parg2(narg2-
1))/(parg2(narg2)-parg2(narg2-1)))
end if
! первый аргумент внутри диапазоно, второй аргумент больше диапазона
if ((t1>=parg1(1).and.t1<=parg1(narg1)).and.t2>=parg2(narg2)) then
i=1
do while (i<narg1)
    if (t1>=parg1(i).and.t1<=parg1(i+1)) then
        func1=pfunc(i,narg2-1)+(pfunc(i,narg2)-pfunc(i,narg2-1))*((t2-parg2(narg2-
1))/(parg2(narg2)-parg2(narg2-1)))
            func2=pfunc(i+1,narg2-1)+(pfunc(i+1,narg2)-pfunc(i+1,narg2-
1))*((t2-parg2(narg2-1))/(parg2(narg2)-parg2(narg2-1)))
            func=func1+(func2-func1)*((t1-parg1(i))/(parg1(i+1)-parg1(i)))

```

```

        i=narg1
    else
        i=i+1
    end if
end do
end if
! первый аргумент больше диапазона, второй аргумент больше диапазона
if (t1>=parg1(narg1).and.t2>=parg2(narg2)) then
    func=pfunc(narg1-1,narg2-1)+(pfunc(narg1,narg2)-pfunc(narg1,narg2-1))*((t2-
parg2(narg2-1))/(parg2(narg2)-parg2(narg2-1)))+(pfunc(narg1,narg2)-pfunc(narg1-
1,narg2))*((t1-parg1(narg1-1))/(parg1(narg1)-parg1(narg1-1)))
end if
! первый аргумент больше диапазона, второй аргумент внутри диапазона
if (t1>=parg1(narg1).and.(t2>=parg2(1).and.t2<=parg2(narg2))) then
j=1
do while (j<narg2)
    if (t2>=parg2(j).and.t2<=parg2(j+1)) then
        func1=pfunc(narg1-1,j)+(pfunc(narg1,j)-pfunc(narg1-1,j))*((t1-parg1(narg1-
1))/(parg1(narg1)-parg1(narg1-1)))
        func2=pfunc(narg1-1,j+1)+(pfunc(narg1,j+1)-pfunc(narg1-
1,j+1))*((t1-parg1(narg1-1))/(parg1(narg1)-parg1(narg1-1)))
        func=func1+(func2-func1)*((t2-parg2(j))/(parg2(j+1)-parg2(j)))
        j=narg2
    else
        j=j+1
    end if
end do
end if
! первый аргумент больше диапазона, второй аргумент меньше диапазона
if (t1>=parg1(1).and.t2<=parg2(1)) then
    func=pfunc(narg1-1,1)+(pfunc(narg1,1)-pfunc(narg1-1,1))*((t1-parg1(narg1-
1))/(parg1(narg1)-parg1(narg1-1)))
end if
! первый аргумент внутри диапазона, второй аргумент меньше диапазона

```

```

if ((t1>=parg1(1).and.t1<=parg1(narg1)).and.t2<=parg2(1)) then
  i=1
  do while (i<narg1)
    if (t1>=parg1(i).and.t1<=parg1(i+1)) then
      func=pfunc(i,1)+(pfunc(i+1,1)-pfunc(i,1))*((t1-parg1(i))/(parg1(i+1)-
parg1(i)))
      i=narg1
    else
      i=i+1
    end if
  end do
end if
! первый аргумент меньше диапазона, второй аргумент меньше диапазона
if (t1<=parg1(1).and.t2<=parg2(1)) then
  func=pfunc(1,1)
end if
end if
else
! количество значений и первого и второго аргумента равно единице
if (narg1==1.and.narg2==1) then
  func=pfunc(1,1)
endif
! имеется одно значение первого аргумента, количество значений второго
аргумента больше одного
if (narg1==1.and.narg2>=2) then
! значение второго аргумента меньше диапазона
  if (t2<=parg2(1)) then
    func=pfunc(1,1)
  endif
! значение второго аргумента внутри диапазона
  if (t2>=parg2(1).and.t2<=parg2(narg2)) then
j=1
  do while (j<narg2)
    if (t2>=parg2(j).and.t2<=parg2(j+1)) then

```

```

func=pfunc(1,j)+(pfunc(1,j+1)-pfunc(1,j))*((t2-parg2(j))/(parg2(j+1)-parg2(j)))
    j=narg2
else
    j=j+1
end if
end do
endif
! значение второго аргумента больше диапазона
if (t2>=parg2(narg2)) then
    func=pfunc(1,narg2-1)+(pfunc(1,narg2)-pfunc(1,narg2-1))*((t2-parg2(narg2-1))/(parg2(narg2)-parg2(narg2-1)))
endif
endif
! количество значений первого аргумента больше одного, имеется одно значение второго аргумента
if (narg1>=2.and.narg2==1) then
    ! значение первого аргумента меньше диапазона
    if (t1<=parg1(1)) then
        func=pfunc(1,1)
    endif
    ! значение первого аргумента внутри диапазона
    if (t1>=parg1(1).and.t1<=parg1(narg1)) then
        i=1
        do while (i<narg1)
if (t1>=parg1(i).and.t1<=parg1(i+1)) then
            func=pfunc(i,1)+(pfunc(i+1,1)-pfunc(i,1))*((t1-parg1(i))/(parg1(i+1)-parg1(i)))
                i=narg1
            else
                i=i+1
            end if
        end do
    endif
    ! значение первого аргумента больше диапазона
    if (t1>=parg1(narg1)) then

```

```

        func=pfunc(narg1-1,1)+(pfunc(narg1,1)-pfunc(narg1-1,1))*((t1-parg1(narg1-1))/(parg1(narg1)-parg1(narg1-1)))
    endif
endif
end if
interp_2d=func
end function interp_2d

```

**! ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**! вычисление модуля сдвига по заданной температуре**

```

real(szReal) function GET_G_upr(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_G_upr=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_upr,mmat(nmat)%t_upr,mmat(nmat)%G_upr)
end function GET_G_upr

```

**! вычисление модуля объемной деформации**

```

real(szReal) function GET_K_upr(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_K_upr=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_upr,mmat(nmat)%t_upr,mmat(nmat)%K_upr)
end function GET_K_upr

```

**! вычисление коэффициента температурного расширения**

```

real(szReal) function GET_alfa(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_alfa=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_upr,mmat(nmat)%t_upr,mmat(nmat)%alfa)
end function GET_alfa

```

! вычисление радиуса начальной поверхности пластичности

```
real(szReal) function GET_Cp0(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_Cp0=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%Cp0)
```

```
end function GET_Cp0
```

! вычисление радиуса начального модуля анизотропного упрочнения

```
real(szReal) function GET_g1(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_g1=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%g1)
```

```
end function GET_g1
```

! вычисление модуля релаксации анизотропного упрочнения

```
real(szReal) function GET_g2(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_g2=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%g2)
```

```
end function GET_g2
```

! вычисление температурного модуля анизотропного упрочнения

```
real(szReal) function GET_gpt(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_gpt=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%gpt)
```

```
end function GET_gpt
```

! вычисление модуля циклического упрочнения при переходных циклических процессах

```
real(szReal) function GET_qpc(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_qpc=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%qpc
)
end function GET_qpc
```

! вычисление радиуса поверхности ползучести

```
real(szReal) function GET_Cc(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_Cc=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%t_creep,mmat(nmat)%Cc
)
end function GET_Cc
```

! вычисление предела прочности на растяжение

```
real(szReal) function GET_S0R(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_S0R=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_upr,mmat(nmat)%t_upr,mmat(nmat)%S0R)
end function GET_S0R
```

! вычисление предела прочности на сжатие

```
real(szReal) function GET_S0S(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_S0S=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_upr,mmat(nmat)%t_upr,mmat(nmat)%S0S)
end function GET_S0S
```

! вычисление предельного значения энергии пластического разрыхления при одноосном растяжении

```
real(szReal) function GET_W0R(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_W0R=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%W
0R)
end function GET_W0R
```

! вычисление предельного значения энергии пластического разрыхления в условиях одноосного циклического деформирования

```
real(szReal) function GET_WCR(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_WCR=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%
WCR)
end function GET_WCR
```

! вычисление предельного значения энергии пластического упрочнения при одноосном растяжении

```
real(szReal) function GET_W0A(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_W0A=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%
W0A)
end function GET_W0A
```

! вычисление предельного значения энергии пластического упрочнения в условиях одноосного циклического деформирования

```
real(szReal) function GET_WCA(t)
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_WCA=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%
WCA)
end function GET_WCA
```

! вычисление параметра модели пластического накопления повреждений

```
real(szReal) function GET_q_plast(t)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
GET_q_plast=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%
q_plast)
end function GET_q_plast
```

! вычисление предельного значения энергии диссипации при ползучести

```
real(szReal) function GET_V0R(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_V0R=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%t_creep,mmat(nmat)%  
V0R)
```

```
end function GET_V0R
```

! вычисление параметра модели накопления повреждений при ползучести

```
real(szReal) function GET_q_creep(t)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t          ! значение температуры
```

```
GET_q_creep=interp_1d(t,mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%t_creep,mmat(nmat)  
%q_creep)
```

```
end function GET_q_creep
```

**! ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ**

! вычисление радиуса поверхности пластичности

```
real(szReal) function GET_Cp(t1,t2)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t1,t2      ! значение температуры (t1) и длины  
траектории пластической деформации (t2)
```

```
GET_Cp=interp_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast,mmat(nmat)  
)%t_plast,mmat(nmat)%kp_plast,mmat(nmat)%Cp)
```

```
end function GET_Cp
```

! вычисление деформационного модуля изотропного упрочнения

```
real(szReal) function GET_qpk(t1,t2)
```

```
implicit none
```

```
real(szReal), intent(in) :: t1,t2      ! значение температуры (t1) и длины  
траектории пластической деформации (t2)
```

```
GET_qpk=interp_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%kp_plast,mmat(nmat)%qpk)
end function GET_qpk
```

! вычисление температурного модуля изотропного упрочнения

```
real(szReal) function GET_qpt(t1,t2)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t1,t2      ! значение температуры (t1) и длины
траектории пластической деформации (t2)
GET_qpt=interp_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nkp_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%kp_plast,mmat(nmat)%qpt)
end function GET_qpt
```

! вычисление стационарного значения радиуса поверхности пластичности при пропорциональных циклических процессах

```
real(szReal) function GET_Cs(t1,t2)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t1,t2      ! значение температуры (t1) и интенсивности
тензора остаточных микронапряжений (t2)
GET_Cs=interp_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt_plast,mmat(nmat)%nro_plast,mmat(nmat)%t_plast,mmat(nmat)%ro_plast,mmat(nmat)%Cs)
end function GET_Cs
```

! вычисление начальной скорости ползучести

```
real(szReal) function GET_L_creep(t1,t2)
implicit none
real(szReal), intent(in) :: t1,t2      ! значение температуры (t1) и параметра
напряжений при ползучести (t2)
GET_L_creep=interp_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt_creep,mmat(nmat)%ntetta,mmat(nmat)%t_creep,mmat(nmat)%tetta,mmat(nmat)%L_creep)
end function GET_L_creep
```

! вычисление функции упрочнения при ползучести

```
real(szReal) function GET_H_creep(t1,t2)
```

implicit none

real(szReal), intent(in) :: t1,t2 ! значение температуры (t1) и параметра  
упрочнения при ползучести (t2)

GET\_H\_creep=interp\_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt\_creep,mmat(nmat)%ntau,mmat(nma  
t)%t\_creep,mmat(nmat)%tau,mmat(nmat)%H\_creep)

end function GET\_H\_creep

! вычисление добавочной функции упрочнения при ползучести

real(szReal) function GET\_hcor(t1,t2)

implicit none

real(szReal), intent(in) :: t1,t2 ! значение температуры (t1) и параметра  
напряжений при ползучести (t2)

GET\_hcor=interp\_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt\_creep,mmat(nmat)%ntetta,mmat(nmat)  
%t\_creep,mmat(nmat)%tetta,mmat(nmat)%hcor)

end function GET\_hcor

! вычисление амплитудного значения функции поврежденности

real(szReal) function GET\_psi\_a(t1,t2)

implicit none

real(szReal), intent(in) :: t1,t2 ! значение температуры (t1) и интенсивности  
тензора остаточных микронапряжений (t2)

GET\_psi\_a=interp\_2d(t1,t2,mmat(nmat)%nt\_plast,mmat(nmat)%nro\_plast,mmat(nm  
at)%t\_plast,mmat(nmat)%ro\_plast,mmat(nmat)%psi\_a)

end function GET\_psi\_a

! освобождение памяти, занимаемой одним материалом

subroutine mat\_memory\_free()

implicit none

deallocate(mmat(nmat)%t\_upr,mmat(nmat)%t\_plast,mmat(nmat)%kp\_plast,mmat(n  
mat)%ro\_plast,mmat(nmat)%t\_creep,mmat(nmat)%tau,mmat(nmat)%tetta,&  
&mmat(nmat)%G\_upr,mmat(nmat)%K\_upr,mmat(nmat)%alfa,mmat(nmat)%Cp,mm  
at(nmat)%g1,mmat(nmat)%g2,mmat(nmat)%gpt,&  
&mmat(nmat)%Cp0,mmat(nmat)%qpk,mmat(nmat)%qpt,mmat(nmat)%Cs,mmat(nm  
at)%qpc,mmat(nmat)%Cc,mmat(nmat)%L\_creep,mmat(nmat)%H\_creep,&

```

&mmat(nmat)%hcor,mmat(nmat)%SOR,mmat(nmat)%SOS,mmat(nmat)%WOR,mmat
(nmat)%q_plast,mmat(nmat)%psi_a,mmat(nmat)%WCR,mmat(nmat)%WOA,&
&mmat(nmat)%WCA,mmat(nmat)%VOR,mmat(nmat)%q_creep)
end subroutine mat_memory_free

end module material

```

#### ***4.3.2. Разработка программного и информационного обеспечения, реализующих в составе программных средств ЛЭГАК-ДК соотношения рассматриваемого варианта МПМ (программно-информационный модуль «fiz\_bloc»)***

Для реализации в составе программных средств ЛЭГАК-ДК основных функций общей модели поврежденного материала создан программно-информационный модуль «**fiz\_bloc**».

В модуле «**fiz\_bloc**» содержится:

- описание структуры данных, хранящей информацию, описывающую текущее состояние конструкции;
- набор модульных переменных, обеспечивающих обмен данными между подпрограммами модуля;
- набор модульных подпрограмм, реализующих внутреннюю шаговую схему, соотношения общей модели поврежденного материала и необходимого для функционирования первой очереди набора частных моделей в физическом узле конструкции.

Перечень подпрограмм модуля «**fiz\_bloc**» и их функциональное назначение представлены ниже:

`fpk` – подпрограмма реализующая модель поврежденного материала в физическом узле конструкции (подконструкции) на инкременте нагрузки;

`step_plast` – подпрограмма, реализующая внутреннюю шаговую схему вычисления деформаций пластичности, ползучести и меры поврежденности в физическом узле конструкции (подконструкции) для упруговязкопластических задач;

`step_plast_creep` – подпрограмма, реализующая внутреннюю шаговую схему вычисления необратимых деформаций и меры поврежденности

в физическом узле конструкции (подконструкции) для упругопластических задач;

`dstres` – подпрограмма, реализующая вычисление напряжений в упругом случае в физическом узле конструкции (подконструкции) на шаге изменения внешних воздействий;

`pd1` – подпрограмма вычисления пластических деформаций в физическом узле конструкции (подконструкции) на основе модели темопластичности с комбинированным упрочнением;

`brh` – подпрограмма, реализующая вычисление меры поврежденности в физическом узле конструкции (подконструкции) на основе критерия хрупкого разрушения;

`rph1` – подпрограмма, реализующая вычисление меры поврежденности в физическом узле конструкции (подконструкции) на основе модели пластического разрушения;

`rvh1` – подпрограмма, реализующая вычисление меры поврежденности в физическом узле конструкции (подконструкции) на основе модели накопления повреждений при ползучести

`fwr` – подпрограмма, реализующая вычисление предельной энергии пластического разрушения в зависимости от текущего значения параметра вида НДС;

`invd` – подпрограмма вычисления второго инварианта тензора напряжений;

`tensor` – подпрограмма вычисления главных значений тензора напряжений

## Контрольные вопросы

1. Назовите основные принципы построения общей модели поврежденного материала.
2. Сформулируйте модель термопластичности с комбинированным упрочнением в рамках общей модели поврежденного материала. Укажите область применения данной модели.
3. Сформулируйте модель термопластичности при циклических нагружениях.
4. Сформулируйте модель термоползучести. Перечислите ее параметры.
5. Перечислите эксперименты, на основании которых определяются упругие свойства материала.
6. Алгоритм получения материальных функций модели термопластичности.
7. Алгоритм получения материальных функций модели термоползучести.
8. Сформулировать модель накопления повреждений в рамках общей модели поврежденного материала.
9. Основные стадии накопления повреждений и их учет в рамках общей модели.
10. Определение энергии пластического разрушения при пластическом деформировании.
11. Параметры модели накопления повреждений при малоцикловых нагружениях.
12. Моделирование накоплений повреждений при ползучести.
13. Моделирование хрупких повреждений.
14. Алгоритм комбинированной шаговой схемы при решении нелинейных задач деформирования и разрушения конструкций.
15. Сформулируйте вариационные принципы, лежащие в основе МКЭ.
16. Моделирование геометрической нелинейности.

17. Алгоритм решения нелинейных задач на основе метода начальных напряжений. Критерии исчерпания несущей способности конструкции.
18. Использование изопараметрических конечных элементов. Схема улучшенного интегрирования.
19. Структура вычислительного комплекса на основе МКЭ.
20. Информационная структура ВК УПАКС. Локальная база данных и база данных по свойствам материалов.
21. Программно-информационный модуль «material» как основа для реализации общей модели поврежденного материала.
22. Реализация общей модели поврежденного материала в ВК ЛЭГАК-ДК (программно-информационный модуль «fiz\_bloc»).

## Литература

1. Программный продукт «Вычислительный комплекс решения нелинейных задач деформирования и разрушения конструкций МКЭ» (ВК УПАКС). ТУ 5030-02-020703 70-98. Сертификат соответствия N РОСС RU. ME20, НОО 113, Госстандарт России.
2. Вычислительный комплекс УПАКС. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС №147 от 31.10.2002.
3. Капустин С.А. Численное моделирование процессов деформирования конструкции на основе соотношений механики поврежденной среды // Моделирование в механике: Сб.научн.тр. /Новосибирск, 1990. Т.4 (21), №4. С.90-97.
4. Капустин С.А. Численный анализ термомеханических процессов деформирования и разрушения конструкций на основе МКЭ //Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз сб. /Москва. Изд-во "Товарищество научных изданий КМК".1995. Вып.53. с.63-71.
5. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Монография. Н.Новгород. Издательство Нижегородского государственного университета. 1999. 226 с.
6. Капустин С.А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел: Учеб. Пособие / С.А. Капустин.- Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002.
7. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. Численное моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций в условиях квазистатических термосиловых и терморadiационных воздействий //Тр. III школы-семинара «Современные проблемы ресурса материалов и конструкций», МАМИ, Москва, 2009, С. 90-104.
8. Коротких Ю.Г., Угодчиков А.Г. Уравнения термовязкопластичности с комбинированным упрочнением //Уравнения состояния при малоцикловом нагружении. М.Наука, 1982, с.129-167.
9. Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок / под общ. ред. Ф.М. Митенкова .- Машиностроение, 2007. – 448 с.

10. Волков И. А., Коротких Ю. Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.ФИЗМАТГИЗ, 2008.-424 с.
11. Зуев Б.И., Капустин С.А., Прок А.Е. Двухуровневая шаговая схема решения квазистатических задач термовязкопластичности // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз.межвуз.сб. /Горьк.ун-т. 1988. С.31-40.
12. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М: Мир,1987, 542с.

**Сергей Аркадьевич Капустин**

**Юрий Анатольевич Чурилов**

**Василий Андреевич Горохов**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И АЛГОРИТМЫ  
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ  
ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ТЕРМОСИЛОВЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

**Учебно-методическое пособие**

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура «Таймс». Уч.-изд. л. . Усл.-печ. л. .

Тираж 100 экз. Заказ №

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Типография Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского  
603000, Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37