Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Программа повышение конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций в области суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных вычислений»

Основная образовательная программа

01.03.03 – Механика и математическое моделирование

Учебно-методическая разработка по дисциплине

Численное моделирование и вычислительный эксперимент

Абросимов Н.А., Новосельцева Н.А.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Нижний Новгород

2014 год

УДК 539.3 (035.3)
ББК В213-8
А 16

А 16 **Абросимов Н.А., Новосельцева Н.А. Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов на основе анализа динамического деформирования оболочек вращения:** учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014. – 84 с.

Предложен расчетно-экспериментальный метод идентификации материальных констант и функций определяющих соотношений вязкоупругого деформирования однородных композитных материалов, базирующийся на минимизации невязки численного и экспериментального моделирования нестационарных процессов деформации оболочек вращения, изготовленных из исследуемых материалов. Проведено тестирование развиваемого подхода, показана его адекватность на задачах определения жесткостных и реологических характеристик композитных материалов по результатам сравнительного расчетно-экспериментального анализа нестационарного деформирования сферических и цилиндрических оболочек при взрывном нагружении.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся по теории и методам расчета композитных материалов и элементов конструкций.

УДК 539.3 (035.3)
ББК В213-8

Содержание

Введение

При создании конструкций современной техники наряду с традиционными материалами широко применяются и композиционные материалы, обладающие, в отличие от металлов, существенно лучшими весовыми, жесткостными, прочностными и диссипативными характеристиками.

Особенность конструкций из композитных материалов состоит в том, что и материал, и конструкция создаются одновременно – в рамках единого технологического процесса. Взаимообусловленность процессов создания конструкции, материала и технологии предопределяет новый подход к идентификации материальных параметров определяющих соотношений, основанный непосредственно на результатах комплексного экспериментально-теоретического анализа нестационарного поведения композитных элементов конструкций, выполненных из исследуемых материалов. В связи с этим достоверную информацию о свойствах композитных материалов можно получить лишь на основе результатов испытаний, изготовленных из них конструкций, что приводит к необходимости использования для этих целей методов идентификации.

Однако до настоящего времени такие подходы к идентификации материалов и моделей применялись для определения эффективных упругих характеристик композитных материалов на основе статических экспериментов.

Вместе с тем весьма актуальны и недостаточно изучены вопросы, связанные с определением вязкоупругих характеристик новых композитных материалов и построением на их основе разрешающих систем уравнений, описывающих эволюцию процессов деформации композитных конструкций при нестационарных нагружениях.

Предлагаемая монография посвящена развитию метода решения задач идентификации параметров моделей вязкоупругого поведения композитных материалов в динамически нагруженных элементах конструкции.

Глава 1. Краткий анализ методов решения задач идентификации математических моделей деформирования композитных материалов и элементов конструкций

Приводится краткий обзор методов идентификации физико-механических характеристик и моделей деформирования композитных материалов, математических моделей теории оболочек, методов решения задач динамики оболочек и формулируются выводы относительно состояния рассматриваемых проблем.

1.1. Идентификация механических характеристик композитных материалов

Механические характеристики композитных материалов существенно зависят от технологии их изготовления. Поэтому достоверную информацию о свойствах композитных материалов можно получить лишь на основе результатов испытаний, изготовленных из них конструкций.

Традиционные методы (резонансные, гистерезисные, свободных затухающих колебаний) определения механических характеристик и параметров моделей деформирования композитных материалов, основанные на испытаниях представительских образцов, имеют ряд существенных недостатков, обусловленных существенным влиянием на результаты измерений условий закрепления, способа возбуждения колебаний, неоднородности напряженно-деформированного состояния и технологических трудностей изготовления образцов. В связи с этим использование данных стандартных испытаний на представительских образцах с фиксированной структурой или образцах, вырезанных из заготовок изделий, может дать неточную информацию о поведении материала в реальной конструкции.

В то же время, в ряде случаев, имеется значительный объем экспериментальных данных, содержащий информацию о поведении элементов конструкций в виде тензограмм перемещений или деформаций на ее поверхностях. Эти данные, как правило, используются лишь для пассивной оценки степени соответствия предлагаемых моделей поведения материала и конструкций данным натурного эксперимента.

Поэтому в последнее время растет интерес к *методам идентификации*, позволяющим получить механические характеристики материала и параметры моделей деформирования конструкции, основываясь на экспериментальных данных для этой конструкции.

Задачи идентификации математических моделей подразделяются на структурные и параметрические. Структурная идентификация осуществляется на стадии выбора моделей для описания деформирования материалов и конструкций.

Структурная идентификация состоит из построения иерархии определяющих уравнений среды, выбора и физического обоснования их параметров и этапа подбора уравнения согласно заданному критерию оптимальности.

Структурная идентификация может осуществляться на микроскопическом и макроскопическом уровнях описания модели. Микроскопические явления описываются на атомных, молекулярных или мезоструктурных уровнях, а макроскопические базируются на физических законах, таких как баланс масс, баланс энергий, баланс моментов, правилах динамики, в результате чего формулируется определяющее уравнение, связывающее кинематические параметры с параметрами нагружения. Исследователю важно решить, какие макроскопические характеристики могут быть определены в ходе данного конкретного эксперимента, и какими параметрами они должны быть описаны. Объединение этих параметров в операторное уравнение и установление граничных условий завершает процесс структурной идентификации [1, 2].

Следует заметить, что рассматриваемый тип идентификации позволяет конструировать множество определяющих уравнений. В связи с этим возникает вопрос о критериях адекватности, т.е. какое из построенных уравнений наилучшим образом описывает данный конкретный эксперимент? Ответить на этот вопрос позволяет подход, использующий иерархически-адаптивную модель [3, 4]. Суть его состоит в том, что из базы данных производится автоматический выбор определяющего уравнения, которое наиболее точно описывает эксперимент, причем структурная и параметрическая идентификация происходят одновременно в реальном масштабе времени. Переход от одной ступени иерархии модели к следующей базируется на анализе ошибок измерений и ошибок модели.

В работе И. Ф. Образцова, Ю. Г. Яновского [1] предложена иерархическая адаптивная модель идентификации уравнений состояния вязкоупругих сред путем вычисления материальных параметров и материальных функций конкретной вязкоупругой среды экспериментально-теоретическим способом – на основе простейших тестов. Модель содержит несколько шагов иерархии по возрастающей сложности интегральных уравнений, адаптация которых производится автоматически в зависимости от заданной точности решения, а внутри каждого шага иерархии производится адаптация модели по параметру регуляризации методами робастной статистики.

В работе Д. Л. Быкова, Д. Н. Коновалова [3] рассматривается вариант нелинейной теории термовязкоупругости, разработанный для описания деформаций наполненных полимерных материалов, и показано, как можно находить все материальные функции и функционалы, опираясь на данные различных экспериментов и особенности иерархической структуры определяющих уравнений этой теории.

Параметрическая идентификация заключается в определении материальных параметров известной математической модели на основе имеющихся экспериментальных данных в соответствии с заданным критерием качества.

Методика параметрической идентификации при заданной структуре математической модели дает возможность проводить гибкий вычислительный эксперимент, в частности оперативно менять области поиска наилучших решений. Данное обстоятельство существенно компенсирует недостаточность априорной информации об этой области.

В результате решения параметрической задачи идентификации (фактически решения обратной задачи) происходит уточнение физико-механических параметров рассматриваемой конструкции, которые закладываются в математическую модель и входят в нее в качестве коэффициентов уравнений. Задачи подобного класса являются коэффициентными обратными задачами. Их относят к типу, который естественно можно назвать интерпретацией данных наблюдений, или задачами распознавания, или диагностики, в зависимости от специфики области применения.

При решении конкретных задач эффективным может оказаться применение как одношаговых, так и итерационных алгоритмов идентификации системы. Выбор алгоритма решения зависит от степени обусловленности разрешающей системы уравнений. Универсальным алгоритмом решения обратных задач можно назвать метод приведения их к экстремальным постановкам, т.е. поиск оптимальных в некотором смысле значений уточняемых параметров исследуемой конструкции, основанный на минимизации рассогласования измеряемых и вычисляемых величин.

Если в качестве исходных данных известны законы распределения результатов экспериментов, то обратные задачи решаются как задачи вероятностные (стохастические). В этом случае решением будет являться получение соответствующих законов распределения искомых (уточняемых) величин. Вероятностная постановка в решении обратных задач позволяет сформулировать требования к точности проведения эксперимента – величинам дисперсии, коэффициентам вариации и корреляции. Реальным становиться проведение дисперсионного и корреляционного анализов, позволяющих выявлять значимость и статистическую зависимость факторов, что значительно расширяет возможности и повышает информативность эксперимента.

В работе Н. А. Алфутова, П. А. Зиновьева, Л. П. Таировой [5] предложен метод идентификации линейно-упругих характеристик композитного материала по замерам деформаций тонкой многослойной пластины. Здесь решение обратной задачи находится фактически путем перебора вариантов решения прямой задачи. В качестве минимизируемой функции используется сумма квадратов относительных отклонений расчетных значений жесткостных характеристик от их экспериментальных значений.

В работе Ю. Д. Суворовой, В. С. Добрынина, И. Н. Статникова, Ю. Я. Барта [6] предложен один из возможных подходов к уточненному определению физико-механических характеристик композитного материала при его работе в конструкции, основанный на использовании метода параметрической идентификации. Рассматривается задача расчета жесткостных характеристик органопластикового армированного материала цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления и осевой силы. В качестве идентифицируемой величины выбрано значение давления, при котором происходит растрескивание связующего в слоях оболочки. По экспериментальным зависимостям осевой деформации от величины внутреннего давления строится целевая функция рассогласований идентифицируемых и экспериментальных измеряемых величин.

Дальнейшее развитие этих исследований представлено в работе В. П. Матвеенко, Н. А. Юрловой [7]. Оно связано с созданием алгоритмов, позволяющих рассматривать оболочки сложной геометрии с различными граничными условиями. При этом в качестве информации для идентификации механических характеристик могут использоваться как данные о различных статических нагружениях, реализуемых экспериментально, так и данные о резонансных режимах (спектр собственных частот, формы колебаний). Минимизируемый функционал представляет сумму среднеквадратических отклонений расчетных и экспериментальных данных перемещений, деформаций и резонансных частот.

В работе Р. А. Каюмова [8] ставится задача совместного определения механических характеристик материала и параметров отклика рассматриваемого изделия на заданное внешнее воздействие с учетом некоторых данных экспериментов при других воздействиях на это изделие и его аналоги. Считаются известными данные испытаний и (или) его аналогов с замером ряда уровней экспериментальных внешних воздействий и соответствующих им откликов конструкций в некоторых областях или точках (например, кинематических параметров – перемещений или деформаций), а также математические модели поведения материала и конструкции подобного типа. Формулируется задача математического программирования о минимизации квадратичной невязки всей или части полученной системы уравнений, из решения которой определяются как механические характеристики материала, так и параметры отклика конструкции. Предложенный подход исследован, когда материал представляет собой нелинейно-упругое тело.

В работе Р. Б. Рикардса, А. Чате [9] для решения проблем идентификации механических свойств многослойных композитных материалов предлагается вместо прямой минимизации функционала использовать метод планирования экспериментов, и с помощью постановки экспериментов получены поверхности отклика минимизируемого функционала.

В работе С. М. Кокошвили, В. П. Тамуж, Ю. О. Янсона [10] предложена методика определения деформативных характеристик полимерных материалов по экспериментальным данным одноосного растяжения в широком диапазоне скоростей деформации.

В работе А. С. Юношева, В. В. Сильвестрова [11] предложена методика определения динамических параметров модели стандартного линейного тела для мерных стрежней их полимерных материалов с помощью экспериментальных испытаний на сжатие разрезного стержня Гопкинсона.

Из анализа рассмотренных выше публикаций следует, что большинство работ по решению задач идентификации посвящено либо определению эффективных упругих характеристик композитных материалов на основе статических и квазистатических экспериментов (или их имитации), либо определению параметров моделей вязкоупругого поведения композитных материалов на основе динамических испытаний представительских образцов.

Из исследований, в которых определение деформационных характеристик осуществлялось по результатам динамических испытаний нестационарного деформирования элементов конструкции, можно отметить лишь работы: А. Г. Федоренко, В. И. Цыпкина, А. Г. Иванова, В. Н. Русака, С. Н. Заикина, А. Т. Шитова [12, 13] – в которых приведены исследования особенностей динамического деформирования цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении; А. Г. Демешкина, М. Е. Козеко, В. М. Корнева, В. Д. Кургузова [14] – в которых определялись демпфирующие характеристики композитных колец при взрывном нагружении; Л. В. Володиной, Н. Н. Гердюкова, Е. В. Зотова, А. М. Чеверикина [15] – где приведены результаты исследований динамических вязкоупругих свойств композитных материалов посредством взрывного нагружения полусферических оболочек.

Одним из способов решения задачи идентификации является сведение ее к классической задаче нелинейного математического программирования. Для этого на основе исходной информации из условия минимума, построенной определенным образом целевой функции, определяются искомые параметры.

При составлении целевой функции обычно используется принцип минимума взвешенной квадратичной невязки. Выбор параметров, совокупности уравнений, весовых коэффициентов, невязка которых минимизируется достаточно произволен. Он определяется рядом объективных и субъективных факторов (например, желанием уменьшить значение сомнительных с точки зрения расчетчика экспериментов). Кроме того, при использовании сложных зависимостей, содержащих большое количество параметров, необходимо уметь оценивать степень их влияния на результаты расчетов. Поэтому предварительно, перед решением задачи оптимизации, нужно провести *анализ чувствительности,* т.е. изучить влияние параметров на целевую функцию. Алгоритмы анализа чувствительности позволяют исследовать влияние различных параметров на поведение целевой функции и управлять процессом поиска оптимального решения.

Однако более полным следует считать подход, основанный на глобальном анализе чувствительности рассматриваемой модели, предложенный И. М. Соболем [16]. Глобальный анализ чувствительности не предполагает выделения индивидуальных решений, целевая функция рассматривается во всей области определения: изучается влияние отдельных переменных и их групп, выделяются существенные и несущественные переменные, выясняется структура целевой функции и возможность ее аппроксимации более простыми функциями. Анализ чувствительности позволяет выделить те переменные, которые оказывают наибольшее влияние на систему уравнений, что дает возможность эффективно использовать при поиске оптимального варианта проектируемой конструкции. Глобальные показатели чувствительности позволяют предсказать влияние неточности входных данных модели на результат моделирования, они очень полезны при исследовании нелинейных моделей и, особенно тогда, когда модель представляет собой «черный ящик» (например, компьютерную программу).

При выборе *метода оптимизации* необходимо учитывать ряд факторов: большие вычислительные затраты при формировании целевой функции, многоэкстремальный характер целевой функции, сложность вычисления ее производных и чувствительность методов оптимизации к погрешностям экспериментальных измерений.

Наименее чувствительными к погрешностям измерений являются методы, в которых строится нелокальная аппроксимация функции по ее значениям в ряде точек. Однако, ни один из известных методов нельзя считать универсальным средством для решения любых задач условной оптимизации. При выборе существующих и создании новых алгоритмов математического программирования необходимо учитывать особенности рассматриваемых задач. Алгоритмическое задание функций ограничений и их производных приводит к ограниченности информации, от которой в значительной степени зависит эффективность решения задачи. Этот недостаток информации приводит к резкому сужению круга возможных методов реализации. При решении оптимизационных задач нестационарной динамики оболочечных конструкций чаще всего используются прямые поисковые методы, поскольку они обладают большой надежностью, что важно в условиях ограниченности информации относительно характера задачи.

Наиболее популярными в практике расчетов являются следующие методы прямого поиска: метод сеточного поиска Хука-Дживса, метод симплексного поиска Нелдера-Мида и его модификация – комплексный метод Бокса [17].

Для решения задачи глобальной оптимизации не существует универсального по эффективности алгоритма. Поэтому при разработке специфических методов глобальной оптимизации в первую очередь учитываются свойства целевой функции и допустимого множества рассматриваемой задачи, для которой разрабатывается метод.

Все известные методы глобальной оптимизации можно разделить на две категории: детерминированные [18] и стохастические [19]. Детерминированные методы получают глобальное решение посредством исчерпывающего поиска на всем допустимом множестве. Поэтому большинство детерминированных методов теряют эффективность и надежность с возрастанием размерности задачи. Кроме того, чтобы гарантировать успех, такие методы требуют дополнительных предположений, наложенных на целевую функцию.

Стохастические алгоритмы позволяют уйти от проблем детерминированных алгоритмов. Здесь стохастический подход присутствует не только в разработке и анализе алгоритма, но и используется в решении базовых проблем, например, при определении условия остановки. Большинство стохастических методов оценивают значение целевой функции в случайных точках допустимого множества с последующей обработкой выборки.

Анализ состояния рассматриваемой проблемы показал: большинство исследований посвящено определению эффективных упругих характеристик композитных материалов на основе статических экспериментов для простейших элементов конструкций и динамических испытаниях представительских образцов; работы по решению задач идентификации вязкоупругих характеристик, базирующиеся на результатах динамических испытаний элементов конструкций, практически отсутствуют; явно недостаточно развиты алгоритмы глобальной оптимизации целевых функций для решения задач идентификации.

1.2. Математические модели композитных оболочек

В основе всех известных теорий оболочек лежат приближенные методы сведения трехмерных динамических задач теории упругости к двумерным после решения которых можно приближенно восстановить трехмерные поля смещений, деформаций и напряжений в оболочке.

В зависимости от способа приведения можно выделить два направления в теории оболочек:

- прикладные теории, основанные на некоторых гипотезах о распределении перемещений и (или) напряжений по толщине оболочки;
- неклассические теории оболочек: в основе которых лежат асимптотические методы и различные варианты метода рядов.

Прикладные теории оболочек базируются на некоторых априорных предположениях относительно характера напряженно-деформированного состояния оболочки. Примерами таких теорий являются: безмоментная, Кирхгофа-Лява, Флюгге, Тимошенко, Рейсснера-Нагди, С. А. Амбарцумяна, В. В. Васильева и др.

Неклассические теории оболочек основаны на различных способах упрощения непосредственно трехмерных динамических уравнений теории упругости. К неклассическим теориям относятся асимптотические методы и различные варианты метода рядов.

Асимптотический метод основан на относительной малости толщины оболочки, что приводит к определению искомых функций в форме разложения по степеням малого параметра, зависящего от толщины оболочки.

Недостатком асимптотического метода приведения является то, что для успешного применения метода желательна предварительная информация об основных свойствах определяемого напряженного состояния, а также некоторые трудности представляет собой определение краевых условий, которым должны удовлетворять дифференциальные уравнения, интегрируемые на определенном этапе приближения.

Основная идея метода разложения в ряд заключается в представлении перемещений и (или) напряжений в оболочке в виде рядов по системе функций от толщинной координаты при дальнейшем использовании соотношений упругости и трехмерных уравнений равновесия (движения) теории упругости или вариационных принципов для установления дифференциальных зависимостей между коэффициентами этих разложений.

Несмотря на значительные трудности в реализации, важным преимуществом метода разложения в ряды по толщине является принципиальная возможность повысить точность решения, не выходя за рамки выбранных процедур, в то время как метод гипотез требует замены первоначальной гипотезы другой, более точно отражающей реальное напряженно-деформированное состояние.

К недостаткам метода рядов, как метода приведения, следует отнести то обстоятельство, что удовлетворение краевых и начальных условий с заданной условной точностью требует относительно более высокой точности уравнений, и, что формальное усечение аппроксимирующих рядов часто приводит к тому, что по существу оказываются сохраненными некоторые члены такого же порядка малости, как отброшенные. Однако эти недостатки можно устранить, решая проблему приведения с помощью общего уравнения динамики и проводя асимптотический анализ порядка малости отбрасываемых членов.

Для построения математических моделей композитных оболочек приходится сталкиваться с необходимостью учета неупругих свойств: существенным является вопрос учета вязкоупругой работы материала.

Определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости целесообразно представить интегральной зависимостью Больцмана-Вольтерра [20], поскольку путем изменения ядер релаксации появляется возможность очень широкого обобщения. Простейшим ядром релаксации является затухающая показательная функция. Однако ядро экспоненциального типа не всегда удовлетворительно описывает результаты экспериментов. Дальнейшим усложнением ядер определяющих соотношений может быть или использование вместо одной экспоненты суммы экспонент, или замена экспоненты другими функциями.

Для более точного описания начального момента времени следует вводить ядра со слабой особенностью в начале координат. Простейшим видом ядра со слабой особенностью является ядро Дуффинга [21]. Полученный степенной закон довольно точно описывает деформацию различных материалов, по крайне мере, начальные участки кривых. Для материала, подчиняющегося этому закону, длительный модуль упругости равен нулю.

Ядро, в котором объединяются свойства экспоненциального ядра и ядра со слабой особенностью, предложено А. Р. Ржаницыным [22].

В последнее время все более актуальными становятся задачи, в которых необходимо описывать поведение композитных материалов при динамическом нагружении. Экспериментальные исследования [12–14] свидетельствуют о том, что реакция композитов на динамическое нагружение может существенно отличаться от поведения в квазистатических условиях.

Из анализа работ, посвященных построению математических моделей вязкоупругого деформирования оболочек, следует, что в основном исследования ориентированы на описание процессов деформации в элементах конструкций при статических нагружениях в рамках классических подходов, а модели для изучения вязкоупругого динамического поведения элементов конструкций из композитных материалов на основе неклассических теорий разработаны явно недостаточно.

1.3. Методы решения задач динамического деформирования композитных оболочек

Для анализа нестационарных процессов в пластинах и оболочках применяются различные методы интегрирования разрешающих систем уравнений. Выбор наиболее эффективного метода тесно связан с используемыми моделями теории оболочек, идеализацией реальных свойств материала и типа внешних воздействий. Известные методы решения задач динамического деформирования элементов конструкций разделяются на точные и приближенные. Последние в свою очередь делятся на приближенные аналитические и численные методы.

Аналитические методы интегрирования разработаны для решения линейных задач, для тел простой конфигурации при некоторых ограничениях на вид внешних воздействий. Из них наиболее широкое распространение получили методы, основывающиеся на использовании интегральных преобразований и разложении в ряд Фурье в переменном интервале.

Точные и приближенные аналитические методы являются необходимыми и очень мощными инструментами решения задач динамического деформирования и потери устойчивости элементов конструкций. Однако, решение нелинейных нестационарных динамических задач этими методами наталкивается на непреодолимые трудности. В связи с этим широкое распространение, особенно при решении прикладных задач, получили различные численные методы интегрирования.

Метод характеристик является одним из наиболее распространенных методов интегрирования систем гиперболических уравнений [23].

Метод характеристик хорошо разработан для решения линейных и нелинейных одномерных задач о переходных волновых процессах в стержнях, цилиндрических и конических оболочках. Обобщение его на задачи динамики составных конструкций наталкивается на значительные трудности математического и алгоритмического характера. В связи с этим получили развитие так называемые характеристические конечно-разностные методы, которые сочетают в себе достоинства метода характеристик и универсальность метода конечных разностей.

Основным достоинством этого метода является возможность качественного анализа характера решения и возможность детального описания разрывов и особенностей решения.

Недостатки метода связаны с определенными трудностями при решении нелинейных задач и сложной логикой расчета особенностей и построения многократных взаимодействий скачков.

Более универсальным методом решения нелинейных задач динамического деформирования является *метод конечных разностей* (МКР).

В МКР [24] для приближенного решения начально-краевой задачи, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных, исследуемая область с границей разбивается на ячейки. Искомые функции заменяются совокупностью их значений в вершинах ячеек, образующих разностную сетку области. Используя понятие конечных разностей, такое представление позволяет свести задачу нестационарного деформирования к системе алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений и найти из ее решения сеточные значения искомых функций. Существует большое количество способов такой замены, которое обуславливает разнообразие схем МКР [24]. Одной из наиболее популярных схем МКР является схема "крест", предложенная впервые в работе Р. Куранта, Фридрихса, Г. Леви [25]. Достоинством схемы "крест" является ее простота и высокая алгоритмичность по сравнению с другими явными схемами сквозного счета. Недостатки схемы "крест" связаны с меньшей точностью в районе фронтов, а также с трудностью аппроксимации граничных условий.

К недостаткам конечно-разностного метода следует отнести значительные трудности, возникающие при аппроксимации граничных условий, содержащих производные. Для устранения этих недостатков при построении конечно-разностных схем используют интегральные формулировки задач.

Все более широкое применение для решения нестационарных задач нелинейного деформирования композитных пластин и оболочек находит *метод конечных элементов* (МКЭ). Идея метода заключается в минимизации функционала вариационной задачи, осуществляемой на совокупности функций, каждая из которых определена в своей подобласти (конечном элементе). Благодаря этому становится возможным в каждой подобласти использовать стандартную последовательность базисных функций и получать решения для задач, отличающихся распределением параметров внутри области, ее геометрией, граничными условиями и т.д.

Кроме универсальности и физической наглядности можно отметить следующие достоинства МКЭ: метод приводит к системам алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений с малозаполненными, узколенточными, симметричными и положительно определенными матрицами коэффициентов при неизвестных; независимость вычислений в отдельных элементах; возможность построения улучшенных решений путем увеличения числа параметров, описывающих каждый элемент; гибкость, приспособленность матричного аппарата МКЭ к реализации на ЭВМ.

Промежуточное положение между МКР и МКЭ занимают *вариационно-разностные методы* (ВРМ) [26]. ВРМ сочетают в себе простоту в реализации, присущую МКР, и алгоритмичность конечно-элементного подхода, и являются, по существу, простейшим вариантом последнего.

Поскольку область определения в динамических задачах кроме пространства включает время, то методы численного решения предполагают дискретизацию определяющей системы уравнений и по этой переменной. Возможны два способа дискретизации: одновременное и последовательное пространственно-временное деление области. При одновременном разделении области определения [27] задача сводится к системе алгебраических уравнений, в которую входят неизвестные на всех временных слоях. Такой способ приводит к определенным трудностям (в частности, увеличивается объем хранимой информации), которые ограничивают его применение на практике. При последовательной пространственной и временной дискретизации задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по времени, для интегрирования которых применяются как явные, так и неявные разностные схемы. При решении прикладных задач динамического деформирования оболочек обычно используются явные схемы второго порядка точности относительно шага по времени. Эти схемы обладают некоторым преимуществом по сравнению с неявными схемами, так как позволяют обойтись без итераций при решении нелинейных задач

При решении динамических задач вязкоупругости используется метод усреднения и различные его модификации [28], который дает хорошие результаты на всем временном интервале при малом влиянии вязкости или для малых промежутков времени в случае большой вязкости.

В работе Ф. Б. Бадалова, Б. А. Худаярова, А. Абдукаримова [29] проведено сравнение численных результатов, полученных при решении динамических задач наследственно-деформируемых систем с использованием экспоненциальных и слабо-сингулярных ядер наследственности.

Из проведенного выше анализа работ, посвященных методам решения динамических задач, следует, что хорошо разработаны численные методы решения задач вязкоупругого деформирования изотропных элементов конструкций простой конфигурации на основе классических теорий оболочек. Недостаточно изучены вопросы вязкоупругого поведения элементов конструкций из композитных материалов на основе неклассических теорий оболочек.

Глава 2. Постановка и метод решения задач динамического деформирования композитных оболочек вращения в неклассической постановке

Рассматривается постановка и метод решения задач вязкоупругого деформирования композитных оболочек вращения произвольной толщины при импульсных осесимметричных воздействиях. Вывод разрешающей системы уравнений базируется на принципе возможных перемещений. При этом для сведения трехмерной динамической задачи теории упругости к неклассической задаче теории нетонких оболочек вращения применяется метод разложения функций перемещений в ряды по толщинной координате. Связь между тензорами напряжений и деформаций устанавливается в рамках линейной теории вязкоупругости. Метод решения задач динамики вязкоупругих композитных оболочек вращения основывается на явной вариационно-разностной схеме.

2.1. Вывод разрешающей системы уравнений динамики осесимметричных вязкоупругих оболочек вращения на основе модели с разложением в ряд

Отнесем оболочку вращения постоянной толщины h к лагранжевой системе ортогональных координат α_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ совпадающей с линиями главных кривизн и внешней нормалью к срединной поверхности оболочки в недеформированном состоянии. Здесь α_1, α_2 – длины дуг образующей и направляющей соответственно, а α_3 – расстояние точки от срединной поверхности (положительно – вдоль внешней нормали). Коэффициенты Ламе рассматриваемой системы равны:

$$H_1 = Z_1;\ H_2 = r(\alpha_1)Z_2;\ H_3 = 1, \qquad (2.1)$$

где $Z_1 = 1 + k_1\alpha_3$; $Z_2 = 1 + k_2\alpha_3$; k_1, k_2 – главные кривизны; $r(\alpha_1)$ – расстояние от оси вращения до точки срединной поверхности с координатой α_1.

Так как оболочки вращения из композитных материалов являются неоднородными, имеют низкую сдвиговую жесткость и, в ряде случаев, не малую толщину, поэтому для описания их напряженно-деформированного состояния необходимо привлекать неклассические теории оболочек.

Для построения разрешающей системы уравнений неклассической теории оболочек вращения применим метод рядов [30]. Аппроксимируем компоненты вектора перемещения $u_i(\alpha_1, \alpha_3, t)$ $(i = 1{,}3)$ конечными рядами по нормальной координате α_3:

$$u_i(\alpha_1, \alpha_3, t) = \sum_{n=0}^{N} u_i^n(\alpha_1, t)\sqrt{n + 1/2}\,P_n(x), \tag{2.2}$$

где $-1 \le x = 2\dfrac{\alpha_3}{h} \le 1$; $\sqrt{n + 1/2}\,P_n(x)$ – ортонормированные полиномы Лежандра; $u_i^n(\alpha_1, t)$ – искомые функции; t – время.

В рассматриваемой системе координат осесимметричные деформации оболочки вращения определяются выражениями [30]:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{Z_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3\right);\\
e_{22} &= \frac{1}{Z_2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \alpha_1}u_1 + k_2 u_3\right);\\
e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3};\\
e_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{Z_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1\right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем перемещения (2.2) в выражения для деформаций (2.3) и после несложных преобразований получим деформационные соотношения неклассической теории оболочек:

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{Z_1}\left(\varepsilon_{11} + \chi_{11}\,\alpha_3 + \chi_{11}^n\right);\\
e_{22} &= \frac{1}{Z_2}\left(\varepsilon_{22} + \chi_{22}\,\alpha_3 + \chi_{22}^n\right);\\
e_{33} &= \chi_{33} + \chi_{33}^n;\\
e_{13} &= \frac{1}{Z_1}\left(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{13}^n\right) + \chi_{13} + \chi_{13}^n,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\varepsilon_{11} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3^0\right);$$

$$\varepsilon_{22} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \alpha_1}u_1^0 + k_2 u_3^0\right);$$

$$\varepsilon_{13} = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1^0\right);$$

$$\chi_{11} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3^1\right);$$

$$\chi_{22} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \alpha_1}u_1^1 + k_2 u_3^1\right);$$

$$\chi_{33} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}u_3^1;$$

$$\chi_{13} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}u_1^1;$$

$$\chi_{11}^n = \sum_{n=2}^{N}\frac{\partial u_1^n}{\partial \alpha_1}\sqrt{n+1/2}\,P_n(x) + k_1\sum_{n=2}^{N}u_3^n\sqrt{n+1/2}\,P_n(x);$$

$$\chi_{22}^n = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \alpha_1}\sum_{n=2}^{N}u_1^n\sqrt{n+1/2}\,P_n(x) + k_2\sum_{n=2}^{N}u_3^n\sqrt{n+1/2}\,P_n(x);$$

$$\chi_{33}^n = \sum_{n=2}^{N}u_3^n\sqrt{n+1/2}\,P_n'(x);$$

$$\chi_{13}^n = \sum_{n=2}^{N}u_1^n\sqrt{n+1/2}\,P_n'(x);$$

$$\varepsilon_{13}^n = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{h}\alpha_3\frac{\partial u_3^1}{\partial \alpha_1} + \sum_{n=2}^{N}\frac{\partial u_3^n}{\partial \alpha_1}\sqrt{n+1/2}\,P_n(x) -$$

$$-k_1\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{h}\alpha_3 u_1^1 + \sum_{n=2}^{N}u_1^n\sqrt{n+1/2}\,P_n(x)\right].$$

Определяющие соотношения для ортотропных вязкоупругих оболочек формулируются на основе линейной теории вязкоупругости и могут быть представлены в виде [20]:

$$\sigma_{ii} = \sum_{j=1}^{3}C_{ij}^o e_{ij}^0\ (i=\overline{1,3});\quad \sigma_{13} = G_{13}^o e_{13}';$$

$$e_{ii}^0 = e_{ii} - \left(1 - \frac{C_{ii}^\infty}{C_{ii}^o}\right)\int_0^t R(t-\tau)e_{ii}(\tau)d\tau; \qquad (2.5)$$

$$e_{ij}^{0}=e_{jj}-\left(1-\frac{C_{ij}^{\infty}}{C_{ij}^{o}}\right)\int_{0}^{t}R(t-\tau)e_{jj}(\tau)d\tau;$$

$$e_{13}'=e_{13}-\left(1-\frac{G_{13}^{\infty}}{G_{13}^{o}}\right)\int_{0}^{t}R(t-\tau)e_{13}(\tau)d\tau,$$

где C_{ij}^{0}, G_{13}^{0}, C_{ij}^{∞}, G_{13}^{∞} – мгновенные и длительные жесткостные характеристики; $R(t)=\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\beta_n t}$ – ядро релаксации максвелловского типа.

Реологические уравнения (2.5) дают достаточно хорошее качественное и количественное отображение нестационарного процесса деформирования элементов конструкций выполненных из композитных материалов, имея в виду практическое применение. Интегральная форма записи определяющих соотношений допускает изменение ядер релаксации, что открывает возможность более широкого обобщения. Кроме того, ядра экспоненциального вида весьма удобны и эффективны в численной реализации, поскольку вычисление наследственных интегралов приводит к рекуррентным формулам и освобождает от необходимости хранения информации на всех временных слоях.

Для построения неклассических уравнений теории оболочек воспользуемся общим уравнением динамики, следующим из принципа возможных перемещений [31].

Общее уравнение динамики, записанное для оболочки как трехмерного тела, имеет вид:

$$\iiint\limits_{V}\sum_{i,j=1}^{3}\sigma_{ij}\delta e_{ij}dV+\iiint\limits_{V}\sum_{i=1}^{3}\rho\ddot{u}_i\delta u_i dV-\iint\limits_{S}P_i\delta u_i dS=0. \qquad (2.6)$$

Здесь V – объем, занимаемый оболочкой в недеформированном состоянии; S – часть поверхности оболочки, на которой заданы внешние силы; P_i – поверхностные силы, отнесенные к недеформированной элементарной площади в точке с координатами α_i; δu_i – произвольные кинематически допустимые изменения перемещений; ρ – плотность материала в исходном состоянии; точки означают производную по времени.

Для осесимметричного тела вращения уравнение (2.6) запишется в виде:

$$\iint\limits_{F}\left(\sigma_{11}\delta e_{11}+\sigma_{22}\delta e_{22}+\sigma_{33}\delta e_{33}+\sigma_{13}\delta e_{13}\right)dF+$$

$$\iint\limits_F \rho(\ddot{u}_1\delta u_1+\ddot{u}_3\delta u_3)dF-\int\limits_\Gamma (P_1\delta u_1+P_3\delta u_3)d\Gamma=0\,, \tag{2.7}$$

где F – поверхность сечения тела объема V плоскостью, проходящей через ось вращения; Γ – часть контура поверхности F, на котором заданы внешние силы.

После подстановки соотношений (2.1)–(2.5) в выражение принципа возможных перемещений для оболочки вращения (2.7), как сплошной среды, и интегрирования по нормальной координате получим:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^L\Bigg[N_{11}\frac{\partial(\delta u_1^0)}{\partial\alpha_1}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}N_{22}-k_1Q_1\right)\delta u_1^0+Q_1\frac{\partial(\delta u_3^0)}{\partial\alpha_1}+\\
&+(k_1N_{11}+k_2N_{22})\delta u_3^0+M_{11}\frac{\partial(\delta u_1^1)}{\partial\alpha_1}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}M_{22}+Q_{13}-k_1M_{13}\right)\delta u_1^1+\\
&+M_{13}\frac{\partial(\delta u_3^1)}{\partial\alpha_1}+(k_1M_{11}+k_2M_{22}+Q_{33})\delta u_3^1+\sum_{n=2}^N M_{11}^n\frac{\partial(\delta u_1^n)}{\partial\alpha_1}+\\
&+\sum_{n=2}^N\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}M_{22}^n-k_1M_{13}^n+M_{13}'^n\right)\delta u_1^n+\sum_{n=2}^N M_{13}^n\frac{\partial(\delta u_3^n)}{\partial\alpha_1}+\\
&+\sum_{n=2}^N\left(k_1M_{11}^n+k_2M_{22}^n+M_{33}^n\right)\delta u_3^n\Bigg]rd\alpha_1+\\
&+\int\limits_0^L\Bigg[\sum_{n=0}^N\left(A_n^0\ddot{u}_1^0+A_n^1\ddot{u}_1^1+\sum_{m=2}^N A_n^m\ddot{u}_1^m\right)\delta u_1^n+\\
&+\sum_{n=0}^N\left(A_n^0\ddot{u}_3^0+A_n^1\ddot{u}_3^1+\sum_{m=2}^N A_n^m\ddot{u}_3^m\right)\delta u_3^n\Bigg]rd\alpha_1-\\
&-\int\limits_0^L\left[F_3^0\delta u_3^0+F_3^1\delta u_3^1+\sum_{n=2}^N F_3^n\delta u_3^n\right]rd\alpha_1-\\
&-r\left(N_1^0\delta u_1^0+N_3^0\delta u_3^0+M_1^0\delta u_1^1+M_3^0\delta u_3^1+\sum_{n=2}^N M_1^n\delta u_1^n+\sum_{n=2}^N M_3^n\delta u_3^n\right)\Bigg|_{\alpha_1=0,L}=0\,,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$N_{11}=\sqrt{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{11}Z_2d\alpha_3\,; \qquad N_{22}=\sqrt{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{22}Z_1d\alpha_3\,;$$

$$M_{11}=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{11}Z_2\alpha_3 d\alpha_3\,; \qquad M_{22}=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{22}Z_1\alpha_3 d\alpha_3\,;$$

$$Q_1=\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}Z_2 d\alpha_3\,; \qquad Q_{13}=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}Z_1Z_2 d\alpha_3\,;$$

$$M_{13}=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}Z_2\alpha_3 d\alpha_3\,;$$

$$Q_{33}=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{33}Z_1Z_2 d\alpha_3\,; \qquad M_{11}^{n}=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{11}Z_2P_n(x)d\alpha_3\,;$$

$$M_{22}^{n}=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{22}Z_1P_n(x)d\alpha_3\,; \qquad M_{33}^{n}=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{33}Z_1Z_2P_n'(x)d\alpha_3\,;$$

$$M_{13}^{n}=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}Z_2P_n(x)d\alpha_3\,; \qquad M_{13}'^{n}=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{13}Z_1Z_2P_n'(x)d\alpha_3\,;$$

$$A_n^n=\rho\left(\frac{h}{2}+\frac{k_1k_2h^3}{8}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{4n^2+8n+3}+\frac{n^2}{4n^2-1}\right)\right),\left(n=\overline{0,N},\ i=1{,}3\right)\ ;$$

$$A_{n+1}^n=\rho\frac{(k_1+k_2)h^2}{4}\cdot\frac{(n+1)}{\sqrt{4n^2+8n+3}},\ \left(n=\overline{0,N-1},\ i=1{,}3\right);$$

$$A_{n+2}^n=\rho\frac{k_1k_2h^3}{8}\cdot\frac{\left(n^2+3n+2\right)}{(2n+3)\sqrt{\left(4n^2+12n+5\right)}},\left(n=\overline{0,N-2},i=1{,}3\right);$$

$$F_3^n=(-1)^n q_3^-\sqrt{n+1/2}\left(1-k_1\, h/2\right)\left(1-k_2\, h/2\right)+q_3^+\sqrt{n+1/2}\left(1+k_1\, h/2\right)\left(1+k_2\, h/2\right);$$

$$N_1^0=\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}S_1 d\alpha_3\,; \qquad N_3^0=\sqrt{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}S_3 d\alpha_3\,;$$

$$M_1^0=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\alpha_3 S_1 d\alpha_3\,;\quad M_3^0=\frac{2}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\alpha_3 S_3 d\alpha_3\,;$$

$$M_1^n=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}S_1\,P_n(x)d\alpha_3\,;\; M_3^n=\sqrt{n+0.5}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}S_3\,P_n'(x)d\alpha_3\,,\;\left(n=\overline{2,N}\right),$$

L – длина образующей срединной поверхности оболочки в исходном недеформированном состоянии; q_3^-, q_3^+, S_1, S_3 – интенсивности распределенных нагрузок, действующих на внутренней и внешней поверхностях и контурных сечениях оболочки.

Вариационное уравнение динамики (2.8) описывает движение вязкоупругой композитной оболочки вращения и может быть использовано для численного решения прикладных задач с различной степенью точности в зависимости от числа членов в аппроксимирующих рядах (2.2).

Интегрируя (2.8) по частям и учитывая произвольность вариаций δu_i^n, получим систему дифференциальных уравнений движения оболочки вращения:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial(N_{11}r)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}N_{22}+k_1Q_1=A_0^0\ddot{u}_1^0+A_0^1\ddot{u}_1^1+\sum_{m=2}^{N}A_0^m\ddot{u}_1^m\,;\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(M_{11}r)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}M_{22}-Q_{13}+k_1M_{13}=A_1^0\ddot{u}_1^0+A_1^1\ddot{u}_1^1+\sum_{m=2}^{N}A_1^m\ddot{u}_1^m\,;\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial\left(M_{11}^n r\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\alpha_1}M_{22}^n-M_{13}'^n+k_1M_{13}^n=A_n^0\ddot{u}_1^0+A_n^1\ddot{u}_1^1+\sum_{m=2}^{N}A_n^m\ddot{u}_1^m\,,\left(n=\overline{2,N}\right);\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(Q_1r)}{\partial\alpha_1}-k_1N_{11}-k_2N_{22}+F_3^0=A_0^0\ddot{u}_3^0+A_0^1\ddot{u}_3^1+\sum_{m=2}^{N}A_0^m\ddot{u}_3^m\,;\qquad(2.9)\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial(M_{13}r)}{\partial\alpha_1}-k_1M_{11}-k_2M_{22}-Q_{33}+F_3^1=A_1^0\ddot{u}_3^0+A_1^1\ddot{u}_3^1+\sum_{m=2}^{N}A_1^m\ddot{u}_3^m\,;\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial\left(M_{13}^n r\right)}{\partial\alpha_1}-k_1M_{11}^n-k_2M_{22}^n-M_{33}^n+F_3^n=A_n^0\ddot{u}_3^0+A_n^1\ddot{u}_3^1+\sum_{m=2}^{N}A_n^m\ddot{u}_3^m\,,\left(n=\overline{2,N}\right),
\end{aligned}$$

и естественные граничные условия при $\alpha_1=o,L$:

$$\begin{aligned}
&N_{11}=N_1^0;\; M_{11}=M_1^0;\; Q_1=N_3^0;\; M_{13}^1=M_3^0;\qquad(2.10)\\
&M_{11}^n=M_1^n;\; M_{13}^n=M_3^n,\left(n=\overline{2,N}\right).
\end{aligned}$$

При интегрировании основных уравнений (2.9) и (2.10) должны быть удовлетворены также начальные условия, которые запишутся в виде:

$$u_1^n(\alpha_1,0)=0;\ u_3^n(\alpha_1,0)=0;\ \dot{u}_1^n(\alpha_1,0)=0;\ \dot{u}_3^n(\alpha_1,0)=0,\ \left(n=\overline{0,N}\right). \qquad (2.11)$$

Уравнения движения, разрешенные относительно перемещений, имеют второй порядок по пространственной (α_1) и временной (t) координатам и принадлежат к гиперболическому типу, поскольку операция проектирования (2.2) не изменяет свойств исходной системы уравнений.

Система уравнений движения (2.9) имеет в совокупности $2\cdot(N+1)$ порядок по переменным α_1 и t.

Соотношения (2.2)–(2.5), (2.9)–(2.11) представляют замкнутую систему интегро-дифференциальных уравнений, необходимую для исследования нелинейных волновых процессов деформации в нетонких оболочках вращения. Точность полученной системы уравнений определяется количеством членов, удерживаемых в рядах (2.2) (при условии их сходимости).

2.2. Вариационно-разностный метод решения задач динамического вязкоупругого деформирования композитных оболочек вращения

Решение сформулированных выше задач возможно только численными методами. Наиболее универсальным и эффективным методом исследования нестационарных процессов деформирования в оболочках является вариационно-разностный метод в сочетании с явной схемой интегрирования по времени.

Основные положения этого метода заключаются в следующем [30].

Поверхность сечения оболочки в плоскости координат α_1, α_3 покроем сеткой состоящей из M узлов по образующей и K – по толщине. Назовем эту сетку основной. Введем также сетку, смещенную на половину шага по отношению к основной сетке. В узлах смещенной сетки вычисляются деформации, напряжения и интегральные характеристики. В узлах основной сетки задаются геометрические параметры оболочки, вычисляются компоненты вектора перемещений, а также аппроксимируются уравнения движения. Примем кусочно-линейное изменение искомых функций между узлами основной сетки вдоль образующей оболочки. Первые производные в узлах смещенной сетки аппроксимируем отношениями разностей функций в двух соседних узлах основной сетки к шагу между ними:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right)_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} - f_i}{(\Delta\alpha_1)_{i+1/2}}. \tag{2.12}$$

Значения функций в узлах смещенной сетки вычисляются как среднее арифметическое значений этих функций в узлах основной сетки:

$$f_{i+1/2} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2}. \tag{2.13}$$

Процесс деформирования во времени разбивается на временные слои $t^0, t^1, t^2, \ldots, t^k, \ldots$ с шагом $\Delta t = t^{k+1} - t^k$, $k = \overline{0,\infty}$. Рассматриваются две различные центровки по времени. Характеристики, определяющие историю деформирования (напряжения, деформации), вычисляются в целые моменты времени t^k. Значения скоростей обобщенных перемещений определяются в промежуточные моменты времени $t^{k+1/2}$. Производные по времени заменяются центральными разностями со вторым порядком точности с помощью оператора:

$$\ddot{f}_i^k = \frac{\dot{f}_i^{k+1/2} - \dot{f}_i^{k-1/2}}{\Delta t}, \tag{2.14}$$

где

$$\dot{f}_i^{k+1/2} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t}.$$

Так, производные по времени от величин, определенных в целые моменты времени, будут определены в полуцелые моменты времени и, наоборот.

Такой подход обеспечивает выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне. Кроме того, на равномерных сетках достигается второй порядок аппроксимации по пространственной и временной координатам [32].

Допустим, что в узлах основной сетки известны параметры k_1, k_2 и r, определяющие начальную геометрию оболочки и значения моментов перемещений u_j^n $(j = \overline{1,3})$. Тогда для вычисления деформаций оболочки (2.3) с учетом представления (2.2) и разностной аппроксимации (2.12)–(2.14), получим следующие выражения:

$$\left[\left(e_{11}\right)_{i+1/2}\right]_l=\left[\frac{1}{\left(Z_1\right)_{i+1/2}}\right]_l\sum_{n=0}^{N}a_{nl}\left\{\frac{\left(u_1^n\right)_{i+1}-\left(u_1^n\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+\left(k_1\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(u_3^n\right)_{i+1}+\left(u_3^n\right)_i}{2}\right\};$$

$$\left[\left(e_{22}\right)_{i+1/2}\right]_l=\left[\frac{1}{\left(Z_2\right)_{i+1/2}}\right]_l\sum_{n=0}^{N}a_{nl}\left\{\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\cdot\frac{r_{i+1}-r_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}\cdot\frac{\left(u_1^n\right)_{i+1}+\left(u_1^n\right)_i}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(k_2\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(u_3^n\right)_{i+1}+\left(u_3^n\right)_i}{2}\right\};$$

$$\left[\left(e_{33}\right)_{i+1/2}\right]_l=\frac{2}{h}\sum_{n=0}^{N}b_{nl}\left\{\frac{\left(u_3^n\right)_{i+1}+\left(u_3^n\right)_i}{2}\right\};\tag{2.15}$$

$$\left[\left(e_{13}\right)_{i+1/2}\right]_l=\frac{2}{h}\sum_{n=0}^{N}b_{nl}\left\{\frac{\left(u_1^n\right)_{i+1}+\left(u_1^n\right)_i}{2}\right\}+$$

$$+\left[\frac{1}{\left(Z_1\right)_{i+1/2}}\right]_l\sum_{n=0}^{N}a_{nl}\left\{\frac{\left(u_3^n\right)_{i+1}-\left(u_3^n\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}-\left(k_1\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(u_1^n\right)_{i+1}+\left(u_1^n\right)_i}{2}\right\},$$

где $a_{nl}=\sqrt{n+1/2}\,P_n\left(x_l\right)$, $b_{nl}=\sqrt{n+1/2}\,P_n'\left(x_l\right)$, $\left[\left(Z_1\right)_{i+1/2}\right]_l=\left(1+\frac{hx_l}{2}\left(k_1\right)_{i+1/2}\right)$, $\left[\left(Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l=\left(1+\frac{hx_l}{2}\left(k_2\right)_{i+1/2}\right)$, $\left(k_1\right)_{i+1/2}=\frac{\left(k_1\right)_{i+1}+\left(k_1\right)_i}{2}$, $\left(k_2\right)_{i+1/2}=\frac{\left(k_2\right)_{i+1}+\left(k_2\right)_i}{2}$, причем x_l $\left(l=\overline{1,K}\right)$ являются корнями полинома Лежандра $P_k\left(x\right)$.

Для вычисления усилий и моментов различных порядков применяем квадратурную формулу Гаусса [33]. В результате получим следующие выражения:

$$\left(N_{11}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{11}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_lW_l;$$

$$\left(N_{22}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{22}Z_1\right)_{i+1/2}\right]_lW_l;$$

$$\left(M_{11}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{11}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_lx_lW_l;$$

$$\left(M_{22}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{22}Z_1\right)_{i+1/2}\right]_l x_l W_l;$$

$$\left(Q_1\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{13}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l W_l;$$

$$\left(Q_{13}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{13}Z_1Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l W_l;$$

$$\left(Q_{33}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{33}Z_1Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l W_l; \tag{2.16}$$

$$\left(M_{13}\right)_{i+1/2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{13}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l x_l W_l;$$

$$\left(M_{11}^{n}\right)_{i+1/2}=\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{11}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l a_{nl} W_l;$$

$$\left(M_{22}^{n}\right)_{i+1/2}=\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{22}Z_1\right)_{i+1/2}\right]_l a_{nl} W_l;$$

$$\left(M_{33}^{n}\right)_{i+1/2}=\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{33}Z_1Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l b_{nl} W_l;$$

$$\left(M_{13}^{n}\right)_{i+1/2}=\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{13}Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l a_{nl} W_l;$$

$$\left(M_{13}^{\prime n}\right)_{i+1/2}=\frac{h}{2}\sum_{l=1}^{K}\left[\left(\sigma_{13}Z_1Z_2\right)_{i+1/2}\right]_l b_{nl} W_l\ ,$$

где $W_l=\dfrac{2}{\left(1-x_l^2\right)\left[P_k'\left(x_l\right)\right]^2}$ – весовые множители в формуле Гаусса.

При принятой аппроксимации перемещения будут непрерывно меняться вдоль образующей оболочки, а деформации и напряжения – разрывны.

Используя введенные аппроксимации, заменим интегрирование в вариационном уравнении (2.8) вдоль образующей срединной поверхности оболочки суммированием виртуальных работ по всем дискретным элементам. В результате получим вариационное уравнение дискретной системы:

$$\sum_{i=0}^{M-1}\left\{\left(N_{11}\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_1^0\right)_{i+1}-\left(\delta u_1^0\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+\left[\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\cdot\frac{r_{i+1}-r_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}\cdot\left(N_{22}\right)_{i+1/2}-\right.\right.$$

$$-\left(k_1 Q_1\right)_{i+1/2}\Big]\cdot\frac{\left(\delta u_1^0\right)_{i+1}+\left(\delta u_1^0\right)_i}{2}+\left(Q_1\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_3^0\right)_{i+1}-\left(\delta u_3^0\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+$$

$$+\Big[\left(k_1 N_{11}\right)_{i+1/2}+\left(k_2 N_{22}\right)_{i+1/2}\Big]\cdot\frac{\left(\delta u_3^0\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^0\right)_i}{2}+\left(M_{11}\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_1^1\right)_{i+1}-\left(\delta u_1^1\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+$$

$$+\left[\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\cdot\frac{r_{i+1}-r_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}\cdot\left(M_{22}\right)_{i+1/2}+\left(Q_{13}\right)_{i+1/2}-\left(k_1 M_{13}\right)_{i+1/2}\right]\cdot\frac{\left(\delta u_1^1\right)_{i+1}+\left(\delta u_1^1\right)_i}{2}+$$

$$+\left(M_{13}\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_3^1\right)_{i+1}-\left(\delta u_3^1\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+\Big[\left(k_1 M_{11}\right)_{i+1/2}+\left(k_2 M_{22}\right)_{i+1/2}+$$

$$+\left(Q_{33}\right)_{i+1/2}\Big]\cdot\frac{\left(\delta u_3^1\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^1\right)_i}{2}+\sum_{n=2}^{N}\left(M_{11}^n\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_1^n\right)_{i+1}-\left(\delta u_1^n\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{2}{r_{i+1}+r_i}\cdot\frac{r_{i+1}-r_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}\cdot\left(M_{22}^n\right)_{i+1/2}-\left(k_1 M_{13}^n\right)_{i+1/2}+\left(M_{13}'^n\right)_{i+1/2}\right]\cdot\frac{\left(\delta u_1^n\right)_{i+1}+\left(\delta u_1^n\right)_i}{2}+$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\left(M_{13}^n\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_3^n\right)_{i+1}-\left(\delta u_3^n\right)_i}{\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}}+\sum_{n=2}^{N}\Big[\left(k_1 M_{11}^n\right)_{i+1/2}+\left(k_2 M_{22}^n\right)_{i+1/2}+ \qquad (2.17)$$

$$+\left(M_{33}^n\right)_{i+1/2}\Big]\cdot\frac{\left(\delta u_3^n\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^n\right)_i}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{N}\Big[\left(A_n^m u_1^m\delta u_1^n\right)_{i+1}+\left(A_n^m u_1^m\delta u_1^n\right)_i\Big]\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{m=0}^{N}\Big[\left(A_n^m u_3^m\delta u_3^n\right)_{i+1}+\left(A_n^m u_3^m\delta u_3^n\right)_i\Big]\right)-\left(F_3^0\right)_{i+1/2}\frac{\left(\delta u_3^0\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^0\right)_i}{2}-$$

$$-\left(F_3^1\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_3^1\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^1\right)_i}{2}-\sum_{n=2}^{N}\left(F_3^n\right)_{i+1/2}\cdot\frac{\left(\delta u_3^n\right)_{i+1}+\left(\delta u_3^n\right)_i}{2}\Bigg\}r_{i+1/2}\left(\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+$$

$$+\left(rN_1^0\delta u_1^0\right)_{i=0}-\left(rN_1^0\delta u_1^0\right)_{i=M}+\left(rN_3^0\delta u_3^0\right)_{i=0}-\left(rN_3^0\delta u_3^0\right)_{i=M}+\left(rM_1^0\delta u_1^1\right)_{i=0}-$$

$$-\left(rM_1^0\delta u_1^1\right)_{i=M}+\left(rM_3^0\delta u_3^1\right)_{i=0}-\left(rM_3^0\delta u_3^1\right)_{i=M}+\sum_{n=2}^{N}\Big[\left(rM_1^n\delta u_1^n\right)_{i=0}-\left(rM_1^n\delta u_1^n\right)_{i=M}\Big]+$$

$$+\sum_{n=2}^{N}\Big[\left(rM_3^n\delta u_3^n\right)_{i=0}-\left(rM_3^n\delta u_3^n\right)_{i=M}\Big]=0.$$

Собирая в (2.17) коэффициенты при вариациях $\left(\delta u_1^n\right)_i$ и $\left(\delta u_3^n\right)_i$ (для которых $\left(\delta u_1^n\right)_i\neq 0$, $\left(\delta u_3^n\right)_i\neq 0$), придем, в силу их произвольности, к системам линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных ускорений для каждого узла дискретной системы:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_0^m\ddot{u}_1^m\right)_i=\left(N_{11}r\right)_{i+1/2}-\left(N_{11}r\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{r_{i+1}-r_i}{2}\left(N_{22}\right)_{i+1/2}-\frac{r_i-r_{i-1}}{2}\left(N_{22}\right)_{i-1/2}+\frac{1}{2}\left[\left(k_1Q_1r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1Q_1r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right];\\
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_1^m\ddot{u}_1^m\right)_i=\left(M_{11}r\right)_{i+1/2}-\left(M_{11}r\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{r_{i+1}-r_i}{2}\left(M_{22}\right)_{i+1/2}-\frac{r_i-r_{i-1}}{2}\left(M_{22}\right)_{i-1/2}+\frac{1}{2}\left[\left(k_1M_{13}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1M_{13}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(Q_{13}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(Q_{13}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right];\\
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_n^m\ddot{u}_1^m\right)_i=\left(M_{11}^nr\right)_{i+1/2}-\left(M_{11}^nr\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{r_{i+1}-r_i}{2}\left(M_{22}^n\right)_{i+1/2}-\frac{r_i-r_{i-1}}{2}\left(M_{22}^n\right)_{i-1/2}+\frac{1}{2}\left[\left(k_1M_{13}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1M_{13}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(M_{13}'^nr\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(M_{13}'^nr\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]; \qquad\qquad (2.18)\\
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_0^n\ddot{u}_3^m\right)_i=\left(Q_1r\right)_{i+1/2}-\left(Q_1r\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(k_1N_{11}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1N_{11}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\frac{1}{2}\left[\left(k_2N_{22}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_2N_{22}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left[\left(F_3^0r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(F_3^0r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right];\\
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_1^n\ddot{u}_3^m\right)_i=\left(M_{13}r\right)_{i+1/2}-\left(M_{13}r\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(k_1M_{11}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1M_{11}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\frac{1}{2}\left[\left(k_2M_{22}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_2M_{22}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(Q_{33}r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(Q_{33}r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]+\frac{1}{2}\left[\left(F_3^1r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(F_3^1r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right];\\
&\frac{1}{2}\left[\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_n^m\ddot{u}_3^m\right)_i=\left(M_{13}^nr\right)_{i+1/2}-\left(M_{13}^nr\right)_{i-1/2}-\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(k_1M_{11}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_1M_{11}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-\frac{1}{2}\left[\left(k_2M_{22}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i+1/2}+\left(k_2M_{22}^nr\Delta\alpha_1\right)_{i-1/2}\right]-
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\Big[\big(M_{33}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{i+1/2}+\big(M_{33}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{i-1/2}\Big]+\frac{1}{2}\Big[\big(F_3^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{i+1/2}+\big(F_3^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{i-1/2}\Big],$$

для $i=\overline{1,M-1}$; $n=\overline{2,N}$.

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_0^m\ddot{u}_1^m\right)_0=(N_{11}r)_{1/2}-\frac{r_1-r_0}{2}(N_{22})_{1/2}+\frac{1}{2}(k_1Q_1r\Delta\alpha_1)_{1/2}-\big(N_1^0r\big)_0;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_1^m\ddot{u}_1^m\right)_0=(M_{11}r)_{1/2}-\frac{r_1-r_0}{2}(M_{22})_{1/2}+\frac{1}{2}(k_1M_{13}r\Delta\alpha_1)_{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2}(Q_{13}r\Delta\alpha_1)_{1/2}-\big(M_1^0r\big)_0;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_n^m\ddot{u}_1^m\right)_0=\big(M_{11}^{n}r\big)_{1/2}-\frac{r_1-r_0}{2}\big(M_{22}^{n}r\big)_{1/2}+\frac{1}{2}\big(k_1M_{13}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\big(M_{13}'^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-\big(M_1^nr\big)_0; \qquad (2.19)$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_0^n\ddot{u}_3^m\right)_0=(Q_1r)_{1/2}-\frac{1}{2}(k_1N_{11}r\Delta\alpha_1)_{1/2}-\frac{1}{2}(k_2N_{22}r\Delta\alpha_1)_{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}\big(F_3^0r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-\big(N_3^0r\big)_0;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_1^n\ddot{u}_3^m\right)_0=(M_{13}r)_{1/2}-\frac{1}{2}(k_1M_{11}r\Delta\alpha_1)_{1/2}-\frac{1}{2}(k_2M_{22}r\Delta\alpha_1)_{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2}(Q_{33}r\Delta\alpha_1)_{1/2}+\frac{1}{2}\big(F_3^1r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-\big(M_3^0r\big)_0;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_n^m\ddot{u}_3^m\right)_0=\big(M_{13}^{n}r\big)_{1/2}-\frac{1}{2}\big(k_1M_{11}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-\frac{1}{2}\big(k_2M_{22}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2}\big(M_{33}^{n}r\Delta\alpha_1\big)_{1/2}+\frac{1}{2}\big(F_3^nr\Delta\alpha_1\big)_{1/2}-\big(M_3^nr\big)_0,$$

для $i=0$; $n=\overline{2,N}$.

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_0^m\ddot{u}_1^m\right)_M=-(N_{11}r)_{M-1/2}-\frac{r_M-r_{M-1}}{2}(N_{22})_{M-1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}(k_1Q_1r\Delta\alpha_1)_{M-1/2}+\big(N_1^0r\big)_M;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2}\cdot\left(\sum_{m=0}^{N}A_1^m\ddot{u}_1^m\right)_M=-(M_{11}r)_{M-1/2}-\frac{r_M-r_{M-1}}{2}(M_{22})_{M-1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}(k_1 M_{13} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} - \frac{1}{2}(Q_{13} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} + \left(M_1^0 r\right)_M;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} \cdot \left(\sum_{m=0}^{N} A_n^m \ddot{u}_1^m\right)_M = -\left(M_{11}^n r\right)_{M-1/2} - \frac{r_M - r_{M-1}}{2}\left(M_{22}^n\right)_{M-1/2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(k_1 M_{13}^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} - \frac{1}{2}\left(M_{13}'^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} + \left(M_1^n r\right)_M; \qquad (2.20)$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} \cdot \left(\sum_{m=0}^{N} A_0^n \ddot{u}_3^m\right)_M = -(Q_1 r)_{M-1/2} - \frac{1}{2}(k_1 N_{11} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} -$$

$$-\frac{1}{2}(k_2 N_{22} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^0 r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} + \left(N_3^0 r\right)_M;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} \cdot \left(\sum_{m=0}^{N} A_1^n \ddot{u}_3^m\right)_M = -(M_{13} r)_{M-1/2} - \frac{1}{2}(k_1 M_{11} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} -$$

$$-\frac{1}{2}(k_2 M_{22} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} - \frac{1}{2}(Q_{33} r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^1 r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} + \left(M_3^0 r\right)_M;$$

$$\frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{M-1/2} \cdot \left(\sum_{m=0}^{N} A_n^m \ddot{u}_3^m\right)_M = -\left(M_{13}^n r\right)_{M-1/2} - \frac{1}{2}\left(k_1 M_{11}^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(k_2 M_{22}^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} - \frac{1}{2}\left(M_{33}^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^n r\Delta\alpha_1\right)_{M-1/2} + \left(M_3^n r\right)_M;$$

для $i = M$; $n = \overline{2, N}$.

Полученная полудискретная система по структуре совпадает с исходной системой уравнений движения (2.9), и может быть представлена более компактно в следующем виде:

$$\left(\sum_{m=0}^{N} B_n^m \ddot{u}_j^m\right)_i = \left(F_{u_j}^n\right)_i, \ \left(i = \overline{0, M}; n = \overline{0, N};\ j = 1,3\right). \qquad (2.21)$$

Здесь $\left(F_{u_j}^n\right)_i = \left(F_{u_j}^n\right)_{i+1/2}^{+} + \left(F_{u_j}^n\right)_{i-1/2}^{-}$ – представляют собой обобщенные силы, действующие на расчетный узел i; $\left(B_n^m\right)_i = \left(B_n^m\right)_{i+1/2}^{+} + \left(B_n^m\right)_{i-1/2}^{-}$ – массы и моменты инерции полуячеек $\frac{(\Delta\alpha_1)_{i-1/2}}{2}$, $\frac{(\Delta\alpha_1)_{i+1/2}}{2}$ дискретной системы, относящихся к i – ому узлу сетки;

$$\left(B_n^m\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \left(B_n^m\right)_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2}(r\Delta\alpha_1)_{i\pm 1/2} \cdot A_n^m;$$

$$\left(F_{u_1}^0\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(N_{11} r\right)_{i\pm 1/2} \pm \frac{r_i - r_{i\pm 1}}{2}\left(N_{22}\right)_{i\pm 1/2} + \frac{k_1}{2}\left(Q_1 r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2};$$

$$\left(F_{u_1}^1\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(M_{11} r\right)_{i\pm 1/2} \pm \frac{r_i - r_{i\pm 1}}{2}\left(M_{22}\right)_{i\pm 1/2} + \frac{k_1}{2}\left(M_{13} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} - \frac{1}{2}\left(Q_{13} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2};$$

$$\left(F_{u_1}^n\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(M_{11}^n r\right)_{i\pm 1/2} \pm \frac{r_i - r_{i\pm 1}}{2}\left(M_{22}^n\right)_{i\pm 1/2} + \frac{k_1}{2}\left(M_{13}^n r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} - \frac{1}{2}\left(M_{13}'^{n} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2};$$

$$\left(F_{u_3}^0\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(Q_1 r\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_1}{2}\left(N_{11} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_2}{2}\left(N_{22} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^0 r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2};$$

$$\left(F_{u_3}^1\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(M_{13} r\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_1}{2}\left(M_{11} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_2}{2}\left(M_{22} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(Q_{33} r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^1 r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2};$$

$$\left(F_{u_3}^n\right)_{i\pm 1/2}^{\pm} = \pm\left(M_{13}^n r\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_1}{2}\left(M_{11}^n r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} - \frac{k_2}{2}\left(M_{22}^n r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(M_{33}^n r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} + \frac{1}{2}\left(F_3^n r \Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2}; \ \left(n = \overline{2, N}; m = \overline{0, N};\ i = \overline{1, M-1}\right).$$

$\left(B_n^m\right)_{i\pm 1/2}^{\pm}$ и $\left(F_{u_j}^n\right)_{i\pm 1/2}^{\pm}$ представляют соответственно односторонние вклады ячеек, расположенных справа (индекс +) и слева (индекс -) от рассматриваемого узла i.

Аналогично можно записать коэффициенты и правые части полудискретной системы (2.21) для граничных узлов $i = 0, M$:

$$\left(B_n^m\right)_i = \frac{1}{2}\left(r\Delta\alpha_1\right)_{i\pm 1/2} A_n^m;$$

$$\left(F_{u_j}^0\right)_i = \left(F_{u_j}^0\right)_{i\pm 1/2} + \left(F_{u_j}^{*0}\right)_i;$$

$$\left(F_{u_j}^1\right)_i = \left(F_{u_j}^1\right)_{i\pm 1/2} + \left(F_{u_j}^{*1}\right)_i;$$

$$\left(F_{u_j}^n\right)_i = \left(F_{u_j}^n\right)_{i\pm 1/2} + \left(F_{u_j}^{*n}\right)_i, \ \left(i = 0, M;\ j = 1{,}3; n = \overline{2, N}\right).$$

$\left(F_{u_j}^{*0}\right)_i = \mp\left(N_j^0 r\right)_i$; $\left(F_{u_j}^{*1}\right)_i = \mp\left(M_j^0 r\right)_i$; $\left(F_{u_j}^{*n}\right)_i = \mp\left(M_j^n r\right)_i$; $\left(B_n^m\right)_i$ – массы и моменты инерции равны соответственно половинным массам и моментам инерции контурных ячеек дискретной модели.

Разрешая (2.9) относительно обобщенных ускорений $\ddot{u}_j^m$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени для каждого узла расчетной области:

$$\left(\ddot{u}_j^n\right)_i = \left(\overline{F}_{u_j}^n\right)_i, \ i = \overline{0,M}, \ j = 1,3, \ n = \overline{0,N}. \tag{2.22}$$

Для интегрирования (2.22) применяется явная конечно-разностная схема типа «крест» [30, 32]. В результате решение системы (2.22) сводится к рекуррентному счету по формулам:

$$\left(\dot{u}_j^n\right)^{k+1/2} = \left(\dot{u}_j^n\right)^{k-1/2} + \overline{F}_{u_j}^n \cdot \Delta t; \tag{2.23}$$

$$\left(\dot{u}_j^n\right)^{k+1} = \left(\dot{u}_j^n\right)^{k} + \left(\dot{u}_j^n\right)^{k+1/2} \cdot \Delta t,$$

где $j = 1,3$; $n = \overline{0,N}$; $k = \overline{0,\infty}$.

Таким образом, процесс интегрирования заменяется последовательным пересчетом искомых переменных с предыдущего временного слоя на последующий слой. Значения переменных с предыдущего слоя выступают при этом как начальные условия. Для первого шага начальные условия должны быть заданы.

Рассматриваемая схема является условно устойчивой [32], т.е. устойчивой при соблюдении некоторых ограничений на шаг по времени. Величина шага по времени ограничена также условием точности. Однако, для явных схем, какой является схема типа «крест», условие устойчивости накладывает, как правило, более жесткие ограничения на величину максимально допустимого шага по времени по сравнению с условием точности.

Шаг интегрирования по времени определяется на основе спектрального признака Неймана [33], который приводит к условию [30]:

$$\Delta t \le \begin{cases} \min\left(\Delta\alpha_1 / c_1, \Delta\alpha_1 / c_2 \right), \textit{если} \ \min \Delta\alpha_1 \le h / \sqrt{c_N} \\ \min\left(h / c_1\sqrt{c_N}, h / c_2\sqrt{c_N} \right), \textit{если} \ \min \Delta\alpha_1 > h / \sqrt{c_N}, \end{cases} \tag{2.24}$$

где $\Delta\alpha_1$ - шаг дискретизации по образующей срединной поверхности оболочки,

$$c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho(1 - \nu_{12}\nu_{21})}}, \ \left(i = \overline{1,2}\right);$$

$$c_N = \sum_{k=0}\sum_{m=0}(2N - 4k - 4n - 1)^2, 2N - 1 > 4(k + n).$$

Построение конечно-разностного аналога соотношений, описывающих процесс нестационарного деформирования вязкоупругих тонкостенных оболочек вращения, осуществляется аналогично вышеизложенному.

2.3. Алгоритм решения начально-краевых задач вязкоупругого деформирования композитных оболочек вращения

Алгоритм решения задач динамического деформирования вязкоупругих композитных оболочек вращения при импульсном нагружении состоит в следующем.

Процесс вычислений разделяется на два этапа: вспомогательный и основной.

Вспомогательный этап заключается в задании, вычислении и записи в базу данных вспомогательной информации, остающейся неизменной в процессе решения системы сеточных уравнений.

Основной этап состоит в непосредственном интегрировании систем сеточных уравнений и вычислении необходимой информации, изменяющейся на каждом временном шаге и формировании на ее основе базы данных решения задачи.

Остановимся более подробно на основных моментах реализации алгоритма.

Вспомогательный этап вычислений.

1. Вводится информация о кинематической модели деформирования оболочки вращения.
2. Вводится управляющая информация по записи результатов решения задачи в файл результатов.
3. Вводится информация, характеризующая геометрию оболочки вращения, физико-механические характеристики материала, граничные и начальные условия, вид нагружения, разностную сетку и ряд других параметров.
4. Вычисляются координаты узлов основной сетки, коэффициенты Ламе, кривизны; производится кодировка ячеек основной и промежуточной сетки.

5. Задаются списки граничных узлов расчетной области; кодируется тип граничного условия для каждого узла; задаются статические (усилия, моменты) или кинематические (перемещения и др.) характеристики для граничных узлов.
6. Задается внешняя или внутренняя нагрузка по пространству и времени.
7. Вычисляются коэффициенты операторов численного дифференцирования, значения параметров Ламе и производных от них, подсчитываются длины ячеек основной и промежуточной сеток, определяются массы и моменты инерции ячеек.
8. Из условия устойчивости разностной схемы вычисляется шаг интегрирования по времени.
9. Задаются начальные условия.
10. Осуществляется запись начальной базы данных решения начально-краевой задачи.

Основной этап вычислений.

1. Вводится управляющая информация о задаче, считывается информация из начальной базы данных решения.
2. Для момента времени t^k определяются параметры нагрузки и формируются правые части системы уравнений (2.21).
3. Система (2.21) решается относительно обобщенных ускорений.
4. По рекуррентным формулам (2.23) определяются перемещения в узлах основной сетки на следующем временном слое.
5. В соответствии с (2.15) в узлах смещенной сетки вычисляются деформации.
6. Реализуются физические соотношения (2.5), и на их основе определяются усилия и моменты.
7. Вычисляются интегральные характеристики напряженного состояния (2.16).

При переходе к t^{k+1} временному слою процесс вычислений повторяется с пункта 2 основного этапа вычислений.

Глава 3. Метод численного решения задач идентификации вязкоупругих характеристик композитных материалов в динамически нагруженных оболочках вращения

Предлагается численный метод идентификации механических характеристик и параметров моделей определяющих соотношений композитных материалов, основанный на минимизации рассогласования экспериментальных данных и результатов численного моделирования нестационарных процессов деформации оболочек вращения, изготовленных из исследуемых материалов.

Данный подход разбивается на три самостоятельных этапа: решение начально-краевой задачи динамического вязкоупругого деформирования композитных оболочек вращения; анализ чувствительности целевой функции по проектным переменным; поиск глобального минимума целевой функции квадратичной невязки экспериментальных и теоретических результатов.

Приводится алгоритм и краткое описание программного кода решения задач идентификации жесткостных и реологических характеристик композитных материалов.

3.1. Методика решения задач идентификации параметров моделей вязкоупругого динамического деформирования композитных оболочек вращения

Ниже рассматривается численная методика решения задач идентификации механических вязкоупругих характеристик композитных материалов при импульсных нагружениях оболочек вращения, выполненных из исследуемых материалов.

Требуется найти набор параметров (вектор) определяющих соотношений (2.5):

$$\overline{E} = \left(e_1, \ldots, e_r\right)^T = \left(E_{11}^0, E_{11}^\infty, E_{22}^0, E_{22}^\infty, E_{33}^0, E_{33}^\infty, G_{13}^0, G_{13}^\infty, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \beta_1, \ldots, \beta_N\right)^T, \quad (3.1)$$

при которых математическая модель (2.2)–(2.5), (2.9)–(2.11), описывающая динамическое поведение вязкоупругих оболочек вращения, наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. Здесь под параметрами понимаются мгновенные и длительные модули упругости и сдвига, коэффициенты Пуассона, времена релаксации и другие характеристики.

Идентифицируемые параметры материала выражаются через безразмерные величины:

$$e_j = \frac{x_j - e_j^-}{e_j^+ - e_j^-}, \ \left(j = \overline{1,r}\right), \tag{3.2}$$

где e_j^-, e_j^+ – верхние и нижние ограничения на параметры идентификации (выбираются различными для каждого параметра идентификации x_j).

Обратные зависимости имеют вид:

$$x_j = e_j^- + e_j \cdot \left(e_j^+ - e_j^-\right), \ \left(j = \overline{1,r}\right), \tag{3.3}$$

Искомые параметры e_j $\left(j = \overline{1,r}\right)$ могут быть найдены посредством процедуры идентификации с использованием экспериментальной информации о работе элемента конструкции. Предлагается следующая методика их определения. Пусть получена информация о динамическом поведении композитной оболочки вращения в виде временных зависимостей перемещений и (или) деформаций на ее поверхностях. Считаем, что имеются соответствующие тензограммы перемещений и (или) деформаций, полученные в результате экспериментальных испытаний. Поскольку расчетные и экспериментальные перемещения и (или) деформации являются затухающими условно моногармоническими колебаниями, то можно определить максимальные и минимальные значения расчетных u_i^m, e_{ii}^m и экспериментальных u_i^{*m}, e_{ii}^{*m} перемещений и (или) деформаций, а также соответствующие моменты времени t_i^m, τ_i^m и t_i^{*m}, τ_i^{*m} $\left(m = \overline{1,M}\right)$, в которые они достигаются.

Далее задача сводится к нахождению вектора коэффициентов физических уравнений, обеспечивающего в выбранной норме минимальное расстояние между расчетными и экспериментальными данными. В качестве нормы выбирается функционал, представляющий сумму среднеквадратичных отклонений характерных значений расчетных и экспериментальных перемещений и (или) деформаций:

$$F\left(\overline{E}\right) = \sum_{m=1}^{M} \int_S \left[\sum_{i=1,3} \left(a_i \left(u_i^m - u_i^{*m}\right)^2 + b_i \left(t_i^m - t_i^{*m}\right)^2 \right) + \sum_{i=1,2} \left(c_i \left(e_{ii}^m - e_{ii}^{*m}\right)^2 + d_i \left(\tau_i^m - \tau_i^{*m}\right)^2 \right) \right] dS, \tag{3.4}$$

где S – область занимаемая оболочкой, a_i, b_i, c_i, d_i – весовые коэффициенты.

Так как экспериментальная информация о полях перемещений и (или) деформаций задается в отдельных точках конструкции, поэтому задача поиска минимума функционала сводится к глобальной минимизации функции нескольких переменных:

$$C\left(\overline{E}\right)=\sum_{k=1}^{K}\left\{\left[\sum_{m=1}^{M}\left[\sum_{i=1,3}\left(a_i\left(u_i^m-u_i^{*m}\right)^2+b_i\left(t_i^m-t_i^{*m}\right)^2\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\sum_{i=1,2}\left(c_i\left(e_{ii}^m-e_{ii}^{*m}\right)^2+d_i\left(\tau_i^m-\tau_i^{*m}\right)^2\right)\right]\right]\right\}_k, \tag{3.5}$$

где K – число точек, в которых определяются экспериментальные значения перемещений и (или) деформаций.

Для оценки возможности определения параметров определяющих соотношений в конкретной задаче необходимо провести анализ чувствительности целевой функции по переменным проектирования. Это исследование базируется на теории глобальных показателей чувствительности для изучения нелинейных математических моделей [16].

Глобальный анализ чувствительности, в отличие от традиционного анализа чувствительности [34], который можно назвать локальным, позволяет проанализировать поведение целевой функции (3.5) во всей области допустимых значений проектных переменных, изучить и количественно оценить влияние отдельных проектных переменных и их групп и, наконец выделить существенные и несущественные проектные переменные.

Глобальными показателями чувствительности порядка s для функции $C\left(\overline{E}\right)$, где $\overline{E}=\left(e_1, e_2, \ldots, e_r\right)^T$, называются числа:

$$S_{i_1 \ldots i_s}=\frac{D_{i_1 \ldots i_s}}{D}, \tag{3.6}$$

где $D_{i_1 \ldots i_s}$ и D – величины дисперсий определяемые по формулам:

$$D_{i_1 \ldots i_s}=\int_0^1 C_{i_1, \ldots, i_s}^2 de_{i_1} \ldots de_{i_s};$$

$$D=\int_0^1 C^2\left(\overline{E}\right)d\overline{E}-C_0^2; \tag{3.7}$$

$$C_0 = \int_0^1 C(\overline{E})d\overline{E},$$

$1 \le i_1,...,i_s \le r$ – произвольная группа различных индексов, $1 \le s \le r$.

Чаще всего используются одномерные показатели чувствительности S_i. С их помощью ранжируют переменные e_i: чем больше S_i, тем более влиятельна переменная e_i. Для полного учета влияния e_i следует использовать полные глобальные показатели S_i^{tot}.

Для определения глобальных показателей чувствительности функции $C(\overline{E})$ многих переменных $\overline{E} = (e_1, ..., e_r)^T$ выделяют группу переменных $Y = (e_1,...,e_m)$, включающую $1 \le m \le r-1$ параметров, а остальные $r-m$ переменных выделяют в другую группу $Z = (e_{(m+1)},...,e_r)$. Таким образом, $\overline{E} = (Y, Z)$.

Для множества Y вводится два типа глобальных показателей чувствительности:

$$S_y = \sum S_{i_1,...,i_s}, \tag{3.8}$$

где сумма берется по всем группам $i_1,...,i_s$, в которых все $i_p \in M$, M – совокупность индексов $(1,..,m)$, $1 \le p \le s$, и

$$S_y^{tot} = \sum S_{i_1,...,i_s}, \tag{3.9}$$

где сумма берется по всем группам $i_1,...,i_s$ таким, что хотя бы один индекс $i_p \in M$.

Очевидно, что:

$$0 \le S_y \le S_y^{tot} \le 1. \tag{3.10}$$

Наиболее информативны крайние значения:

$S_y = S_y^{tot} = 1$ означает, что $C(\overline{E})$ зависит только от Y;

$S_y = S_y^{tot} = 0$ означает, что $C(\overline{E})$ зависит только от Z.

Показатели S_y, S_y^{tot}, S_z и S_z^{tot} вычисляются по формулам:

$$S_y = \frac{D_y}{D}; \qquad S_y^{tot} = \frac{D_y^{tot}}{D}; \tag{3.11}$$

$$S_z = \frac{D_z}{D}; \qquad S_z^{tot} = \frac{D_z^{tot}}{D}. \tag{3.12}$$

Дисперсии D_y, D_y^{tot}, D_z и D_z^{tot} вычисляются непосредственно по значениям функции $C(\overline{E})$:

$$D_y = \int_0^1 C(\overline{E})C(Y, Z')dEdZ' - C_0^2; \tag{3.13}$$

$$D_y^{tot} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[C(\overline{E}) - C(Y', Z)\right]^2 dEdY'; \tag{3.14}$$

$$D_z = \int_0^1 C(\overline{E})C(Y', Z)dEdY' - C_0^2; \tag{3.15}$$

$$D = D_y^{tot} + D_z; \tag{3.16}$$

$$D_z^{tot} = D - D_y, \tag{3.17}$$

где $\overline{E} = (Y, Z)$ и $\overline{E'} = (Y', Z')$ – две независимые, равномерно распределенные случайные точки.

Для расчета показателей чувствительности приходится вычислять интегралы высокой кратности. Для их вычисления целесообразно использовать методы Монте-Карло [35], поскольку такой подход легко реализуем, и дает достаточно надежные результаты.

После анализа чувствительности и выделения существенных проектных переменных, предлагаемая постановка рассматриваемой проблемы сводится к классической задаче нелинейного математического программирования: требуется найти значения компонент вектора управляемых параметров $\overline{E} = (e_1, ..., e_r)^T$, которым соответствует глобальное минимальное значение целевой функции

$$C(E^*) = \min C(\overline{E}), \tag{3.18}$$

в области допустимых значений

$$A = \{\overline{E} : f(\overline{E}) \le 1, \overline{E} \in B\}, \tag{3.19}$$

принадлежащей области поиска

$$B = \{\overline{E} : e_j^- \le e_j \le e_j^+, j = \overline{1, r}\}. \tag{3.20}$$

Здесь в качестве ограничений равенств используются уравнения начально-краевой задачи, а границы области поиска следуют из общих физических принципов и экспериментальных фактов [36].

3.2. Методы минимизации целевой функции для решения задач идентификации

Успешное решение сформулированной задачи нелинейного программирования во многом зависит от правильного выбора метода оптимизации. Однако ни один из известных методов нельзя считать универсальным средством для решения любых задач условной оптимизации. В данном случае при выборе метода оптимизации целевой функции многих переменных необходимо учитывать ряд факторов: большие вычислительные затраты при формировании целевой функции, многоэкстремальный характер целевой функции, сложность вычисления ее градиентов и чувствительность методов оптимизации к погрешностям экспериментальных измерений перемещений и (или) деформаций. В подобных задачах чаще всего используются прямые поисковые методы, хотя они и не обладают высокой скоростью сходимости, но отличаются большой надежностью, что не менее важно в условиях ограниченности информации относительно характера задачи. Кроме того, в отличие от градиентных методов, методы прямого поиска не используют каких-либо предположений о гладкости минимизируемой функции, а при поиске минимума эти методы измеряют только значения функции.

Наиболее популярными методами прямого поиска являются: метод сеточного поиска Хука-Дживса, метод симплексного поиска Нелдера-Мида, комплексный метод Бокса и др. [17, 34]. Метод Хука-Дживса состоит из последовательности шагов исследующего поиск вокруг базисной точки, за которой в случае успеха следует поиск по образцу. Идея метода Нелдера-Мида состоит в сравнении значений функции в вершинах симплекса и перемещении симплекса в направлении оптимальной точки с помощью итерационной процедуры. Метод Бокса, по существу, является модификацией симплексного метода Нелдера-Мида, однако позволяет учитывать ограничения.

Следует отметить, что у методов прямого поиска есть и недостатки. Прямой поиск обычно приводит в точку локального минимума. Однако, произведя достаточное число запусков алгоритма из различных начальных точек, сформированных случайным образом и хорошо покрывающих область ограничений, достигается сходимость к глобальному минимуму, что подтверждается расчетной практикой.

Близкой к указанной проблеме является формулировка критерия остановки счета. Для градиентных методов, имеющих строгое математическое обоснование, можно вывести надежные критерии. Этого нельзя сделать для эвристических алгоритмов прямого поиска. В большинстве из них критерии остановки основаны только на текущих результатах счета. Вследствие этого остановка может произойти далеко от решения задачи, или, наоборот, может продолжаться бесполезный счет.

Для решения задачи глобальной оптимизации не существует универсального по эффективности алгоритма. Поэтому при разработке специфических методов глобальной оптимизации в первую очередь следует учитывать свойства целевой функции и допустимого множества рассматриваемых задач.

В выше сформулированной задаче нелинейного программирования в качестве целевой функции используется сумма среднеквадратического рассогласования расчетных и экспериментальных значений деформации. Параметрами оптимизации являются мгновенные и длительные модули упругости и сдвига, коэффициенты Пуассона, времена релаксации и другие характеристики. Рассматриваемая целевая функция имеет многоэкстремальный характер и большую размерность, поэтому для нахождения глобального минимума было разработано два подхода.

Первый подход основывается на использовании глобального анализа чувствительности и детерминированных прямых методов оптимизации. Вначале проводится оценка чувствительности целевой функции по оптимизируемым параметрам. Она сводится к нахождению кратных интегралов, которые вычисляются методом Монте-Карло [35] в узлах интегрирования генерируемых с помощью $ЛП_{\tau}$-последовательности [37]. Путем прямого перебора по точкам, из равномерно распределенной последовательности, определяется влияние отдельных переменных и их групп, выделяются существенные и не существенные переменные и выбирается решение, при котором целевая функция принимает минимальное значение. В результате параметры, к которым выявлена малая чувствительность, можно приближенно заменить их средними значениями и полагать в дальнейшем неизменными. Параметры, оказывающие существенное влияние на целевую функцию, следует оптимизировать методами прямого поиска. В качестве начального приближения нужно использовать решение, полученное при анализе чувствительности, при котором целевая функция принимает минимальное значение. Это позволяет повысить скорость сходимости метода и избежать попадания в локальные минимумы, что бывает при абсолютно случайном начальном приближении.

Второй подход основан на использовании синтеза методов адаптивного случайного поиска, который используется как основной (глобальный) метод оптимизации [38] и детерминированного метода Хука-Дживса, позволяющего выполнить дополнительное локальное уточнение глобального решения.

Основная идея адаптивного случайного поиска заключается в разбиение поиска на некоторое число шагов. На каждом шаге по определенному закону случайным образом выбираются значения вектора аргументов, и подсчитывается значение целевой функции. После каждого расчета закон, по которому выбираются значения вектора аргументов, изменяется таким образом, чтобы вероятность попадания в некоторую окрестность истинного минимума, задаваемую исходя из требуемой точности решения задачи, увеличилась. Для этого используется информация, полученная на предыдущих шагах поиска.

Многочисленные тестирования показали, что наиболее приемлемым для решения задачи оптимизации рассматриваемой целевой функции среднеквадратического рассогласования расчетных и экспериментальных значений деформаций оказался подход, основанный на использовании результатов глобального анализа чувствительности целевой функции с дальнейшим уточнением полученного начального приближения (для существенных параметров) прямыми методами оптимизации.

3.3. Алгоритм решения задач идентификации жесткостных и реологических характеристик композитных материалов в задачах динамики оболочек вращения

Алгоритм решения задач идентификации механических вязкоупругих характеристик композитных материалов в динамически нагруженных оболочках вращения состоит из двух самостоятельных этапов:

- анализа чувствительности целевой функции по проектным переменным;
- поиска глобального минимума целевой функции.

Алгоритм анализа чувствительности целевой функции по проектным переменным ориентирован на использование в многопроцессорных вычислительных системах и кластерных архитектурах. Параллелизм алгоритма реализуется через распределение независимых вычислений значений целевой функции (3.5). При этом на q процессорах одновременно вычисляются значения целевой функции для каждого случайного набора отдельных параметров (3.1).

Для распараллеливания алгоритма между процессорами используется стандартный интерфейс обмена данными MPI (Message Passing Interface) [39, 40]. Данный подход используется во всех современных мощных вычислительных комплексах, включающих от нескольких десятков до нескольких тысяч процессоров.

С точки зрения программиста, использующего MPI, существуют q вычислительных узлов, каждый из которых обладает собственным процессом, оперативной памятью, а также, возможно, дисковой памятью и периферией. Обмен информацией реализуется путем передачи сообщений, при этом любой узел может переслать сообщения любому другому. Один и тот же выполняемый файл загружается во все используемые вычислительные узлы, и создаются однотипные процессы (по типу «один поток команд – много потоков данных»).

Алгоритм параллельного вычисления показателей чувствительности состоит в следующем:

1. На начальном этапе каждый процессор имеет все необходимые данные для счета. Для этого на каждом процессоре задан файл данных, из которого будут считываться начальные значения для анализа чувствительности.

2. На нулевом процессоре определяется количество процессоров (q) и ранг (rq), т.е. свой уникальный номер каждого процессора в данном коммуникаторе.

3. Оценка чувствительности целевой функции сводится к задаче вычисления кратных интегралов (3.7), которые вычисляются методом Монте-Карло [35] в узлах интегрирования, генерируемых с помощью $ЛП_\tau$-последовательности. Как известно [37], $ЛП_\tau$-последовательности позволяют

генерировать точки с высокой степенью равномерности, располагающимися в M – мерном единичном кубе. На нулевом процессоре $(rq=0)$ с помощью $ЛП_{\tau}$-последовательности генерируются $2 \cdot r \cdot N$ чисел, где N – число независимых испытаний, r – число проектных переменных.

4. С помощью широковещательной рассылки с нулевого процессора $(rq=0)$ выполняется рассылка узлов интегрирования каждому процессору $(rq=\overline{1,q-1})$.

5. На каждом процессоре $(rq=\overline{0,q-1})$ испытание номер k, где $k=\overline{1,2 \cdot r \cdot N/q}$ начинается с выбора $2 \cdot r$ стандартных случайных чисел из полученного массива. Из этих чисел формируются две величины η_k и η_k', равномерно распределенные в m – мерном кубе и две величины ξ_k и ξ_k', равномерно распределенные в $(r-m)$ – мерном кубе. Затем целевая функция (3.5) определяется в трех точках: $C(\eta_k,\xi_k)$, $C(\eta_k,\xi_k')$ и $C(\eta_k',\xi_k)$, после чего вычисляются четыре оценки:

$$\varphi_k = C(\eta_k,\xi_k);$$

$$\varphi_k^2;$$

$$\psi_k = \varphi_k C(\eta_k,\xi_k');$$

$$\chi_k = \frac{1}{2}\left[\varphi_k - C(\eta_k',\xi_k)\right]^2,$$

6. После $\frac{N}{k}$ испытаний на каждом процессоре вычисленные оценки: $\sum_{k=1}^{\frac{N}{k}}\varphi_k$, $\sum_{k=1}^{\frac{N}{k}}\varphi_k^2$, $\sum_{k=1}^{\frac{N}{k}}\psi_k$, $\sum_{k=1}^{\frac{N}{k}}\chi_k$ суммируются и передаются нулевому процессору $(rg=0)$.

7. Нулевой процессор $(rg=0)$ собирает с каждого процессора суммарные результаты и вычисляет математическое ожидание C_0 (3.7), дисперсию D_y (3.13), дисперсию D_y^{tot} (3.14) и полную дисперсию D (3.16) от целевой функции по формулам:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k \to C_0;$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi_k^2 - C_0^2 \to D;$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\psi_k - C_0^2 \to D_y;$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\chi_k \to D_y^{tot}.$$

Затем глобальные показатели чувствительности S_y, S_y^{tot}, S_z и S_z^{tot} вычисляются по формулам (3.11)–(3.12).

Алгоритм реализован на языке Fortran. В вычислениях используется библиотека функций, предназначенная для поддержки работы параллельных процессов – MPI. Существует большое число функций MPI для пересылки данных [39, 40]. В программе, написанной на языке Fortran [41], эти функции вызываются как подпрограммы.

Полезным на практике свойством алгоритма является независимость результатов от количества используемых процессоров. Если расчет производится на одном компьютере, команды MPI не используются, и расчет полностью аналогичен расчетам на персональном компьютере.

Расчеты проводились на суперкомпьютере «Лобачевский», комплекс включает 100 вычислительных узлов, пиковая производительность 573 Tflops.

Для оценки качества распараллеливания используется очевидный подход – замерить ускорение, которое дает параллельная версия по отношению к последовательной версии. При этом для обеспечения равномерной загрузки процессоров естественно потребовать, чтобы количество расчетных шагов на всех процессорах было одинаковым.

На рис. 3.4 показано ускорение параллелизации для реализованного алгоритма вычисления показателей чувствительности при количестве независимых испытаний $N = 240$, $N = 4800$, пунктиром приведено идеальное ускорение.

Для определения ускорения использовалась формула:

$$S_q = \frac{T_1}{T_q},$$

где T_1 – время счета на одном процессоре; T_q – время счета на q процессорах.

Эффективностью параллельного алгоритма называется отношение его ускорения к числу процессоров:

$$E_q = \frac{S_q}{q}.$$

На рис. 3.2 показана достигнутая эффективность при количестве независимых испытаний $N = 240$, $N = 4800$.

Величина эффективности определяет среднюю долю времени выполнения параллельного алгоритма, в течение которого процессоры реально используются для решения задачи. Максимальное значение эффективности $E_q = 1$, но на практике это значение меньше из-за затрат на обмен данными между процессорами.

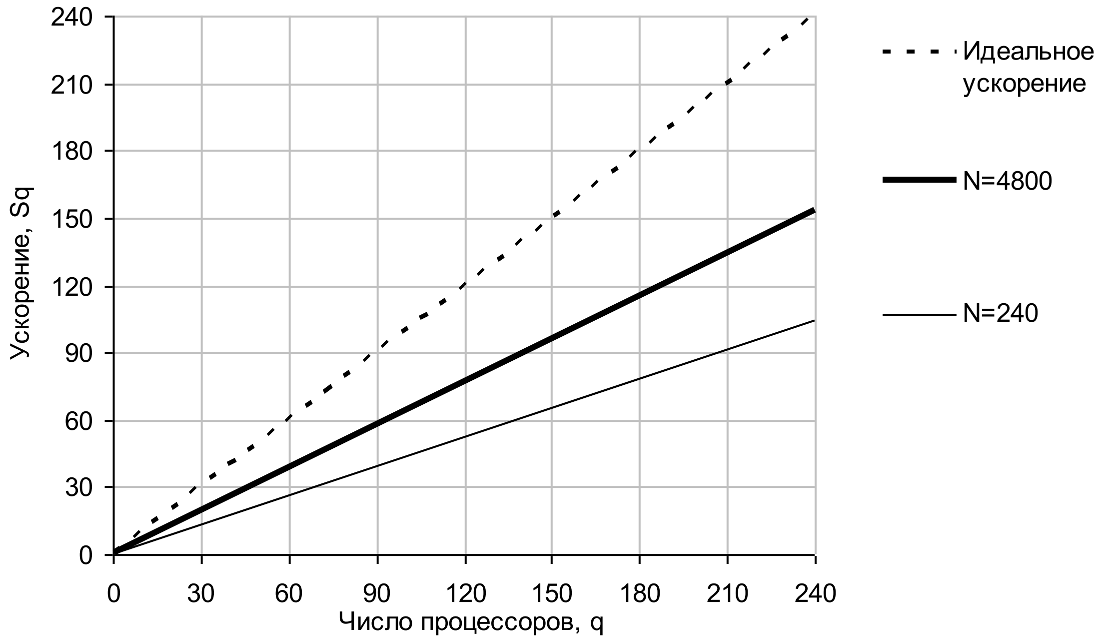


Рис. 3.1

Ускорение

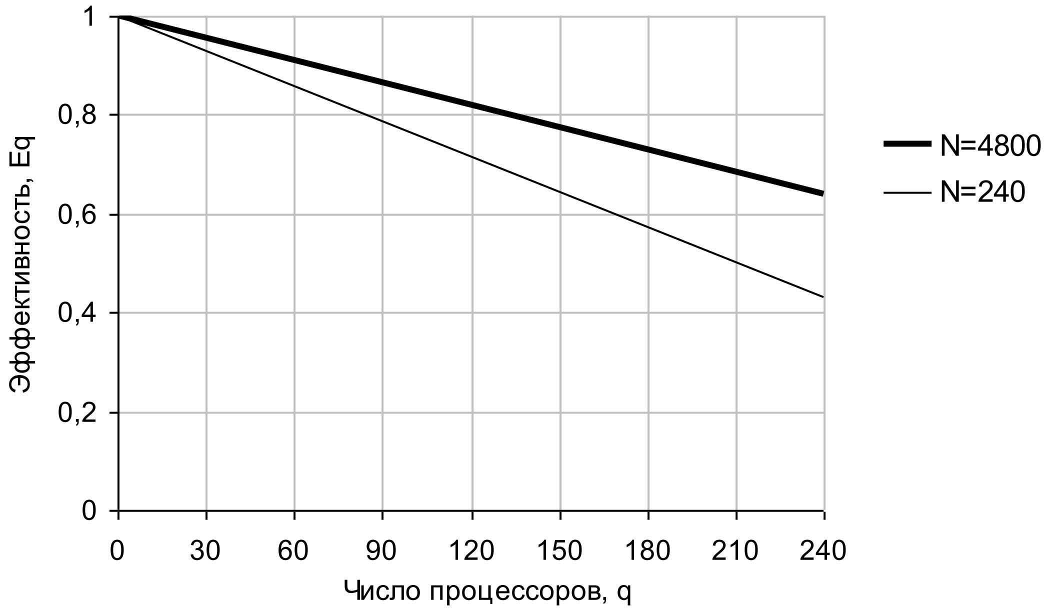


Рис. 3.2

Эффективность

Применение многопроцессорного вычислительного комплекса для анализа глобальных показателей чувствительности позволило сократить время их вычисления более чем в сто пятьдесят раз по сравнению с результатами последовательного алгоритма.

Алгоритм поиска глобального минимума целевой функции разделяется на два этапа: вспомогательный и основной.

Вспомогательный этап заключается в задании оптимизируемых параметров, границ поиска, метода оптимизации, экспериментальной информации, параметров целевой функции и всей необходимой вспомогательной информации для решения начально-краевой задачи.

Основной этап состоит в поиске минимального значения целевой функции по выбранному методу оптимизации.

Остановимся более подробно на основных моментах реализации каждого из этапов.

Вспомогательный этап вычислений.

1. По результатам анализа чувствительности целевой функции выбираются параметры, оказывающие существенное влияние на решение

начально-краевой задачи. Параметры, к которым выявлена малая чувствительность, приближенно заменяются их средними значениями.

2. Оптимальные значения параметров, полученные при анализе чувствительности, задаются в качестве начального приближения.

3. Задаются границы поиска для выбранных параметров оптимизации, следуя из общих физических принципов и экспериментальных фактов.

4. Выбирается метод оптимизации целевой функции.

5. Задается экспериментальная информация, содержащая сведения о количестве экспериментальных кривых, количестве максимумов и минимумов у каждой их кривых, максимальных и минимальных значениях функций и моментах времени, в которые они достигаются.

6. Для целевой функции задаются весовые коэффициенты, относительное значение погрешности вычисления и максимально допустимое число оценок.

7. Задается необходимая информация для построения начальной базы данных решения начально-краевой задачи.

8. Задается информация по записи результатов решения задачи оптимизации в файл результатов.

Основной этап вычислений.

1. Решение начально-краевой задачи с заданными значениями параметров по алгоритму, изложенному в параграфе 2.3.

2. Задание идентифицируемых параметров через безразмерные величины по формуле (3.2).

3. Решение задачи оптимизации для безразмерных параметров материала и модели деформирования, которые удовлетворяют уравнению (3.18) и ограничениям (3.19)–(3.20).

4. Если сходимость достигнута, выводится наилучшее значение параметров, если нет, то выбираются новое значение идентифицируемых параметров, затем они пересчитываются через обратные зависимости (3.3) и процесс вычислений повторяется с пункта 1 основного этапа вычислений.

Глава 4. Результаты решения задач идентификации вязкоупругих характеристик композитных материалов оболочек вращения при динамическом нагружении

В данной главе приводятся результаты решения тестовых и прикладных задач.

Решение тестовых задач направлено на проверку работоспособности и адекватности разработанной методики идентификации, и ее программной реализации.

Решение прикладных задач проводилось с целью определения параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных материалов в динамически нагруженных оболочках вращения.

4.1. Верификация методики решения задач вязкоупругого деформирования оболочек вращения при импульсном нагружении

В данном параграфе на задачах вязкоупругого деформирования сферической, полусферической и цилиндрической оболочек при импульсном нагружении проведен анализ сходимости и точности решения, а также сравнительный анализ результатов решения с экспериментальными данными и с численными расчетами, полученными по сертифицированному пакету прикладных программ «Динамика-2» [42].

В качестве тестового примера рассматривалось деформирование вязкоупругой замкнутой сферической оболочки под действием импульса внутреннего давления. Внутреннее воздействие задавалось следующей зависимостью [43]:

$$q(t)=\begin{cases} q_0\dfrac{t}{t_0},\ t<t_0 \\ \dfrac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\cdot(q_1-q_0)+q_0,\ t_0\le t\le t_1 \\ q_1,\ t>t_1 \end{cases} \tag{4.1}$$

где $q_0=0{,}25\,МПа$; $q_1=0{,}09\,МПа$; $t_0=10\Delta t$; $t_1=50\,мкс$. Графическое представление формулы (4.1) приведено на рис. 4.1.

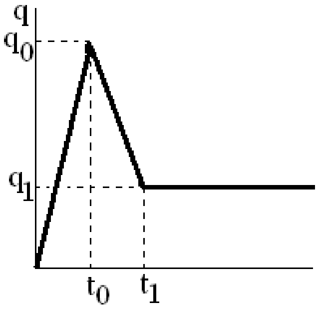


Рис. 4.1

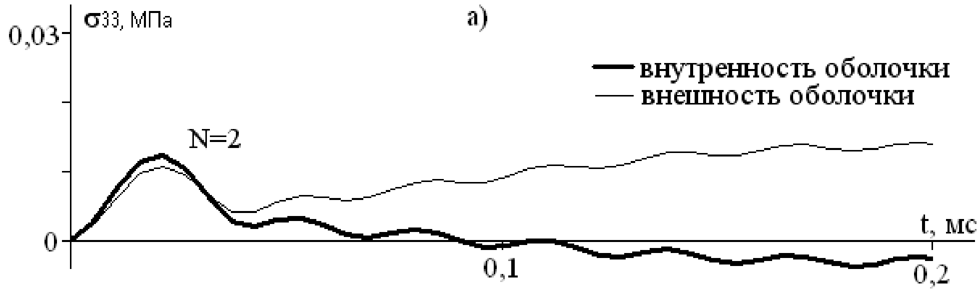
Внутреннее давление во времени

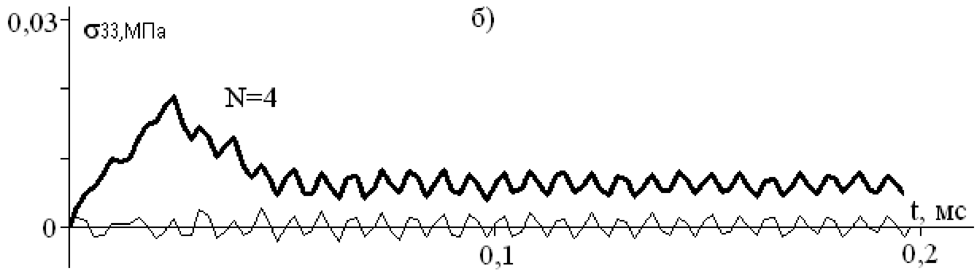
Материал сферической оболочки имел следующие характеристики: $E = 913\ МПа$; $E_{\infty} = 612\,МПа$; $\nu = 0{,}35$; $\rho = 920\,\dfrac{кг}{м^3}$; $\beta = 1800\,c^{-1}$.

Геометрические параметры оболочки равны: $\dfrac{h}{R} = 0{,}18$; $R = 0{,}0825\,м$.

Предварительно исследовалась сходимость рассматриваемой методики. Основным критерием достаточности числа членов в разложении (2.2) служила точность удовлетворения граничных условий на поверхностях оболочки. Изменение нормальных напряжений σ_{33} на внутренней и внешней поверхностях сферической оболочки при различном числе членов в аппроксимирующих рядах (2.2) $N = 2,\ 4,\ 6$ приведено на рис. 4.2.

Видно, что увеличение числа членов ряда ведет к практическому воспроизведению приложенной нагрузки (выполнению граничных условий), следовательно и более точному решению.





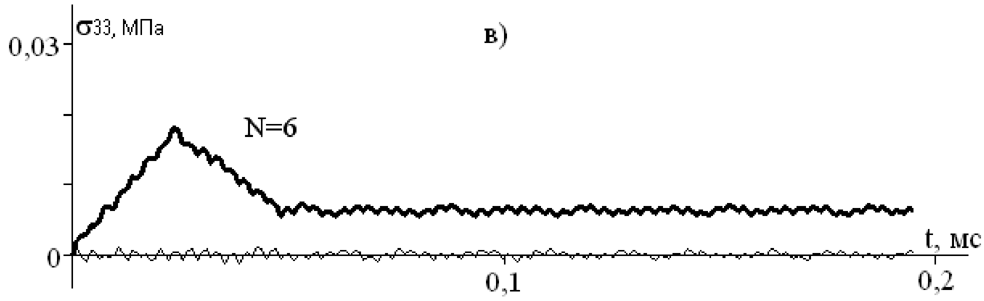


Рис. 4.2

Нормальные напряжения для изотропной вязкоупругой сферической оболочки при N =2 (а), N =4 (б), N =6 (в)

Далее приводятся результаты сравнения численного решения с экспериментальными данными. На рис. 4.3 показаны окружные деформации во времени на внешней поверхности сферической оболочки: кривая 1 – соответствует численному расчету для изотропной модели вязкоупругого поведения материала оболочки по вышеизложенной методике; 2 – соответствует экспериментальной зависимости [43].

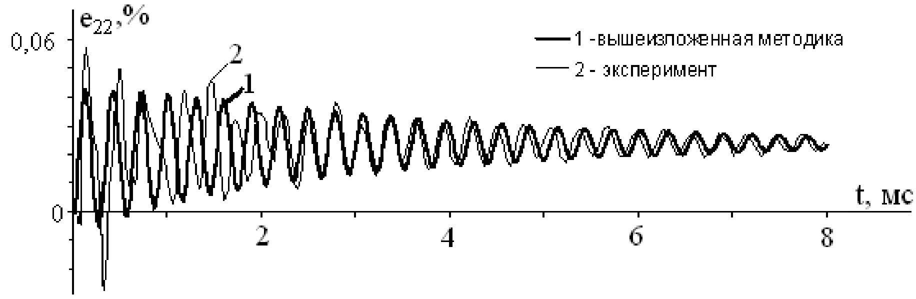


Рис. 4.3

Окружные деформации во времени для изотропной вязкоупругой сферической оболочки на внешней поверхности оболочки

Проведенное исследование показывает, что решение задачи на основе уравнений, полученных путем аппроксимации функции перемещения по толщинной координате конечным рядом по ортонормированным полиномам Лежандра (соотношения (2.2)–(2.5), (2.9)–(2.11)), имеет удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

На примере динамического деформирования полусферической оболочки проведен анализ сходимости и точности решения, а также сравнение результатов с численным расчетом, полученным по сертифицированному пакету прикладных программ «Динамика-2».

Рассматривалась полусферическая оболочка при нагружении импульсом внутреннего давления.

Расчетная схема задачи показана на рис. 4.4.

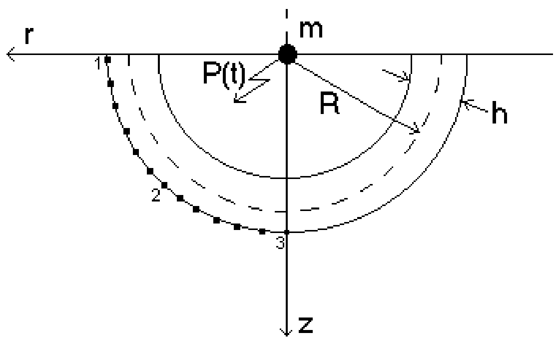


Рис. 4.4

Расчетная схема задачи

При этом давление равномерно распределено по внутренней поверхности оболочки, а во времени изменяется по закону изображенному на рис. 4.5 [44].

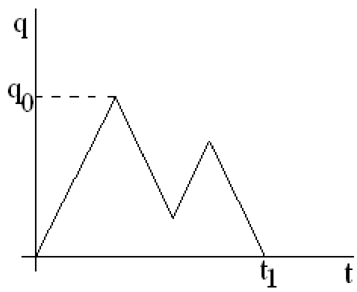


Рис. 4.5

Внутреннее давление во времени

Параметры геометрии, импульса давления и материала оболочки следующие: $h = 0{,}006\,м$, $R = 0{,}049\,м$, $q_0 = 0{,}3 МПа$, $t_1 = 0{,}4 \cdot 10^{-4}\,с$, $E = 7{,}5 ГПа$; $E_\infty = 6{,}78\,ГПа$; $\nu = 0{,}33$; $\beta = 20000\,c^{-1}$; $\rho = 1870\,кг/м^3$.

На рис. 4.6 показано изменение нормальных напряжений σ_{33} на внутренней и внешней поверхностях полусферической оболочки при различном числе членов в аппроксимирующих рядах (2.2) $N = 2, 4, 6$.

Видно, что с увеличением числа членов аппроксимирующих рядов нормальные напряжения на внешней поверхности стремятся к нулю, а на внутренней поверхности воспроизводят приложенный импульс.

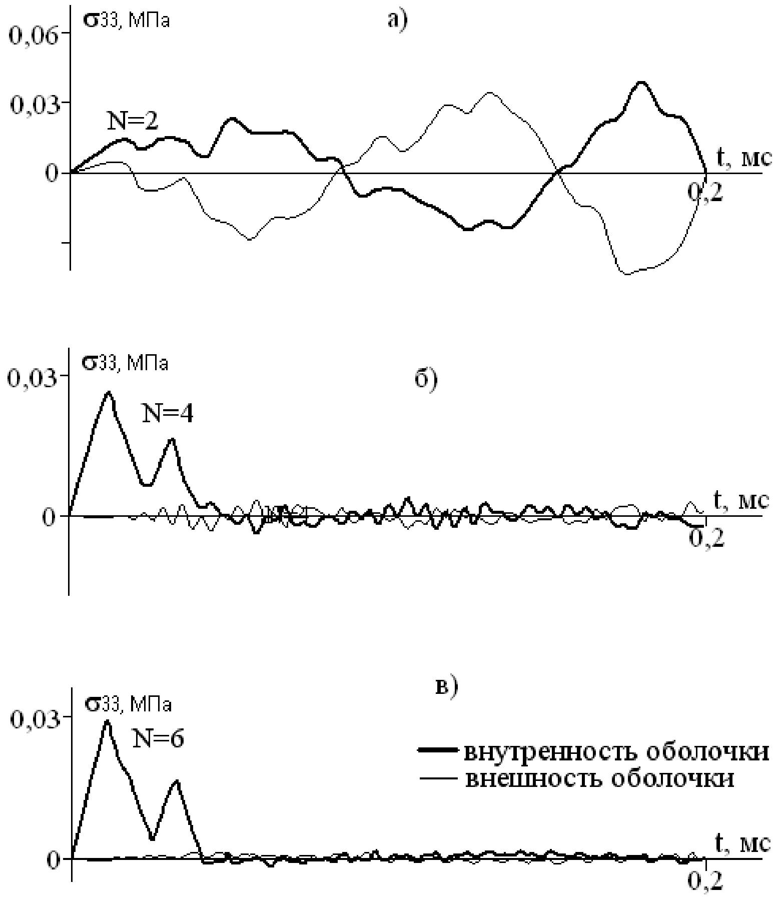
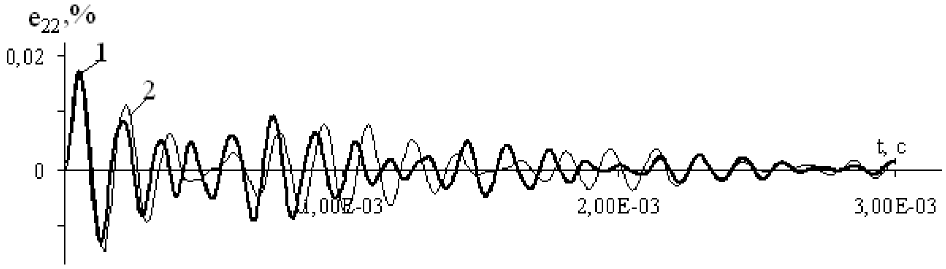


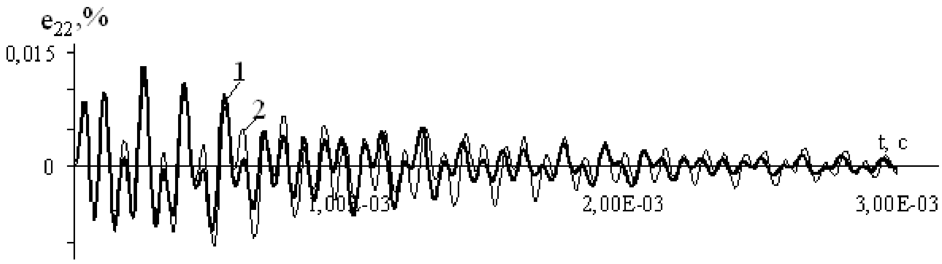
Рис. 4.6

Нормальные напряжения для изотропной вязкоупругой полусферической оболочки при N=2 (а), N=4 (б), N=6 (в)

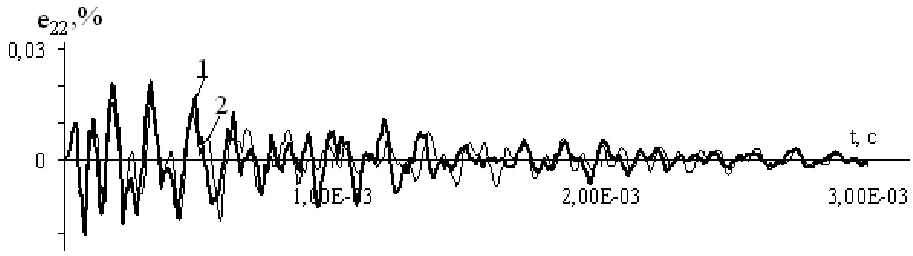
На рис. 4.7 приведены зависимости окружной деформации во времени на внешней поверхности полусферической оболочки вблизи экватора (точка 1 рис. 4.4), со смещением относительно экватора на 45^0 (точка 2 рис. 4.4) и в полюсе (точка 3 рис. 4.4). Здесь кривая 1 соответствует численному расчету для изотропной модели вязкоупругого поведения материала оболочки по вышеизложенной методике; кривая 2 – численному расчету в вязкоупругой постановке, полученному по сертифицированному пакету прикладных программ «Динамика-2».



а)



б)



в)

Рис. 4.7

Окружные деформации во времени для изотропной вязкоупругой полусферической оболочки на внешней поверхности вблизи экватора (а), со смещением относительно экватора на 45^0 (б), в полюсе (в)

Сравнительный анализ приведенных кривых (рис. 4.7) свидетельствует об удовлетворительном соответствии решений, полученных по вышеизложенной методике и по пакету прикладных программ «Динамика-2».

Далее адекватность предлагаемых моделей деформирования материала оболочек вращения оценивалась на задаче динамического деформирования композитной цилиндрической оболочки при взрывном нагружении путем сравнения с экспериментальными данными [45]. Импульс давления, имитирующий подрыв в центре цилиндрической оболочки заряда взрывчатого вещества, задавался с помощью эмпирической зависимости [30]:

$$q_3(\alpha_1, t) = \begin{cases} kmq/l^3 \; npu\; t \le t_l \\ 0 \qquad npu\; t > t_l \end{cases} \tag{4.2}$$

где $k = 8(3\gamma - 1)/25(\gamma^2 - 1)$, m – масса заряда взрывчатого вещества, q – теплотворная способность взрывчатого вещества, l – расстояние от центра заряда до точки внутренней поверхности оболочки, $t_l = kl/\sqrt{q}$, γ – показатель адиабаты в уравнении состояния взрывчатого вещества [171].

Расчетная схема задачи показана на рис. 4.8.

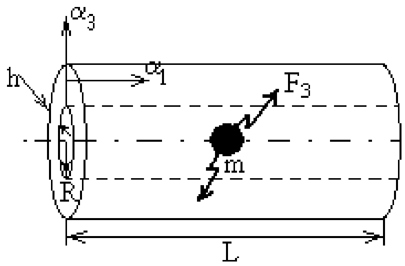


Рис. 4.8

Расчетная схема задачи

Геометрические параметры цилиндрической оболочки были равны: $h = 0{,}016\,м$; $R = 0{,}1\,м$; $L = 4R$. Материал оболочки имел следующие характеристики: $E_1 = 19\,ГПа$; $E_2 = 33\,ГПа$; $\nu_{12} = 0{,}12$; $\nu_{21} = 0{,}21$; $\rho = 1900\,кг/м^3$ [45].

Предварительно анализировалась точность решения прямой задачи. На рис. 4.9 показано изменение нормальных напряжений на внешней (сплошные линии) и внутренней (пунктирные линии) поверхностях оболочки при различном числе членов в аппроксимирующих рядах (2.2) в момент времени $t = 0{,}4 \cdot 10^{-4}\,c$. Здесь же приведено распределение импульса давления (сплошная жирная линия), задаваемого по формуле (4.2). Видно, что с увеличение числа членов аппроксимирующих рядов нормальные напряжения на внешней поверхности стремятся к нулю, а на внутренней поверхности воспроизводят приложенный импульс (т. е., по сути, выполняются краевые условия, если бы задача решалась в постановке сплошной среды).

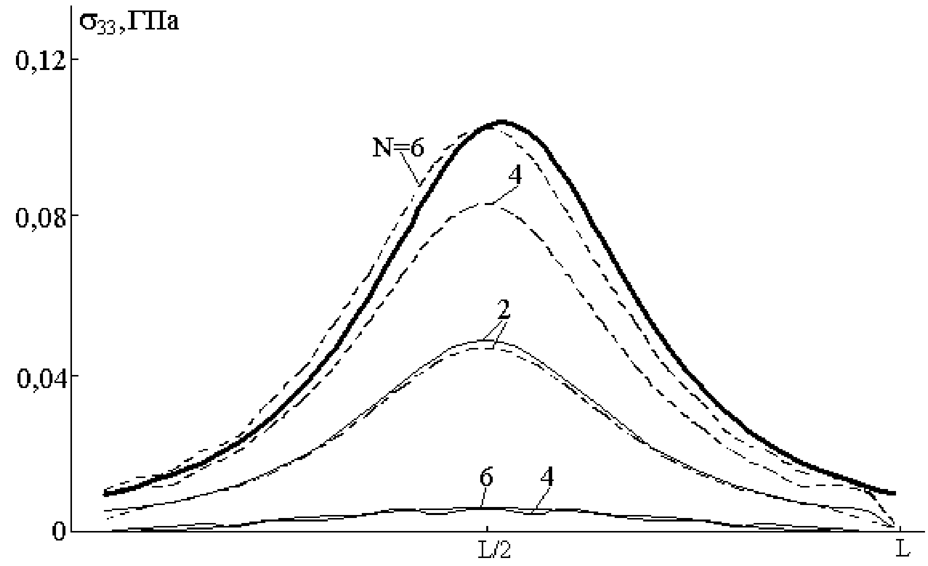


Рис. 4.9

Нормальные напряжения на внешней и внутренней поверхностях цилиндрической оболочки.

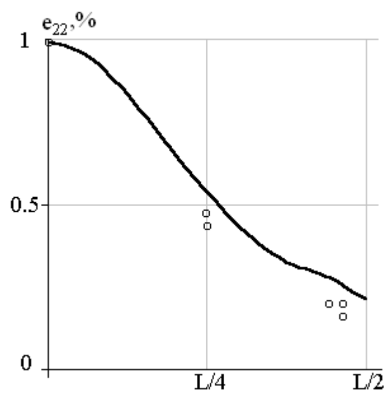


Рис. 4.10

Максимальные окружные деформации на внешней поверхности цилиндрической оболочки

На рис. 4.10 приведены результаты сравнения теоретических расчетов и экспериментальных данных в виде распределений максимальных окружных деформаций по длине образующей на внешней поверхности оболочки. Здесь сплошная линия соответствует численному решению упругой задачи при $N=5$, точками обозначены результаты эксперимента $(m=0{,}062\,кг)$. Проведенное сопоставление показывает удовлетворительное совпадение результатов расчета с экспериментальными данными.

Результаты проведенного исследования показали, что построенная разрешающая система уравнений позволяет с необходимой точностью анализировать нестационарные процессы деформации в нетонких вязкоупругих композитных оболочках вращения.

4.2. Тестирование метода идентификации на задачах динамического деформирования вязкоупругих композитных полусферических и цилиндрических оболочек

Адекватность и работоспособность предлагаемого метода идентификации оценивалась на задачах динамического деформирования изотропных и ортотропных полусферических оболочек при взрывном нагружении.

Расчетная схема задачи показана на рис. 4.11.

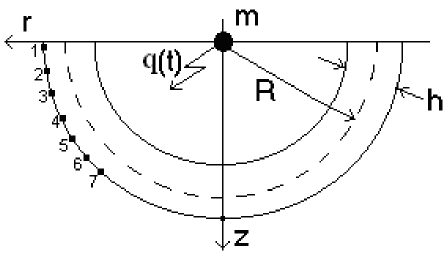


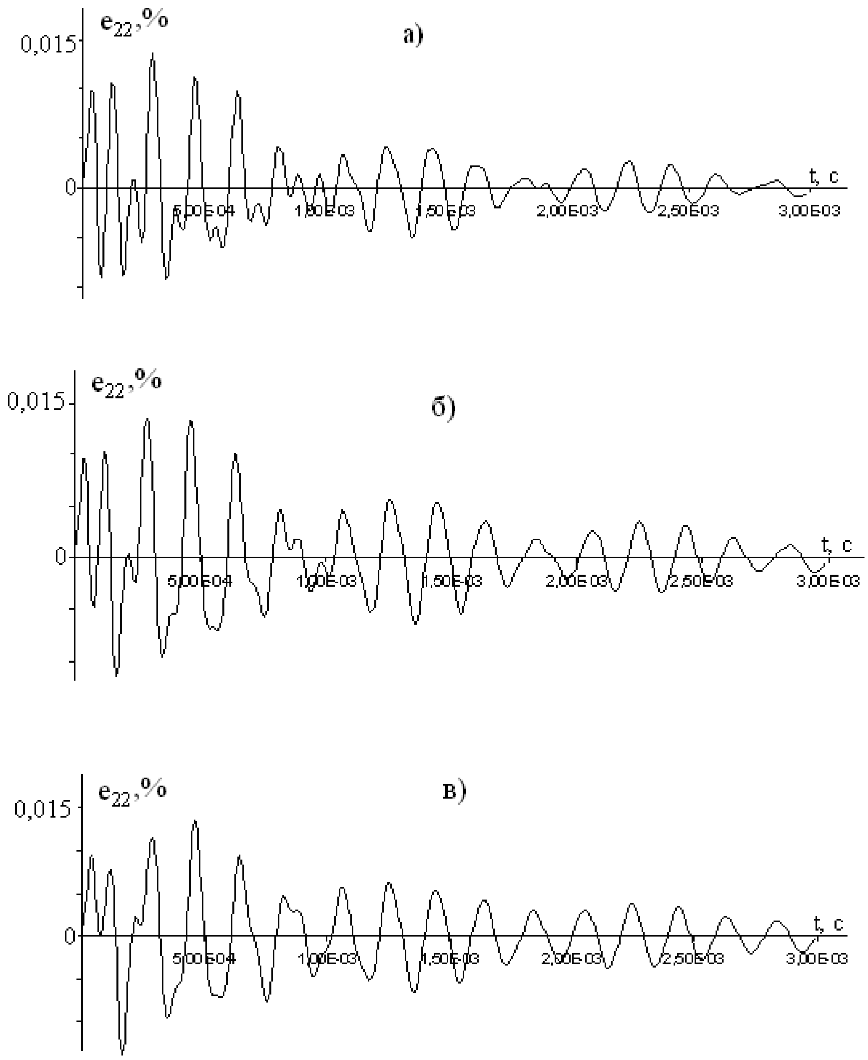
Рис. 4.11

Расчетная схема задачи

Взрывное нагружение моделировалось импульсом внутреннего давления, изображенным на рис. 4.5. Геометрические параметры оболочки были равны: толщина $h=0{,}006\,м$, радиус $R=0{,}049\,м$.

На первом этапе в качестве имитации экспериментальной информации о работе элемента конструкции использовалось решение прямой начально-краевой задачи динамического деформирования вязкоупругой изотропной полусферической оболочки с заданными механическими характеристиками материала: $E = 6{,}0\,ГПа$; $E_{\infty} = 5{,}4\,ГПа$; $\nu = 0{,}3$; $\beta = 100000\,c^{-1}$; $\rho = 1870\,кг/м^3$ и параметрами импульса: $q_0 = 0{,}3МПа$, $t_1 = 0{,}4 \cdot 10^{-4}\,c$.

Результаты решения прямой задачи приведены на рис. 4.12 в виде временных зависимостей окружной деформации на внешней поверхности полусферы в точках 1–7 (рис. 4.11): со смещением относительно экватора на $3{,}75^0$; $11{,}25^0$; $18{,}75^0$; $26{,}25^0$; $33{,}75^0$; $41{,}25^0$; $48{,}75^0$ соответственно. Полученные в вычислительном эксперименте деформации имитировали результаты замеров в соответствующем натурном эксперименте, а значения механических характеристик и параметров моделей деформирования служили критерием достоверности и точности решения обратной задачи.



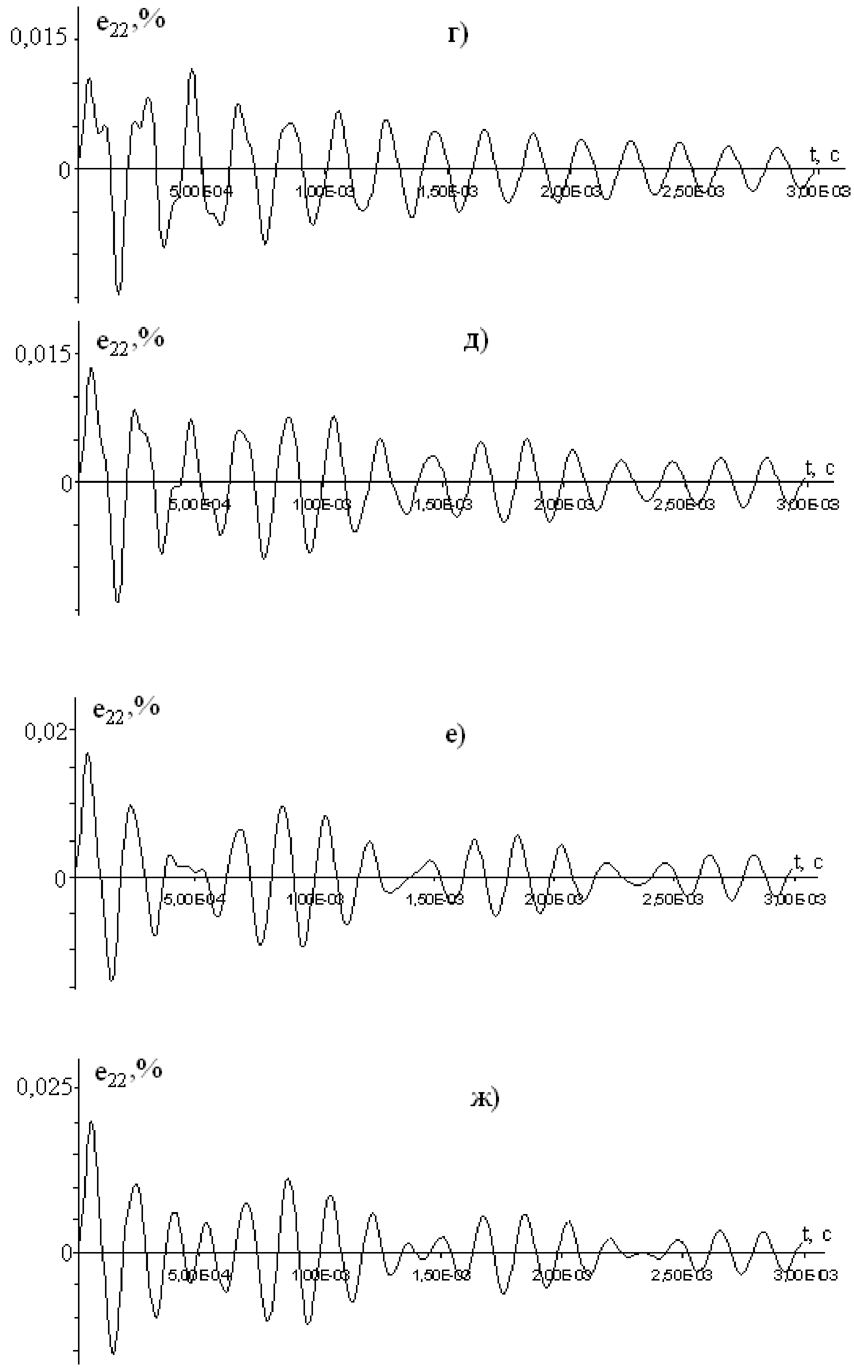


Рис. 4.12

Окружные деформации во времени для изотропной полусферической оболочки на внешней поверхности со смещением относительно экватора на 3,750 (а); 11,250 (б); 18,750 (в); 26,250 (г); 33,750 (д); 41,250 (е); 48,750 (ж) соответственно

В результате обработки осциллограмм деформаций в соответствии с алгоритмом, изложенным в параграфе 3.3, формировалась целевая функция (3.5) для решения задачи идентификации.

Предварительно проводился анализ чувствительности целевой функции по четырем параметрам $\overline{E} = (E, E_\infty, \nu, \beta)$. При этом проектные переменные в задаче идентификации варьировались в следующих пределах:

$$2\,ГПа \le E \le 10\ ГПа;\ 1\,ГПа \le E_\infty \le 10\,ГПа\ ; \qquad (4.3)$$

$$0 \le \nu \le 0{,}5;\ 0 \le \beta \le 500000\,c^{-1};$$

$$E \ge E_\infty\,.$$

В соответствии с алгоритмом анализа чувствительности, изложенным в параграфе 3.3, выделим в группу Y одну переменную, а остальные переменные выделим в группу Z, например, $Y = \{E\}$, тогда $Z = \{E_\infty, \nu, \beta\}$, затем в группу Y выделим другую переменную и т. д. По формулам (3.11)–(3.12) вычислим показатели чувствительности для каждой группы. В таблице 4.1 приведены значения всех одномерных показателей чувствительности.

Таблица 4.1

Значения одномерных показателей чувствительности

№	Y	Z	S_y	S_y^{tot}	S_z	S_z^{tot}
1	E	E_∞, ν, β	0,5552	0,5974	0,4026	0,4448
2	E_∞	E, ν, β	0,3457	0,4224	0,5776	0,6543
3	ν	E, E_∞, β	0,1466	0,0423	0,9577	0,8534
4	β	E, E_∞, ν	0,1675	0,1587	0,8413	0,8325

Из таблицы 4.1 видно, что модуль упругости E является наиболее существенной переменной. Однако роль остальных переменных E_∞, ν, β достаточно велика (более 40%). Следовательно, отсутствуют несущественные переменные, которые можно игнорировать («заморозить»).

В процессе оценки показателей чувствительности была получена вспомогательная информация о минимальном значении целевой функции при значениях проектных переменных: $E = 7{,}2\,ГПа$; $E_\infty = 6{,}3\,ГПа$; $\nu = 0{,}26$; $\beta = 160156\,c^{-1}$, которая использовалась в дальнейшем в качестве начального приближения при решении задачи оптимизации.

Минимизация функционала (3.5) при ограничениях (4.3) была реализована двумя методами, описанными ранее в параграфе 3.3. Результаты идентификации механических характеристик, полученные разными методами оптимизации, приведены в таблице 4.2, где для сравнения указаны точные значения параметров и отклонения полученных параметров от истинных значений. Отклонения вычислены по формуле:

$$\Delta_i = \frac{\left| e_i^p - e_i^э \right|}{e_i^э} \cdot 100\%, \qquad (4.4)$$

где $e_i^э$, e_i^p – экспериментальные значения параметров и найденные методом идентификации.

Таблица 4.2

Идентифицируемые параметры изотропной вязкоупругой модели поведения материала полусферической оболочки

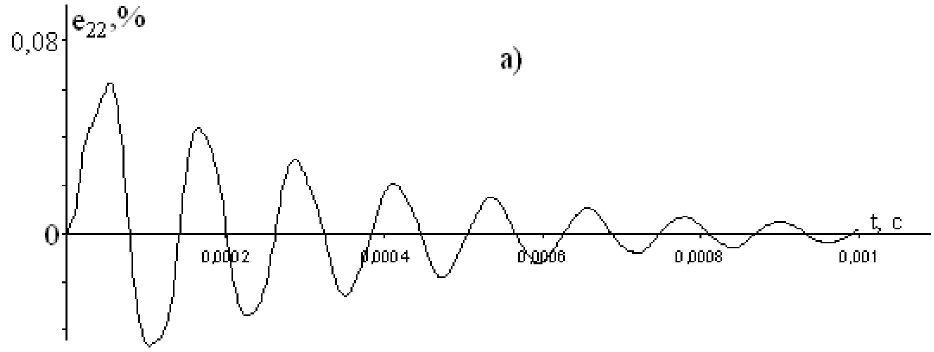
Метод *(отклонения)*	Механические характеристики			
	$E, ГПа$	$E_\infty, ГПа$	ν	β, c^{-1}
Точное значение	6,00000	5,40000	0,30000	100000,00
Первый подход *(отклонения Δ_i,%)*	6,00166 *(0,03)*	5,40231 *(0,04)*	0,29997 *(0,01)*	99871,68 *(0,13)*
Второй подход *(отклонения Δ_i,%)*	6,12938 *(2,16)*	5,49192 *(1,70)*	0,30120 *(0,40)*	109496,98 *(9,50)*

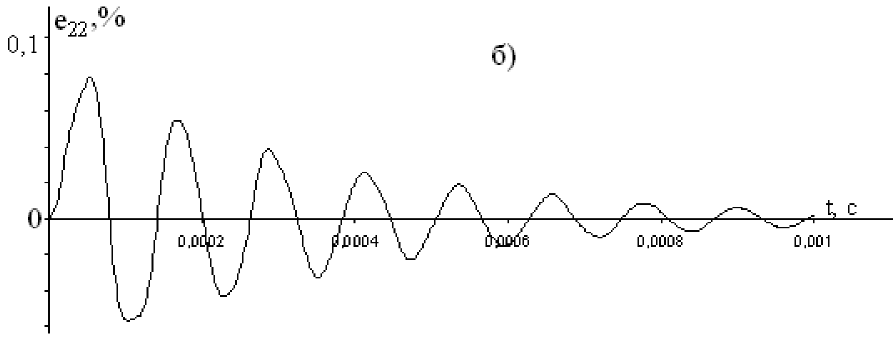
Из представленных в таблице 4.2 результатов, видно, что идентифицированные параметры достаточно хорошо согласуются с их точными значениями (отклонение по не самым чувствительным переменным менее 10%).

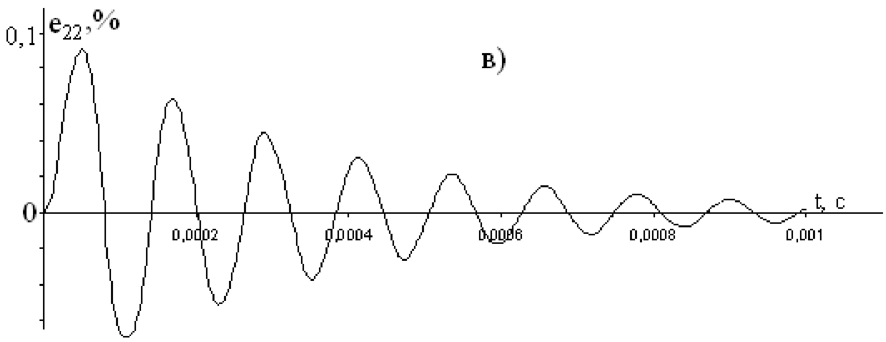
На втором этапе в качестве экспериментальной информации о работе элемента конструкции использовалась информация, полученная из решения прямой задачи о динамическом деформировании вязкоупругой ортотропной полусферической оболочки с заданными механическими характеристиками материала: $E_1 = 57{,}0\,ГПа$, $E_2 = 14{,}0\,ГПа$, $E_3 = 14{,}0\,ГПа$, $G_{13} = 5{,}7\,ГПа$, $E_1^\infty = 45{,}6\,ГПа$, $E_2^\infty = 11{,}2\,ГПа$, $E_3^\infty = 11{,}2\,ГПа$, $G_{13}^\infty = 4{,}6\,ГПа$, $\nu_{12} = 0{,}277$, $\nu_{23} = 0{,}4$, $\nu_{13} = 0{,}277$, $\beta = 50000\,c^{-1}$, $\rho = 1990\,кг/м^3$.

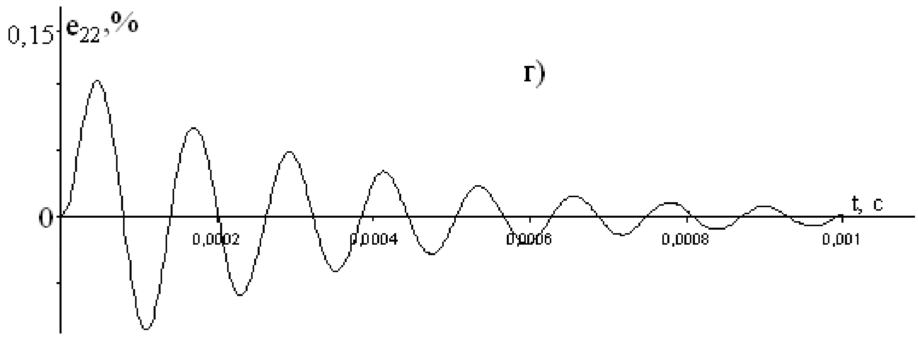
Результаты решения прямой задачи, с параметрами импульса $q_0 = 3МПа$, $t_1 = 0{,}4 \quad 10^{\ 4} c$, приведены на рис. 4.13 в виде тензограмм окружной деформации на внешней поверхности полусферы в пяти точках 1–5 (рис. 4.11):

со смещением относительно экватора на $3{,}75^0$; $11{,}25^0$; $18{,}75^0$; $26{,}25^0$; $33{,}75^0$ соответственно.









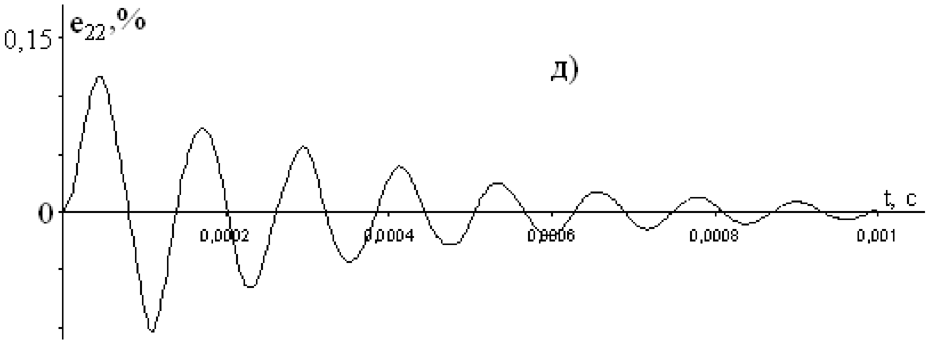


Рис. 4.13

Окружные деформации во времени для ортотропной полусферической оболочки на внешней поверхности со смещением относительно экватора на 3,750 (а); 11,250 (б); 18,750 (в); 26,250 (г); 33,750 (д) соответственно

По результатам обработки тензограмм окружных деформаций, имитирующих натурный эксперимент, была сформирована целевая функция для решения задачи идентификации.

При этом в качестве идентифицируемых параметров вязкоупругой ортотропной модели поведения материала полусферической оболочки были выбраны: E_1, E_2, E_3, E_1^{∞}, E_2^{∞}, E_3^{∞} – мгновенные и длительные модули упругости в направлении α_1, α_2, α_3; G_{13}, G_{13}^{∞} – мгновенный и длительный модули сдвига в плоскости $\alpha_1\alpha_3$; ν_{12}, ν_{23}, ν_{13} – коэффициенты Пуассона в плоскостях $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_3$; β – параметр, характеризующий время релаксации.

Ограничения для параметров идентификации задавались следующими неравенствами:

$$40\,ГПа \le E_1 \le 70\,ГПа;\ 10\,ГПа \le E_2 \le 20\,ГПа;$$
$$10\,ГПа \le E_3 \le 20\,ГПа;\ 2\,ГПа \le G_{13} \le 7\,ГПа;$$
$$20\,ГПа \le E_1^{\infty} \le 70\,ГПа;\ 5\,ГПа \le E_2^{\infty} \le 20\,ГПа;$$
$$5\,ГПа \le E_3^{\infty} \le 20\,ГПа;\ 1\,ГПа \le G_{13}^{\infty} \le 7\,ГПа;$$
$$0{,}1 \le \nu_{12} \le 0{,}4;\ 0{,}1 \le \nu_{13} \le 0{,}4;\ 0{,}2 \le \nu_{23} \le 0{,}5; \qquad (4.5)$$
$$10000\ c^{-1} \le \beta \le 200000\,c^{-1};$$
$$E_1 \ge E_1^{\infty};\ E_2 \ge E_2^{\infty};\ E_3 \ge E_3^{\infty};$$

$$G_{13} \geq G_{13}^{\infty}.$$

Как и выше, предварительно анализировалась чувствительность целевой функции по проектным переменным. Результаты анализа чувствительности в виде значений одномерных показателей чувствительности представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Значения одномерных показателей чувствительности

№	Y	S_y	S_y^{tot}	S_z	S_z^{tot}
1	E_1	0,0644	0,0400	0,9600	0,9356
2	E_2	0,8570	0,9904	0,0096	0,1430
3	E_3	0,0376	0,0127	0,9873	0,9624
4	G_{13}	0,0264	0,0081	0,9919	0,9736
5	E_1^{∞}	0,0435	0,0000	1,0000	0,9565
6	E_2^{∞}	0,0483	0,2253	0,7747	0,9517
7	E_3^{∞}	0,0166	0,0007	0,9993	0,9834
8	G_{13}^{∞}	0,0133	0,0040	0,9960	0,9867
9	ν_{12}	0,0213	0,0214	0,9786	0,9787
10	ν_{23}	0,0113	0,0068	0,9932	0,9887
11	ν_{13}	0,0100	0,0098	0,9902	0,9900
12	β	0,0793	0,2482	0,7518	0,9207

Из таблицы 4.3 видно, что окружной модуль упругости E_2 является единственной ведущей переменной. Роль остальных переменных не велика (не более 14%), т. е. эти переменные слабо влияют на величину целевой функции. В такой ситуации несущественные переменные можно фиксировать («заморозить»).

При проведении анализа чувствительности было найдено минимальное значении целевой функции со значениями проектных переменных: $E_1 = 42{,}2\,ГПа$; $E_2 = 19{,}0\,ГПа$; $E_3 = 17{,}6\,ГПа$; $G_{13} = 4{,}6\,ГПа$; $E_1^{\infty} = 37{,}6\,ГПа$;

$E_2^\infty = 10{,}4\,ГПа$; $E_3^\infty = 14{,}4\,ГПа$; $G_{13}^\infty = 2{,}8\,ГПа$; $\nu_{12} = 0{,}328$; $\nu_{23} = 0{,}384$; $\nu_{13} = 0{,}223$; $\beta = 19900\,c^{-1}$.

В первом приближении была решена однопараметрическая задача оптимизации для наиболее существенной переменной E_2. Найденное значение $E_2 = 14{,}0\,ГПа$ практически совпадает с заданным значением окружного модуля упругости.

Затем была решена задача идентификации в полной постановке (для всех двенадцати параметров). В таблице 4.4 приведены заданные значения параметров ортотропной вязкоупругой модели поведения материала полусферической оболочки, полученные с помощью метода идентификации для двух подходов решения задачи оптимизации.

Таблица 4.4

Идентифицируемые параметры ортотропной вязкоупругой модели поведения материала полусферической оболочки

№	Механические характеристики	Метод *(отклонения)*		
		Точное значение	Первый подход *(отклонения Δ_i,%)*	Второй подход *(отклонения Δ_i,%)*
1	$E_1, ГПа$	57,00000	57,74998 *(1,32)*	58,50570 *(2,64)*
2	$E_2, ГПа$	14,00000	14,07572 *(0,54)*	13,57674 *(3,02)*
3	$E_3, ГПа$	14,00000	12,21944 *(12,72)*	11,24819 *(19,66)*
4	$G_{13}, ГПа$	5,70000	5,49493 *(3,60)*	4,81532 *(15,52)*
5	$E_1^\infty, ГПа$	45,60000	47,17272 *(3,45)*	36,10808 *(20,82)*
6	$E_2^\infty, ГПа$	11,20000	11,27510 *(0,67)*	10,79890 *(3,58)*
7	$E_3^\infty, ГПа$	11,20000	6,12918 *(45,28)*	7,02651 *(37,26)*
8	$G_{13}^\infty, ГПа$	4,60000	4,85856 *(5,62)*	2,72048 *(40,86)*
9	ν_{12}	0,27700	0,25793 *(6,88)*	0,28773 *(3,87)*
10	ν_{23}	0,40000	0,29171 *(27,07)*	0,32939 *(17,65)*
11	ν_{13}	0,27700	0,10271 *(62,92)*	0,16381 *(40,86)*
12	β, c^{-1}	50000,00	54754,63 *(9,51)*	57328,66 *(14,66)*

По результатам анализа значений параметров моделей деформирования (таблица 4.4) и их одномерных показателей чувствительности (таблица 4.3) видно, что плоскостные жесткостные характеристики определяются достаточно хорошо (с точностью менее 10%), а трансверсальные характеристики определяются с меньшей точностью.

Адекватность и работоспособность предлагаемого метода идентификации оценивалась на задаче деформирования изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек при взрывном нагружении.

Расчетная схема задачи показана на рис. 4.4.

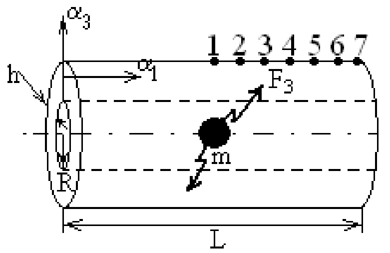


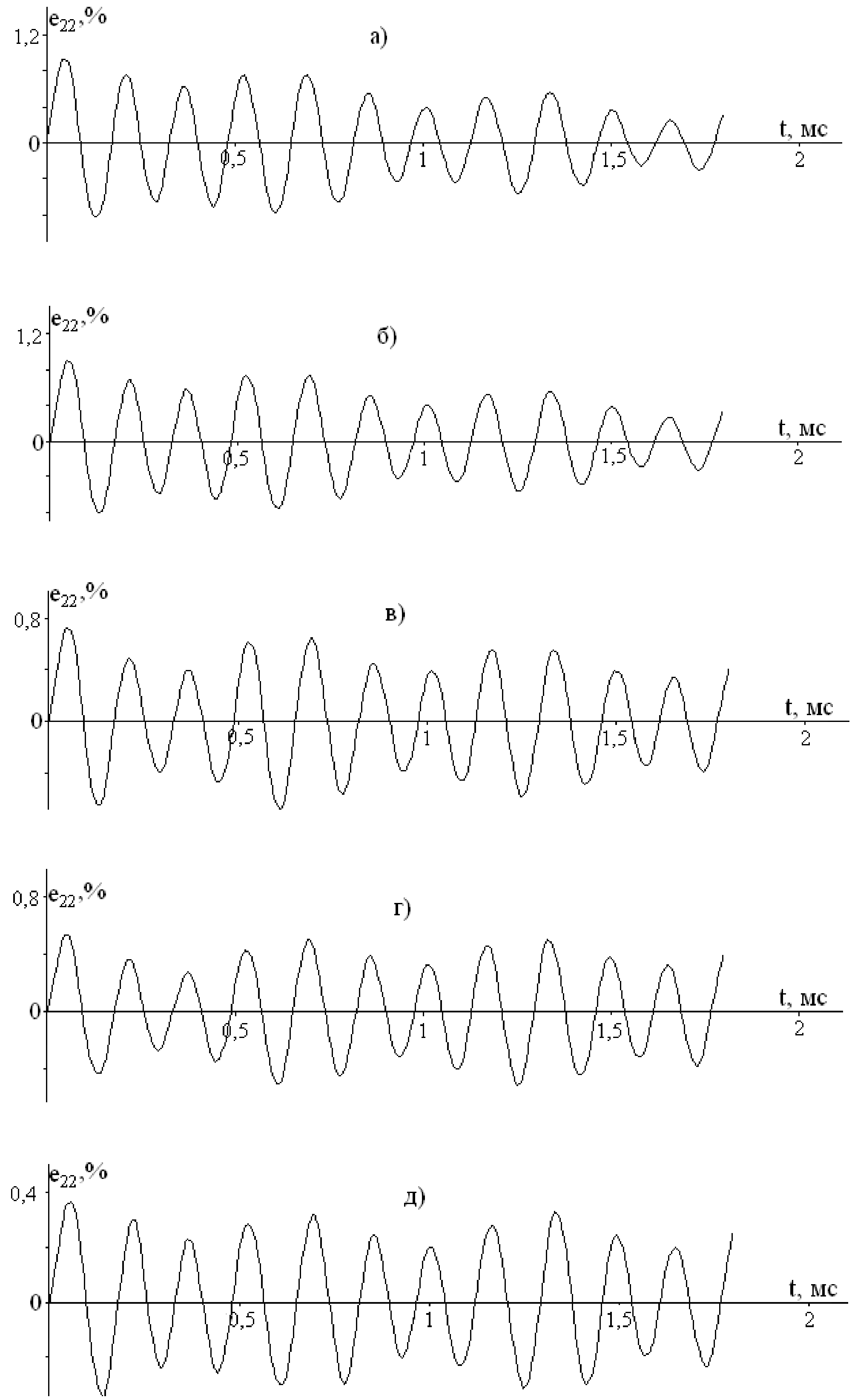
Рис. 4.4

Расчетная схема задачи

Импульс давления, имитирующий подрыв в центре цилиндрической оболочки заряда взрывчатого вещества, задавался с помощью эмпирической зависимости (4.2). Геометрические параметры цилиндрической оболочки были равны: радиус $R = 0{,}1\,м$, толщина $h = 0{,}016\,м$, длина $L = 0{,}4\,м$.

На первом этапе в качестве натурного эксперимента использовалась информация, полученная из решения прямой начально-краевой задачи о динамическом деформировании вязкоупругой изотропной цилиндрической оболочки с заданными механическими характеристиками материала: $E = 29\,ГПа$; $E_\infty = 26{,}1\,ГПа$; $\nu = 0{,}2$; $\beta = 300000\,с^{-1}$; $\rho = 1900\,кг/м^3$.

Результаты решения прямой задачи приведены на рис. 4.15 в виде временных зависимостей окружной деформации на внешней поверхности цилиндра в точках 1–6 (рис. 4.14): в центральном сечении и со смещением относительно центра цилиндра на $0{,}03\,м$; $0{,}06\,м$; $0{,}09\,м$; $0{,}12\,м$; $0{,}15\,м$ соответственно.


а)
e22,%
1,2
0
t, мс
0,5
1
1,5
2
б)
e22,%
1,2
0
t, мс
0,5
1
1,5
2
в)
e22,%
0,8
0
t, мс
0,5
1
1,5
2
г)
e22,%
0,8
0
t, мс
0,5
1
1,5
2
д)
e22,%
0,4
0
t, мс
0,5
1
1,5
2

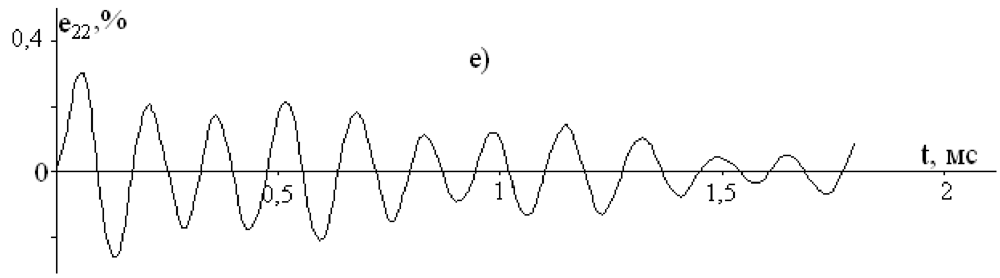


Рис. 4.15

Окружные деформации во времени в центральном сечении (а) на внешней поверхности для изотропной цилиндрической оболочки и в точках со смещением относительно центра на $0{,}03\,м$ (б); $0{,}06\,м$ (в); $0{,}09\,м$ (г); $0{,}12\,м$ (д); $0{,}15\,м$ (е) соответственно

По результатам обработки осциллограмм окружных деформаций формировалась целевая функция для решения задачи идентификации.

В качестве идентифицируемых параметров вязкоупругой изотропной модели поведения материала цилиндрической оболочки были следующие четыре параметра: E, E_∞, ν и β, которые варьировались в пределах:

$$10\,ГПа \le E \le 40\,ГПа;\ 5\,ГПа \le E_\infty \le 40\,ГПа;$$

$$0 \le \nu \le 0{,}5;\ 0 \le \beta \le 500000\,c^{-1}; E \ge E_\infty. \qquad (4.6)$$

Предварительно анализировалась чувствительность целевой функции по проектным переменным. В таблице 4.5 приведены значения одномерных показателей чувствительности.

Таблица 4.5

Значения одномерных показателей чувствительности

№	Y	S_y	S_y^{tot}	S_z	S_z^{tot}
1	E	0,6061	0,6463	0,3537	0,3939
2	E_∞	0,1692	0,2932	0,7068	0,8308
3	ν	0,0049	0,0715	0,9285	0,9951
4	β	0,0360	0,0979	0,9021	0,9640

Из таблицы 4.5 видно, что модуль упругости E является наиболее существенной переменной, в тоже время роль остальных переменных E_∞, ν, β достаточно велика (более 30%). Следовательно, отсутствуют несущественные переменные, которые можно игнорировать.

При определении показателей чувствительности была получена информация о минимальном значении целевой функции со значениями проектных переменных: $E = 30{,}391\,ГПа$; $E_\infty = 24{,}978\,ГПа$; $\nu = 0{,}234$; $\beta = 457031{,}25\,c^{-1}$.

В таблице 4.6 приведены результаты решения задачи идентификации.

Таблица 4.6

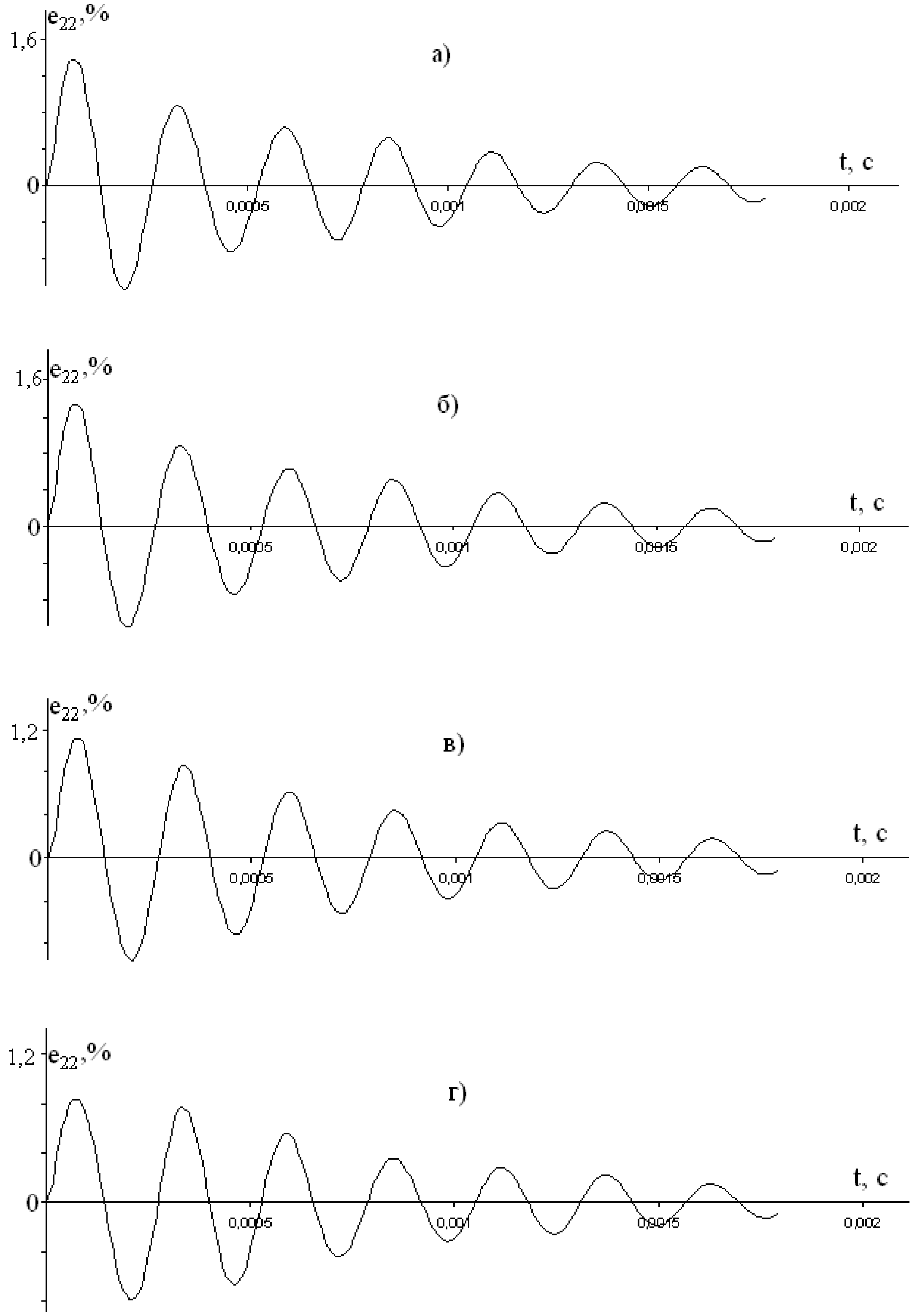
Идентифицируемые параметры изотропной вязкоупругой модели поведения материала цилиндрической оболочки

Метод *(отклонения)*	Механические характеристики			
	$E, ГПа$	$E_\infty, ГПа$	ν	β, c^{-1}
Точное значение	29,00000	26,10000	0,20000	300000,00
Первый подход *(отклонения* $\Delta_i, \%$*)*	29,00100 *(0,00)*	26,10104 *(0,00)*	0,19999 *(0,01)*	299990,00 *(0,00)*
Второй подход *(отклонения* $\Delta_i, \%$*)*	29,54595 *(1,88)*	26,04092 *(0,23)*	0,19980 *(0,10)*	356580,45 *(18,86)*

Из таблицы 4.6 видно, что в идентифицируемые параметры определены с высокой точностью (для первого подхода получены практически точные значения).

На втором этапе в качестве экспериментальной информации о работе элемента конструкции использовались результаты динамического деформирования вязкоупругой ортотропной цилиндрической оболочки с заданными механическими характеристиками материала: $E_1 = 57{,}0\,ГПа$, $E_2 = 14{,}0\,ГПа$, $E_3 = 14{,}0\,ГПа$, $G_{13} = 5{,}7\,ГПа$, $E_1^\infty = 45{,}6\,ГПа$, $E_2^\infty = 11{,}2\,ГПа$, $E_3^\infty = 11{,}2\,ГПа$, $G_{13}^\infty = 4{,}6\,ГПа$, $\nu_{12} = 0{,}277$, $\nu_{23} = 0{,}4$, $\nu_{13} = 0{,}277$, $\beta = 50000\,c^{-1}$, $\rho = 1990\,кг/м^3$.

Результаты решения прямой задачи приведены на рис. 4.16 в виде временных зависимостей окружной деформации на внешней поверхности цилиндра в точках 1-7 (рис. 4.14): в центральном сечении и со смещением относительно центра на $0{,}03\,м$; $0{,}06\,м$; $0{,}09\,м$; $0{,}12\,м$; $0{,}15\,м$; $0{,}18\,м$ соответственно.



e22,%
1,6
а)
0
t, с
0,0005
0,001
0,0015
0,002
e22,%
1,6
б)
0
t, с
0,0005
0,001
0,0015
0,002
e22,%
1,2
в)
0
t, с
0,0005
0,001
0,0015
0,002
e22,%
1,2
г)
0
t, с
0,0005
0,001
0,0015
0,002

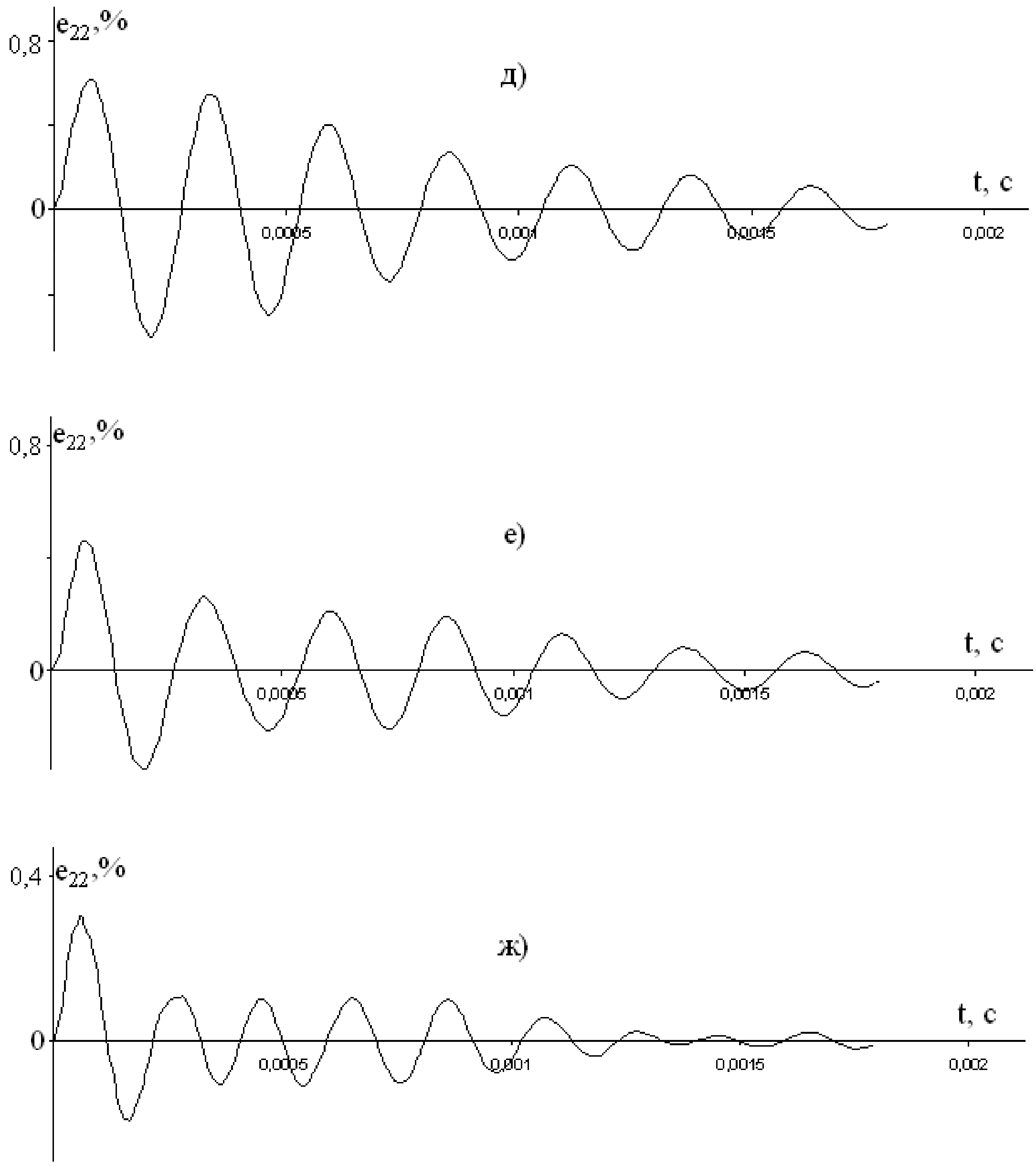


Рис. 4.16

Окружные деформации во времени в центральном сечении (а) на внешней поверхности для изотропной цилиндрической оболочки и в точках со смещением относительно центра на $0{,}03\,м$ **(б);** $0{,}06\,м$ **(в);** $0{,}09\,м$ **(г);** $0{,}12\,м$ **(д);** $0{,}15\,м$ **(е);** $0{,}18\,м$ **(ж) соответственно**

В результате обработки осциллограмм деформаций формировалась целевая функция для решения задачи идентификации.

При этом в качестве идентифицируемых параметров вязкоупругой ортотропной модели поведения цилиндрической оболочки были следующие параметры: E_1, E_2, E_3, E_1^∞, E_2^∞, E_3^∞, G_{13}, G_{13}^∞, ν_{12}, ν_{23}, ν_{13}, β. Ограничения задавались следующими неравенствами:

$$40\,ГПа \le E_1 \le 70\,ГПа;\; 10\,ГПа \le E_2 \le 20\,ГПа;\; 10\,ГПа \le E_3 \le 20\,ГПа;$$
$$2\,ГПа \le G_{13} \le 7\,ГПа;\; 20\,ГПа \le E_1^\infty \le 70\,ГПа;\; 5\,ГПа \le E_2^\infty \le 20\,ГПа;$$
$$5\,ГПа \le E_3^\infty \le 20\,ГПа;\; 1\,ГПа \le G_{13}^\infty \le 7\,ГПа;\; 0{,}1 \le \nu_{12} \le 0{,}4; \qquad (4.7)$$
$$0{,}1 \le \nu_{13} \le 0{,}4;\; 0{,}2 \le \nu_{23} \le 0{,}5;\; 10000\; c^{-1} \le \beta \le 200000\, c^{-1};$$
$$E_1 \ge E_1^\infty;\; E_2 \ge E_2^\infty;\; E_3 \ge E_3^\infty;\; G_{13} \ge G_{13}^\infty.$$

Результаты анализа чувствительности целевой функции по проектным переменным представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7

Значения одномерных показателей чувствительности

№	Y	S_y	S_y^{tot}	S_z	S_z^{tot}
1	E_1	0,0401401	0,0299167	0,9700834	0,9598598
2	E_2	0,8190824	0,6055030	0,3944970	0,1809177
3	E_3	0,0171223	0,0702201	0,9297799	0,9828777
4	G_{13}	0,0109829	0,0037815	0,9962184	0,9890171
5	E_1^∞	0,0222458	0,0217422	0,9782578	0,9777757
6	E_2^∞	0,0485990	0,1156046	0,8843955	0,9514009
7	E_3^∞	0,0115001	0,0047132	0,995287	0,9884999
8	G_{13}^∞	0,0189765	0,0009481	0,9990519	0,9810235
9	ν_{12}	0,0061985	0,0819990	0,9180010	0,9938015
10	ν_{23}	0,0134318	0,0028044	0,997196	0,9865682
11	ν_{13}	0,0000834	0,0039637	0,996036	0,9999166
12	β	0,0156470	0,0327576	0,9672424	0,9843530

Из таблицы 4.7 видно, что наиболее существенной переменной является окружной модуль упругости E_2. Роль остальных переменных невелика (не более 19%). Следовательно, эти переменные слабее влияют на величину целевой функции. В такой ситуации несущественные переменные можно фиксировать.

В результате анализа чувствительности было получено минимальное значении целевой функции со значениями проектных переменных: $E_1 = 62{,}97\,ГПа$; $E_2 = 15{,}47\,ГПа$; $E_3 = 12{,}03\,ГПа$; $G_{13} = 6{,}69\,ГПа$; $E_1^{\infty} = 32{,}93\,ГПа$; $E_2^{\infty} = 12{,}83\,ГПа$; $E_3^{\infty} = 8{,}87\,ГПа$; $G_{13}^{\infty} = 5{,}44\,ГПа$; $\nu_{12} = 0{,}39$; $\nu_{23} = 0{,}05$; $\nu_{13} = 0{,}03$; $\beta = 54687{,}50\,c^{-1}$.

В первом приближении была решена однопараметрическая задача оптимизации для существенной переменной E_2. Идентифицированное значение $E_2 = 14{,}0\,ГПа$ совпадает с заданным значением. Затем была решена задача идентификации двенадцати параметров, результаты которой приведены в таблице 4.8.

Таблица 4.8

Идентифицируемые параметры ортотропной вязкоупругой модели поведения материала цилиндрической оболочки

№	Механические характеристики	Метод *(отклонения)*		
		Точное значение	Первый подход *(отклонения* $\Delta_i,\%$*)*	Второй подход *(отклонения* $\Delta_i,\%$*)*
1	$E_1, ГПа$	57,00000	60,52824 *(6,19)*	62,36012 *(9,40)*
2	$E_2, ГПа$	14,00000	13,57633 *(3,03)*	15,09552 *(7,83)*
3	$E_3, ГПа$	14,00000	11,60033 *(17,14)*	13,43565 *(4,03)*
4	$G_{13}, ГПа$	5,70000	4,924695 *(13,60)*	5,79061 *(1,59)*
5	$E_1^{\infty}, ГПа$	45,60000	47,55389 *(4,28)*	50,35098 *(10,42)*
6	$E_2^{\infty}, ГПа$	11,20000	11,07771 *(1,09)*	11,42211 *(1,98)*
7	$E_3^{\infty}, ГПа$	11,20000	8,00191 *(28,55)*	10,17180 *(9,18)*
8	$G_{13}^{\infty}, ГПа$	4,60000	3,89023 *(15,43)*	4,02466 *(12,51)*
9	ν_{12}	0,27700	0,25640 *(7,44)*	0,25116 *(9,33)*
10	ν_{23}	0,40000	0,20742 *(48,15)*	0,29462 *(26,34)*
11	ν_{13}	0,27700	0,14623 *(47,21)*	0,40947 *(47,82)*
12	β, c^{-1}	50000,00	42457,78 *(15,09)*	58004,17 *(16,01)*

Из таблицы 4.8 видно, что плоскостные жесткостные характеристики определяются достаточно хорошо (погрешность менее 10%), а трансверсальные характеристики, особенно коэффициенты Пуассона, идентифицируются с гораздо меньшей точностью.

Далее исследовалось влияние значения показателя чувствительности на погрешность определения параметра. Обычно для качественной оценки и более точной информации о характере и силе связи между двумя факторами используется коэффициент корреляции [46]. Если связь отсутствует, то коэффициент корреляции равен нулю, если связь функциональная, то он равен единице.

Коэффициент корреляции влияния показателя чувствительности на погрешность определения параметра равен 0,5 – это означает, что на 50% погрешность определения идентифицируемого параметра обусловлена значением его показателя чувствительности, и на 50% – влиянием прочих факторов, например погрешностью определения экспериментальной информации.

Необходимо отметить, что возможная неодинаковая чувствительность целевой функции в различных областях пространства параметров затрудняет использование только результатов анализа чувствительности для отбора параметров, нуждающихся в уточнении.

По результатам тестовых расчетов можно констатировать, что чем большую роль при анализе чувствительности играет параметр, тем с меньшей погрешностью он определяется в результате идентификации. Для параметров, чья роль при анализе чувствительности несущественная, нельзя однозначно сказать с какой погрешностью удастся его идентифицировать.

Многочисленные тестирования подходов глобальной оптимизации показали, что наиболее приемлемым для решения задачи оптимизации рассматриваемой целевой функции среднеквадратического рассогласования расчетных и экспериментальных значений деформаций оказался подход, основанный на синтезе методов глобального анализа чувствительности целевой функции и последующего уточнения, полученного начального приближения прямыми методами локальной оптимизации. Поэтому в дальнейшем для решения прикладных задач использовался этот подход.

Предлагаемый расчетно-экспериментальный метод идентификации параметров определяющих соотношений вязкоупругого деформирования композитных материалов открывает возможность адекватного описания динамического поведения элементов конструкций из исследуемых материалов.

Контрольные вопросы.

1. Перечислите математические модели композитных оболочек?
2. Перечислите методы решения задач динамического деформирования композитных оболочек?
3. В чем заключается методика структурной идентификации?
4. В чем заключается методика параметрической идентификации?
5. Для чего нужно проводить анализ чувствительности?
6. Какие факторы необходимо учитывать при выборе метода оптимизации?
7. Перечислите наиболее популярные методы прямого поиска?
8. Какие есть недостатки у методов прямого поиска?
9. В чем отличие детерминированных и стохастических методов глобальной оптимизации?
10. Чем определяется точность решения построенной системы уравнений?
11. В чем заключается применение вариационно-разностного метода?
12. В чем состоит алгоритм явной схемы интегрирования по времени?
13. Как определяется эффективность параллельного алгоритма?
14. Как определяется ускорение параллелизации алгоритма?
15. Как осуществляется верификация методика решения задач динамики оболочек вращения?
16. Каким образом осуществляется тестирование метода идентификации динамического деформирования оболочек вращения?

Список литературы

1. Образцов, И. Ф. Роль иерархического адаптивного подхода в механике гетерогенных сред / И. Ф. Образцов, Ю. Г. Яновский // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 6. – С. 95–117.

2. Басистов, Ю. А. Об идентификации математических моделей вязкоупругих сред в реологии и электрореологии / Ю. А. Басистов, Ю. Г. Яновский // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 2001. – Т. 7, № 1. – С. 114–130.

3. Быков, Д. Л. Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры / Д. Л. Быков, Д. Н. Коновалов // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 5. – С. 189–205.

4. Образцов, И. Ф. Применение метода минимакса для идентификации уравнения состояния вязкоупругих сред / И. Ф. Образцов, Ю. А. Басистов, Ю. Г. Яновский // Докл. РАН. – 1994. – Т. 335, № 4. – С. 455–458.

5. Алфутов, Н. А. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Л. П. Таирова // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. – Т. 30. – С. 16–31.

6. Суворова, Ю. В. Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации / Ю. В. Суворова [и др.] // Механика композитных материалов. – 1989. – № 1. – С. 150–157.

7. Матвеенко, В. П. Идентификация упругих постоянных композитных оболочек на основе статических и динамических экспериментов / В. П. Матвеенко, Н. А. Юрлова // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 3. – С. 12–20.

8. Каюмов, Р. А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций / Р. А. Каюмов // МТТ. – 2004. – № 2. – С. 94–103.

9. Рикардс, Р. Б. Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов / Р. Б. Рикардс, А. Чате // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 1. – С 3–16.

10. Кокошвили, С. М Вычисление релаксационных спектров по результатам динамических испытаний / С. М. Кокошвили, В. П. Тамуж, Ю. О. Янсон // Механика полимеров. – 1971. – Т. 2. – С. 349–353.

11. Юношев, А. С. Разработка методики полимерного разрезного стержня Гопкинсона / А. С. , В.В. Сильвестров// Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 212–220.

12. Деформация и разрушение цилиндрических оболочек из стеклоэпоксида при внутреннем нагружении / В. И. Цыпкин [и др.] // Механика композит. материалов. – 1981. – № 2. – С. 249–255.

13. Особенности динамического деформирования и разрушения цилиндрических стеклопластиковых оболочек при внутреннем импульсном нагружении / А. Г. Федоренко [и др.]// Механика композитных материалов. – 1983. – № 1. – С. 90–94.

14. Демпфирующие характеристики композитных материалов, изготовленных намоткой / А. Г. Демешкин [и др.] // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 1. – С. 190–195.

15. Реакция полусферических оболочек из ВВ на действие импульсной нагрузки (экспериментально – расчетное исследование)./ Л. В. Володина [и др.] // V Харитоновские тематические научные чтения: тр. Междунар. конф. Саров, 2003. – С. 316–322.

16. Соболь, И. М. Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей / И. М. Соболь // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 9. – С. 43–52.

17. Гилл, Ф. Численные методы условной оптимизации / Ф. Гилл, У. Мюррэй. – М.: Мир, 1977.

18. Евтушенко, Ю. Г. Метод половинного деления для глобальной оптимизации функции многих переменных / Ю. Г. Евтушенко, В. А. Ратькин // Техническая кибернетика. – 1987. – № 1. – С. 119–127.

19. Rinnoy Kan, A. H. G. Stochastic Global optimization Methods / A. H. G. Rinnoy Kan, G. T. Timmer // Mathematical programming. –1987. – № 39. – P. 27–78.

20. Москвитин, В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 372 с.

21. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

22. Ржаницын, А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени / А. Р. Ржаницын. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 252 с.

23. Кукуджанов, В. Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред / В. Н. Кукуджанов // Успехи механики. – 1985. – Т. 8, № 4. – С. 21–65.

24. Годунов, С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1973.

25. Курант, Р. О разностных уравнениях математической физики / Р. Курант, Фридрихс, Г. Леви // Успехи математических наук. – 1940. – Вып. 8. – С. 112–125.

26. Баженов, В. Г. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций / В. Г. Баженов, Д. Т. Чекмарев // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 5. – С. 156–173.

27. Панов, Д. Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных / Д. Ю. Панов. – М.: Гостехиздат, 1957.

28. Гегель, Э. И. Метод эквивалентного соответствия в линейных динамических задачах вязкоупругости / Э. И. Гегель, Г. С. Ларионов // ДАН СССР. – 1975. № 5. – С. 1098–1101.

29. Бадалов, Ф. Б. Исследование влияния ядра наследственности на решение линейных и нелинейных динамических задач наследственно-деформируемых систем / Ф. Б. Бадалов, Б. А. Худаяров, А. Абдукаримов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2007. – № 4. – С. 31–39.

30. Абросимов, Н. А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций: Монография / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.

31. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М.: Гостехиздат, 1948.

32. Рихтмаер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмаер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972.

33. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1980. – 536 с.

34. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и коснтукции. / Э. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1983. – 478 с.

35. Соболь, И. М. Численные методы Монте-Карло / И. М. Соболь. – М.: Наука, 1973.

36. Ашкенази, Е. К. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. / Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов. - Л.: Машиностроение, 1980. – 147 с.

37. Соболь, И. М. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности / И. М. Соболь // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1976. – Т. 16, № 5. – С. 1332–1337.

38. Растригин, Л. А. Адаптация случайного поиска / Л. А. Растригин, К. К. Рипа, Г. С. Тарасенко. – Рига: Зинатне, 1978. – 243 с.

39. Антонов, А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI: Учебное пособие / А. С. Антонов. – М.: изд-во МГУ, 2004. – 71 с.

40. Гергель, В. П. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных машин. Учебное пособие / В. П. Гергель, Р. Г. Стронгин. – Изд. 2-е. Изд-во ННГУ, 2003.

41. Бартеньев, О. В. Современный Фортран / О. В. Бартеньев. – М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 2000. – 448 с.

42. Баженов, В. Г. Пакет прикладных программ «Динаика-2» / В. Г. Баженов, С. В. Зефиров, А. В. Кочетков, и [др.] // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций. Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. ун-т. – 1987. – С. 4–13.

43. Володина, Л. В. Динамические вязкоупругие свойства полимерных конструкционных материалов: дис…канд. физо-мат наук: 01.02.06 / Володина Людмила Ивановна. – Саров, 1997. – 150 с.

44. Зотов, Е. В. Миниатюрное сферическое взрывное нагружающее устройство / Е. В. Зотов, Н. Н. Гердюков, Л. В. Володина// Физика горения и взрыва. – 1996. – Т. 32, № 2. – С. 134–140.

45. Физика взрыва. / Ф. А. Баум [и др.]. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

46. Гусаров, В. М. Теория статистики / В. М. Гусаров – М.: Аудит, ЮНИТИ, 2001. – 247 с.

Николай Анатольевич Абросимов
Надежда Александровна Новосельцева

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Учебно-методическое пособие