Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Национальный исследовательский университет
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Высокопроизводительные параллельные вычисления
на кластерных системах

Высокопроизводительные вычисления в задачах глобальной оптимизации

К.А. Баркалов
В.П. Гергель

Постановка задачи

Найти минимум функции $\varphi(y)$:

$$\varphi\left(y^*\right) = \min\left\{\varphi(y) : y \in D, g_j(y) \le 0, 1 \le j \le m\right\},$$

$$D = \left\{y \in R^N : a_i \le y_i \le b_i, 1 \le i \le n\right\}.$$

Здесь

- $\varphi(y)$ – минимизируемая функция (критерий),
- $g_j(y)$, $1 \le j \le m$ – функциональные ограничения,
- D – область поиска,
- y – вектор варьируемых параметров

Допустимая область поиска

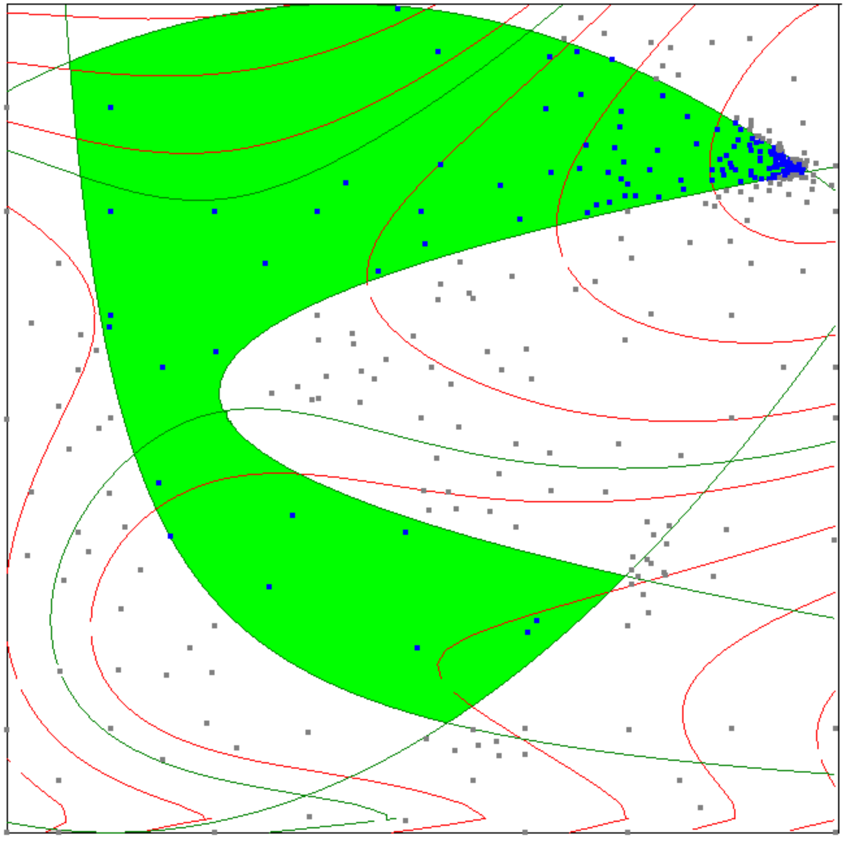
$$Q = \left\{y : y \in D, g_j(y) \le 0, 1 \le j \le m\right\}.$$

Поиск решения на неравномерной сетке

Построение неравномерных адаптивных покрытий области поиска

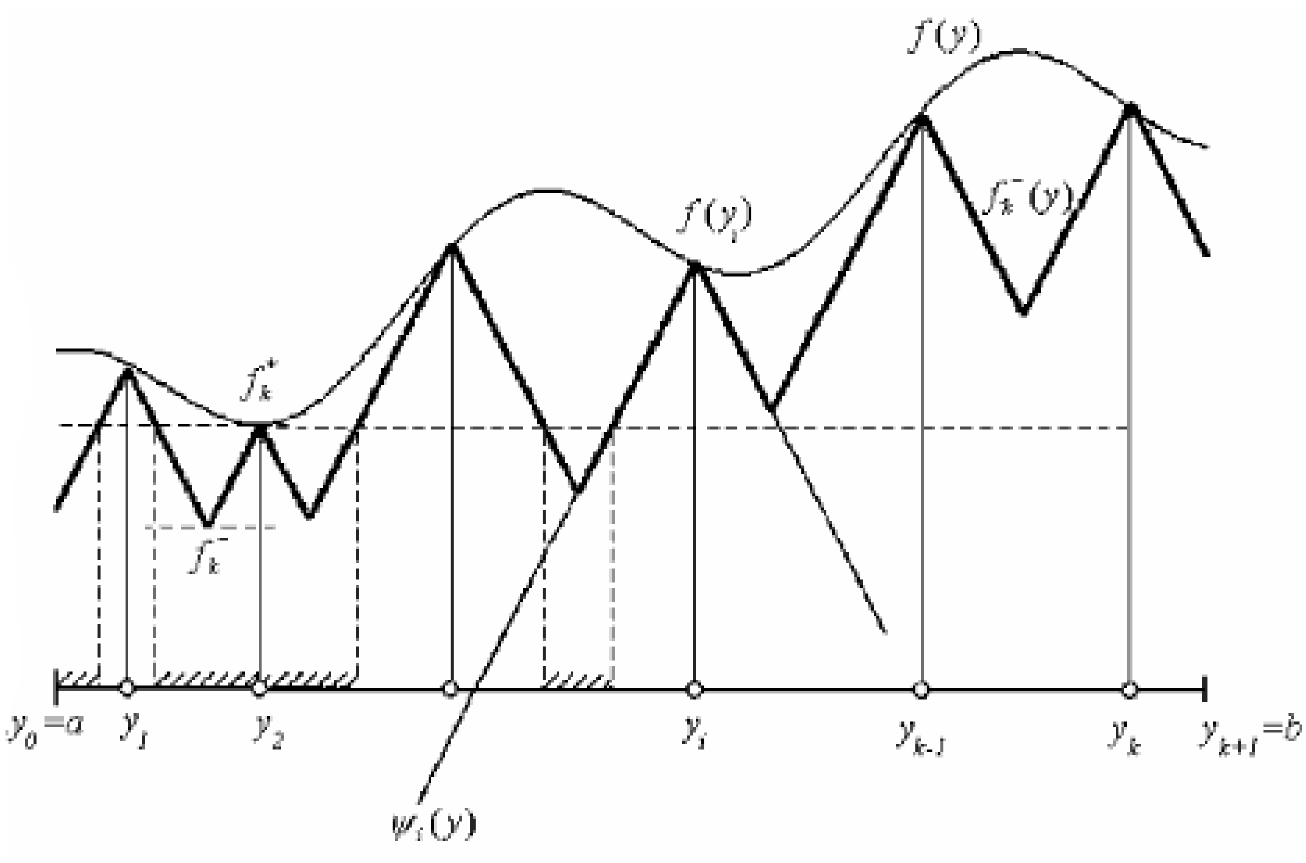
Метод ориентирован на построение существенно более плотной сетки только в окрестности глобально-оптимального решения задачи, чем вне этой окрестности.

$$y^{k+1} = G_k\left(y^1, \ldots, y^k; Z^1, \ldots, Z^k\right), \; k \geq t$$



Индексный алгоритм, точность Δ=0.001, K=346 итераций

Алгоритм глобального поиска



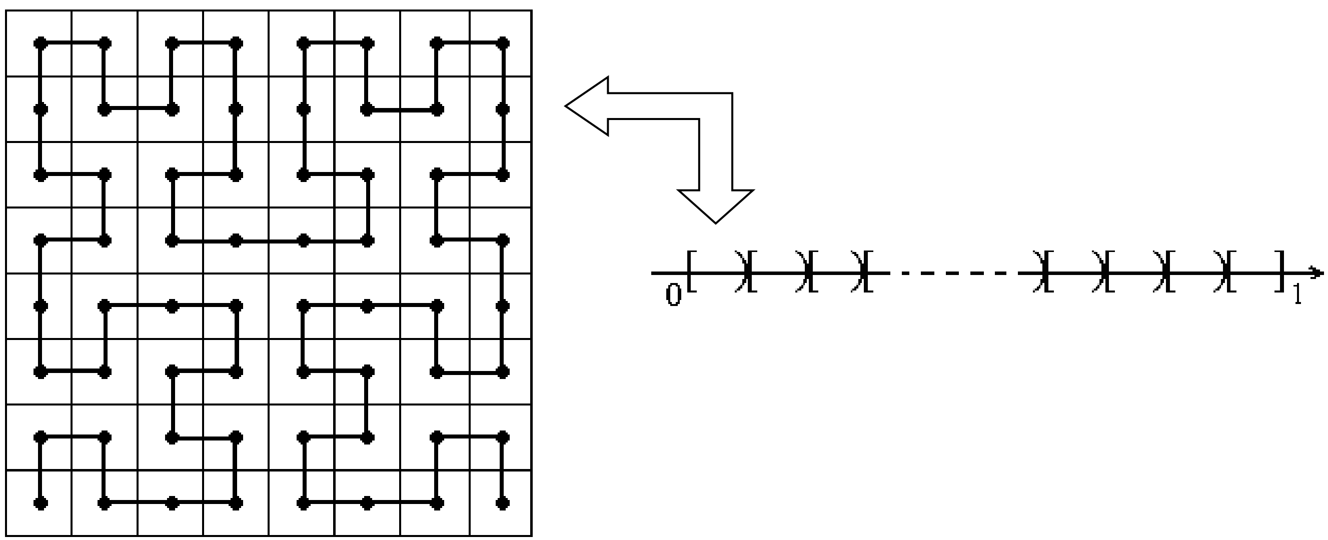
Редукция размерности

Используя отображение (*развертку*) Пеано $\{y(x): 0\le x\le 1\}=D$, задачу (1) можно свести к одномерной задаче

$$\varphi(y^*) = \min\{\ \varphi(y): y\in D\} = \min\{\ \varphi(y(x)): x\in[0,1]\ \}\ .$$

При этом, если $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица, то $\varphi(y(x))$ удовлетворяет условию Гельдера.

$$\left|\varphi(y(x_1)) - \varphi(y(x_2))\right| \le 4L\sqrt{N}\left(\left|x_1 - x_2\right|\right)^{1/N}$$



[2] Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.

Основы подхода: принцип распараллеливания

Как распараллеливать алгоритмы глобального поиска:

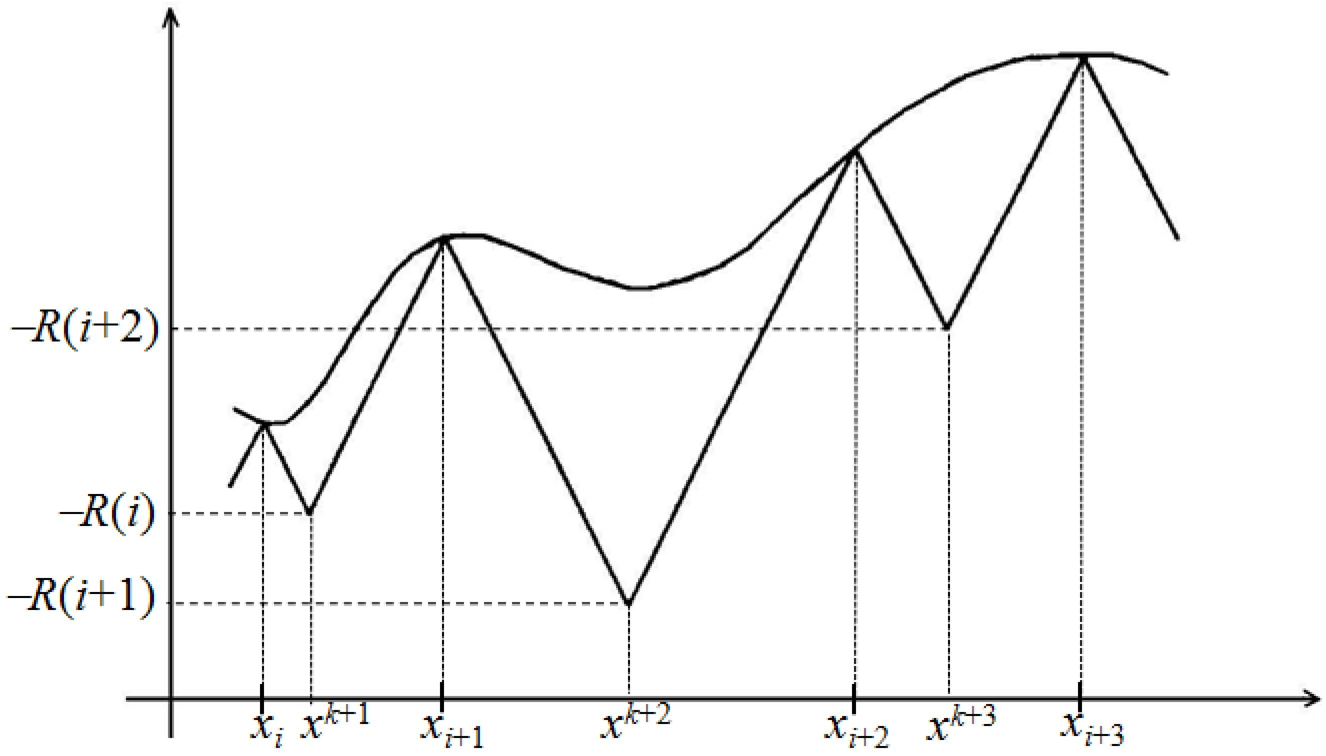
- Разделение области поиска?
- Распараллеливание правил алгоритма?

Основная идея – параллельное вычисление значений оптимизируемой функции в нескольких точках области поиска

1. Стронгин Р.Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // ЖВМ. 1991. Т.31, №8. С. 1173–1185.
2. V.A. Grishagin, Ya.D. Sergeyev, R.G. Strongin, Parallel characteristical algorithms for solving problems of global optimization. *Journal of Global Optimization*, vol. 10(2), pp. 185–206. (1997).
3. V.P. Gergel, Ya.D. Sergeyev, Sequential and parallel algorithms for global minimizing functions with lipschitzian derivatives. Computers and Mathematics with Applications, 37(4-5), 163–179, 1999.
4. Sergeyev Ya.D., Grishagin V.A. Parallel asynchronous global search and nested optimization scheme // J. Comput. Anal. Appl. 2001. V.3, №2. P.123–145.

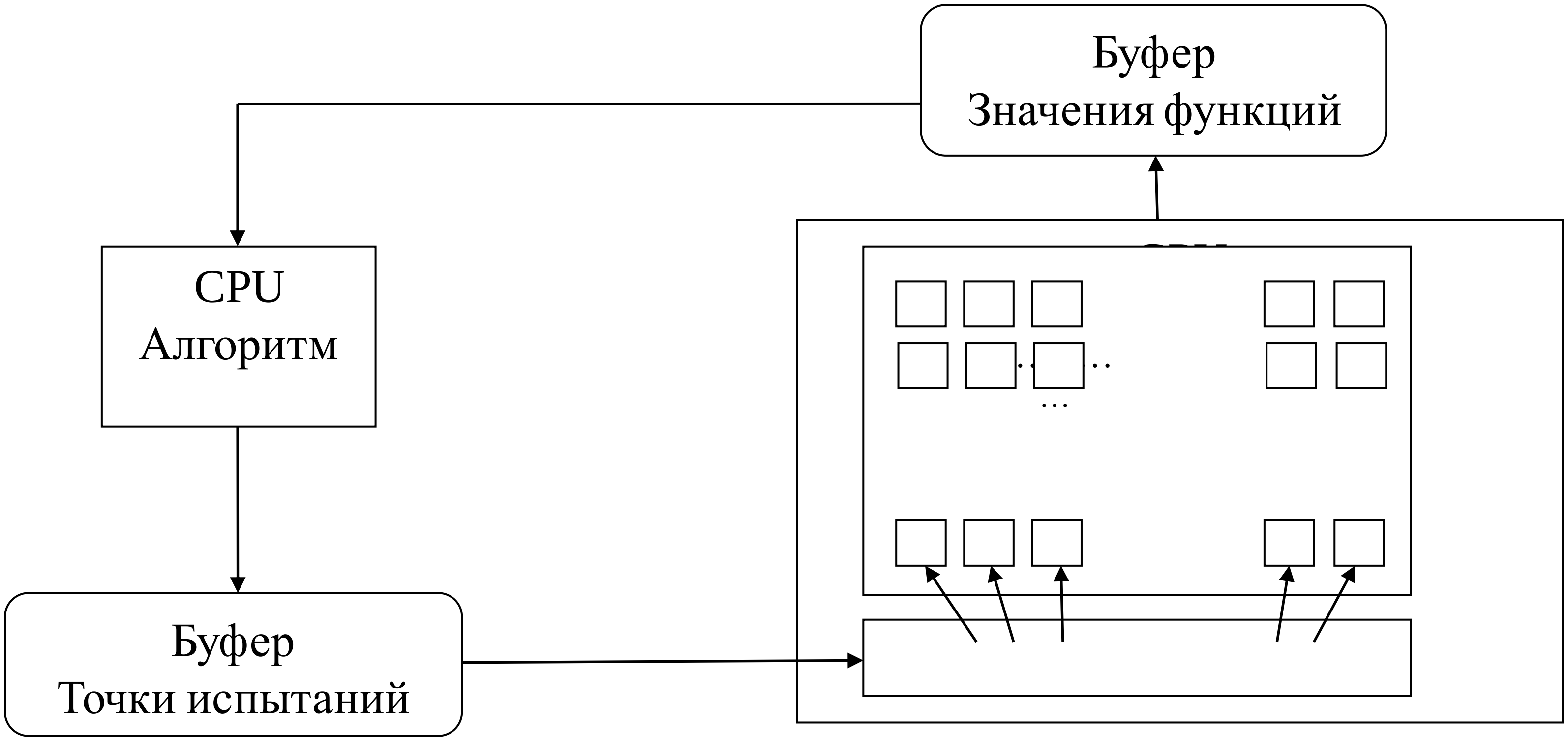
Параллельные вычисления: *общая память…*

- Решается одна задача
- Поисковая информация хранится в общей памяти
- На каждой итерации параллельно проводится *p* испытаний в *p* лучших точках, т.е. в интервалах с наибольшими характеристиками



Параллельные вычисления: использование GPU…

Параллельный характеристический алгоритм может быть эффективно реализован на GPU.



Параллельные вычисления: использование GPU…

Ускорение по времени (по отношению к параллельному алгоритму на CPU с использованием 32 потоков).

p	$N = 4$		$N = 5$	
	Simple	Hard	Simple	Hard
100	2.3	2.49	2.9	4.09
200	2.35	2.68	2.99	6.72
300	1.75	2.93	3.32	7.17
400	2.37	2.85	3.58	7.19
500	2.38	2.41	3.05	6.3
800	1.94	3.38	1.59	5.56
1000	2.45	3.07	1.98	6.59

Параллельные вычисления: использование GPU…

Ускорение по итерациям (по отношению к параллельному алгоритму на CPU с использованием 32 потоков)

p	$N = 4$		$N = 5$	
	Simple	Hard	Simple	Hard
100	3.07	3.55	4.05	4.79
200	5.78	6.90	7.45	14.51
300	6.11	11.70	12.57	23.12
400	11.43	14.38	17.80	31.21
500	13.54	14.98	18.83	33.26
800	17.96	33.46	14.19	47.68
1000	27.42	37.40	21.91	68.21

Подана статья в Journal of Global Optimization.

Многошаговая схема

Решение многомерной задачи оптимизации при помощи *многошаговой схемой редукции размерности* сводится к решению последовательности «вложенных» одномерных задач

$$\min \varphi(y) = \min_{y_1 \in [a_1, b_1]} \dots \min_{y_1 \in [a_N, b_N]} \varphi(y_{1,\dots} y_N)$$

Решение многомерной задачи сводится к решению одномерной задачи вида

$$\varphi^* = \min_{y \in D} \varphi(y) = \min_{y_1 \in [a_1, b_1]} \tilde{\varphi}_1(y_1)$$

где

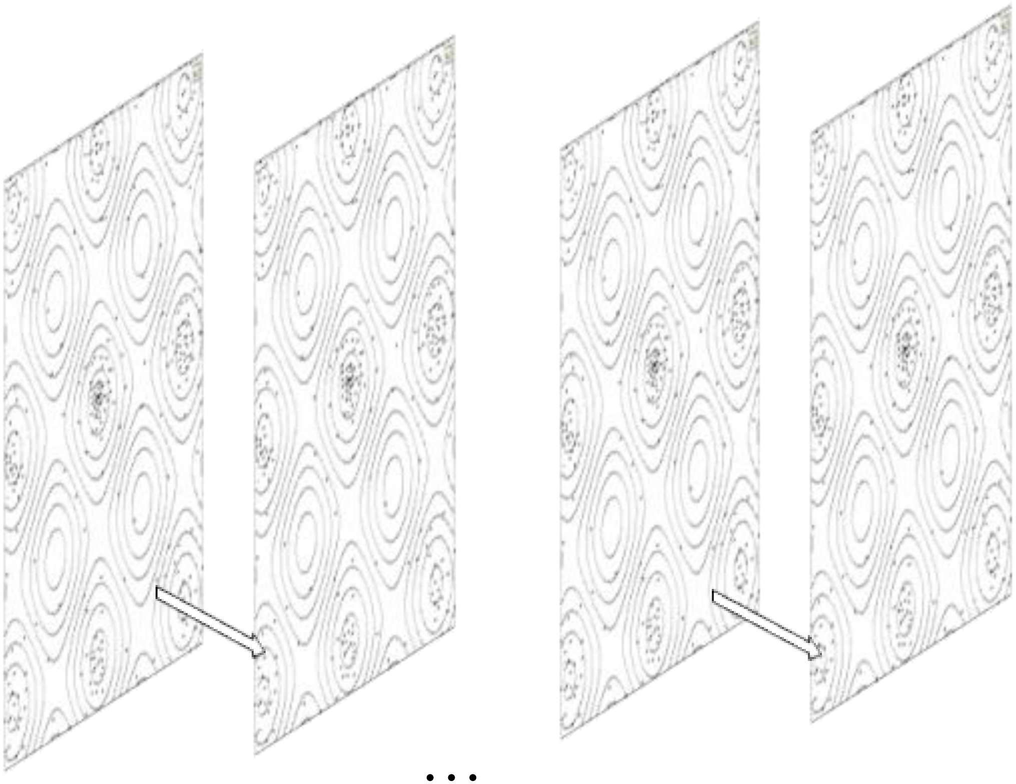
$$\tilde{\varphi}_i(y_i) = \varphi_i(y_1, \dots, y_i) = \min_{y_{i+1} \in [a_{i+1}, b_{i+1}]} \varphi_{i+1}(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}), 1 \le i < N.$$

Многошаговая схема

- Вложенные подзадачи можно укрупнить, проведя минимизацию по нескольким переменным сразу. Например,

$$\min_{y\in D}\varphi(y)=\min_{y_1,y_2}\left[\min_{y_2,y_3}\left[\ldots\left[\min_{y_{n-1},y_n}\varphi(y)\right]\right]\right]$$

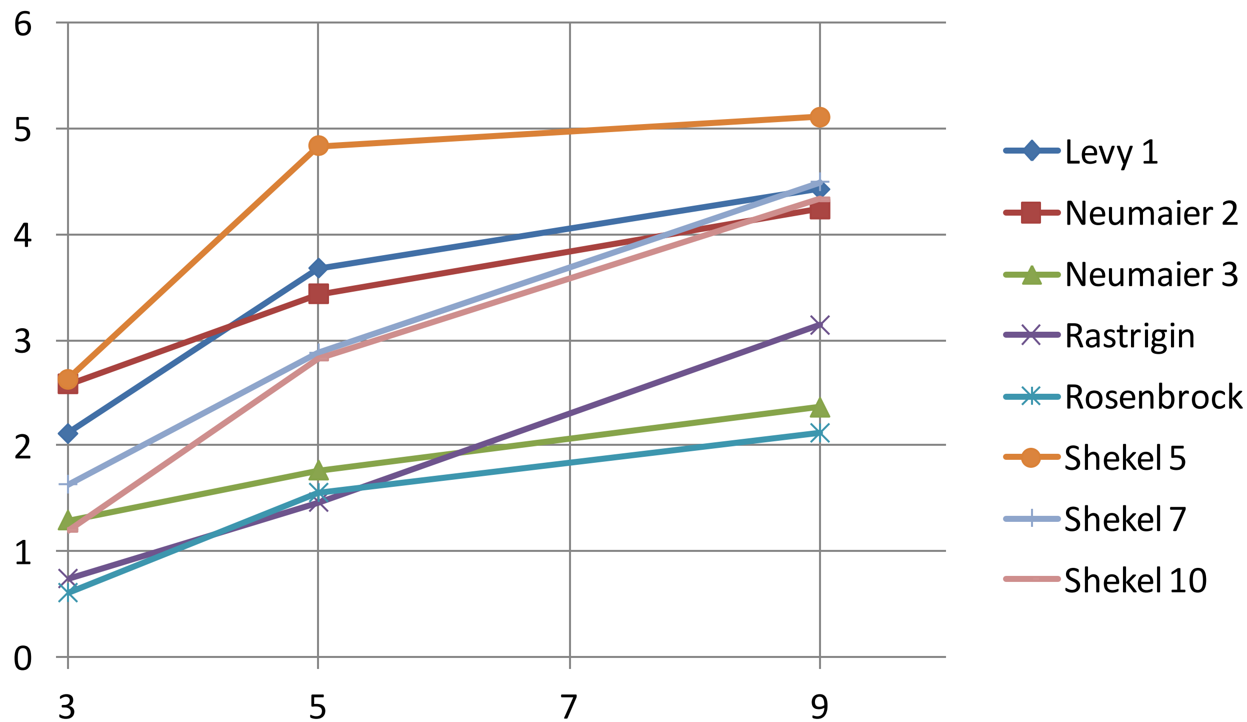
Многошаговая схема



$$\min_{y\in D}\varphi(y) = \min_{y_1,y_2} \quad \min_{y_2,y_3} \quad \ldots \quad \min_{y_{n-3},y_{n-2}} \quad \min_{y_{n-1},y_n}\varphi(y)$$

Параллельные вычисления: *распределенная память*

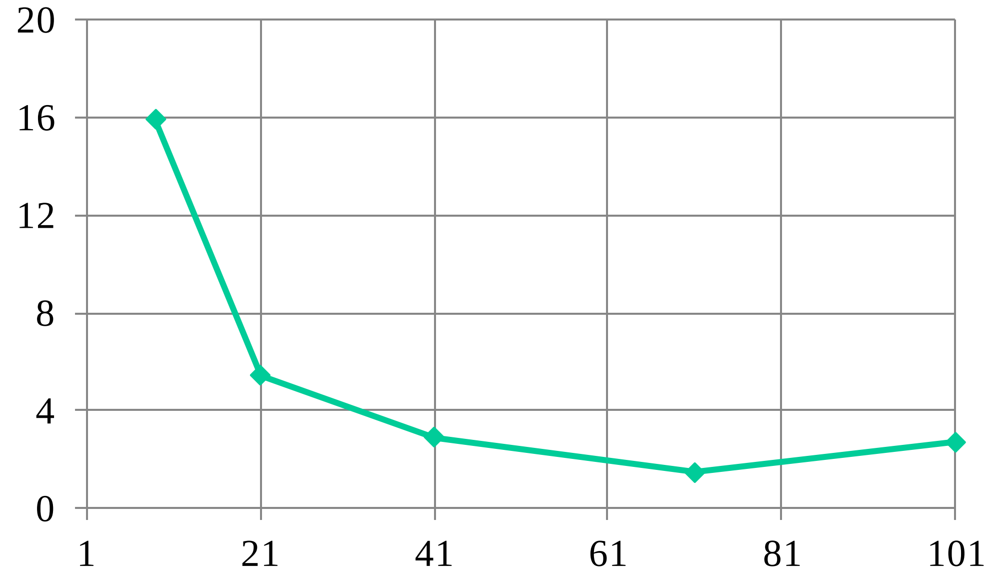
- Решение вложенных задач можно проводить параллельно, используя параллельный характеристический алгоритм
- Решение вложенных задач может проводиться независимо друг от друга, т.е. на распределенной памяти.



Параллельные вычисления: *распределенная память*

Пример (3): $\varphi(y) = 10N - \sum_{i=1}^{N}\left(y_i^2 - 10\cos(2\pi y_i)\right)$, $-1.2 \le y_i \le 1.1$, $1 \le i \le N$.

Procs	*T*	φ^*
9	15 938	0.26
21	5 448	0.18
41	2 911	0.19
71	1 453	0.27
101	2 697	0.18



Спасибо за внимание!

barkalov@vmk.unn.ru