Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный Исследовательский Университет

Многоэтапные задачи оптимизации

Коротченко А.Г.

Постановка задачи

Будем называть задачу ***многоэтапной***, если процесс нахождения её решения может быть разбит на этапы, каждый из которых связан с решением своей задачи и решение каждой следующей задачи зависит от решения предыдущей.

При этом будем считать, что каждая задача i -го этапа определяется набором параметров, которые преобразуются (пересчитываются) от этапа к этапу.

Будем также характеризовать многоэтапную задачу тем обстоятельством, что каждая задача этапа носит однотипный характер и задача одного этапа отличается от задачи другого набором параметров, её определяющих.

Постановка задачи

В общем случае под решением задачи i-го этапа будем понимать точку, принадлежащую допустимому множеству задачи и удовлетворяющую заданным требованиям, которые определяются функцией-критерием (функциями-критериями).

В частности, такие требования могут состоять в минимизации указанных функций-критериев на соответствующем множестве.

Задача i-го этапа:

$$F_{1i}(Y(i), q_{1i}, ..., q_{si}) => \min,$$
$$F_{2i}(Y(i), q_{1i}, ..., q_{si}) => \min,$$
$$Y(i) \in D_i \subseteq R^m,$$
$$q_{ki} \in S_{ki} \subset R,\ k = 1, ..., s.$$

$Y^*(i)$ - решение задачи i-го этапа.

Постановка задачи

Переход к $(i+1)$-му этапу:

$$D_{i+1} = G_i(D_i, Y^*(i))$$
$$q_{k\,i+1} = p_i(q_{1i},\ldots,q_{si}, Y^*(i))\ ,\ k = 1,\ldots,s,$$
$$S_{k\,i+1} = P_i(\mathrm{S}_{ki}, Y^*(i)).$$

Задача $(i+1)$-го этапа:

$$F_{1i+1}(Y(i), q_{1i+1},\ldots,q_{s\,i+1}) => \min,$$
$$F_{2i+1}(Y(i), q_{1i+1},\ldots,q_{s\,i+1}) => \min,$$
$$Y(i+1) \in D_{i+1} \subseteq R^m,$$

$$q_{k\,i+1} \in S_{k\,i+1} \subset R,\ k = 1,\ldots,s,$$
$$i = 1, 2, \ldots.$$

Постановка задачи

Функции-критерии, отнесённые к задаче i-го этапа, для определённости будем называть ***локальными критериями***, а каждую задачу i-го этапа будем называть ***частной задачей***.

Наряду с локальными критериями многоэтапная задача характеризуется интегральным критерием, отнесённым ко всей многоэтапной задачи, которую будем называть ***общей задачей***.

Постановка задачи

Отметим, что рассматриваемые задачи могут быть сформулированы на языке перевода некоторой многошаговой системы из заданного начального состояния в априори неизвестное конечное состояние, определяемое в процессе её функционирования.

При этом, множество возможных состояний системы на каждом шаге можно задавать с помощью точечно-множественного отображения.

Качество перевода системы из одного состояния в другое характеризуется локальным критерием, определённым на множестве возможных состояний системы. Локальность критерия понимается здесь так, что он связан с задачей конкретного шага или этапа.

Наряду с локальным критерием система может характеризоваться и интегральным критерием, оценивающим поведение системы в целом.

Постановка задачи

Таким образом, в процессе решения многоэтапной задачи конструируется последовательность, состоящая из решения задач каждого этапа, относительно которой может быть сформулирован интегральный критерий.

Интегральный критерий может носить асимптотический характер и выражать сходимость или скорость сходимости указанной последовательности.

Постановка задачи

Интегральный критерий может быть также связан с отрезками формируемой последовательности.

При этом может быть выделен подкласс многоэтапных задач, удовлетворяющих следующему условию.

Из того факта, что поведение системы, порождённой данной задачей является оптимальным на каждом шаге или этапе, с точки зрения локального критерия следует, что оно будет оптимальным и с точки зрения интегрального критерия. Такие многоэтапные задачи будем называть ***М - задачами.***

М-задачи

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j(X(j)) \Rightarrow \max,$$

$$X(1) \in D_1(X(0)),\ X(0) \in D_0, \tag{1}$$

$$X(j) \in D_j(X(j-1)),\ j = 2,\ldots,m,$$

$$X(j) = (x_1(j),\ldots,x_n(j)),\ D_j(X(j-1)) \subseteq R^n,\ j = 1,\ldots,m.$$

Здесь $X(0)$ - фиксированный элемент множества D_0, m - произвольное натуральное число.

M-задачи

Рассмотрим также задачу:

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j(X(j)) \Rightarrow \min,$$

$$X(1) \in D_1(X(0)),\ X(0) \in D_0, \qquad (2)$$

$$X(j) \in D_j(X(j-1)), j = 2,\dots,m,$$

$$X(j) = (x_1(j),\dots,x_n(j)),\ D_j(X(j-1)) \subseteq R^n,\ j = 1,\dots,m.$$

Нетрудно показать, что задача (2) сводится к задаче (1). Далее мы будем рассматривать задачу (1).

М-задачи

Наряду с задачей (1) мы также будем рассматривать следующие задачи:

$$Q_1(X(1)) \Rightarrow \max, \qquad (3)$$
$$X(1) \in D_1(X(0)),\ X(0) \in D_0,$$

$$Q_j(X(j)) \Rightarrow \max, \qquad (4)$$
$$X(j) \in D_j(X(j-1)),\ X(j-1) \in D_{j-1}(X(j-2)),\ j = 2,\dots,m.$$

M-задачи

Пусть $X'(1)$ - решение задачи (3) для фиксированного $X(0) \in D_0$ (при условии его существования). Пусть также $X'(j)$ - решение задачи (4) при $X(j-1) = X'(j-1)$, $j = 2,\ldots,m$ (при условии его существования).

Назовём задачу (1) M-задачей, если для любого $m = 1, 2,\ldots,$ её решением является набор $< X'(1),\ldots, X'(m) >$.

М-задачи

Данные задачи возникают при конструировании формул численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, минимизирующих число вычислений их правых частей с учётом выполнения ограничений, определяемых точностью вычислений.

Указанные классы характеризуются тем, что число этапов (шагов) в каждом из рассматриваемых классов задач априори неизвестно, а определяется в процессе решения задачи.

М-задачи

Рассмотрим M-задачу, возникающую при конструировании алгоритма численного интегрирования одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием разностной схемы.

При этом шаги интегрирования выбираются таким образом, чтобы минимизировать число вычислений правых частей системы при условии выполнения ограничений, определяемых точностью вычислений.

М-задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$Y' = B(x)Y + b(x),\ Y(x_0) = Y_0, \qquad (5)$$
$$Y = Y(x) = (y^1(x), \ldots, y^n(x)),\ x_0 \le x \le t,$$

предполагая, что её решение $Y = Y(x)$ единственно и четырежды непрерывно дифференцируемо на отрезке $[x_0, t]$. Здесь значение t неизвестно априори и определяется в процессе интегрирования системы.

М-задачи

Для определения численных значений $Y_i = Y(x_i)$, $i = 1, 2 \ldots$, будем использовать конечно разностную схему:

$$Y_i = a_{i-3} Y_{i-3} + a_{i-2} Y_{i-2} + a_{i-1} Y_{i-1} + h_i a_i q_i, \qquad (6)$$

М-задачи

где

$$q_i = B(x_i)Y_i + b(x_i),\ Y_i = (y_i^1, \ldots, y_i^n),$$

$$a_{i-3} = 1 - a_{i-2} - a_{i-1},$$

$$a_{i-2} = \frac{-h_i^2 \psi_i^2}{h_{i-2}h_{i-1}(h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_{i-2} + 2h_i h_{i-2} + 3h_i^2 + 4h_{i-1}h_i)},$$

$$a_{i-1} = \frac{(h_i + h_{i-1})^2 \psi_i^2}{h_{i-1}(h_{i-2} + h_{i-1})(h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_{i-2} + 2h_i h_{i-2} + 3h_i^2 + 4h_{i-1}h_i)}, \quad (7)$$

$$a_i = \frac{(h_i^2 + h_{i-1}h_i)\psi_i}{h_i(h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_{i-2} + 2h_i h_{i-2} + 3h_i^2 + 4h_{i-1}h_i)},$$

$\psi_i = h_{i-2} + h_{i-1} + h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$ - шаг интегрирования.

М-задачи

Система (5) рассматривается в качестве модельной системы при использовании формулы интегрирования (6).

Будем считать, что система (5) удовлетворяет условиям, при выполнении которых вектор $Y=(y_1^i,\dots,y_n^i)$ может быть определён из решения системы линейных уравнений

$$C_i Y_i = c_i, \tag{8}$$

где $C_i = E - h_i a_i B(x_i)$, $c_i = a_{i-3}Y_{i-3} + a_{i-2}Y_{i-2} + a_{i-1}Y_{i-1} + h_i a_i b(x_i)$, E - единичная матрица.

М-задачи

В качестве основной характеристики формулы (5) будем рассматривать локальную ошибку, получаемую на i-ом шаге для каждой j компоненты решения $Y_i = (y_i^1, ..., y_i^n)$:

$$R_i^j = \frac{h_i^6 + 2(h_{i-2} + 2h_{i-1})h_i^5 + 2h_{i-1}(h_{i-2} + 2h_{i-1})h_i^4}{3h_i^2 + 2(h_{i-2} + 2h_{i-1})h_i + (h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_{i-2})} +$$

$$+ \frac{2h_{i-1}(h_{i-2} + h_{i-1})(h_{i-2} + 2h_{i-1})h_i^3 + h_{i-1}^2(h_{i-2} + h_{i-1})^2 h_i^2}{3h_i^2 + 2(h_{i-2} + 2h_{i-1})h_i + (h_{i-1}^2 + h_{i-1}h_{i-2})}(y^{IV}(\Theta_i))^j, \qquad (9)$$

где $x_{i-2} - h_i \le \Theta_i \le x_{i-1} + h_i$ и $(y^{IV}(\Theta_i))^j$ - значение четвёртой производной от j-ой компоненте вектора $Y(x)$ в точке Θ. Локальная ошибка (9) возникает вследствие конечно разностной аппроксимации производных системы дифференциальных уравнений.

М-задачи

Потребуем, чтобы в процессе интегрирования системы выполнялись условия:

$$\max_{1\le j\le n} |R_i^j| \le \varepsilon_i,$$

где ε_i заданная точность на i-ом шаге интегрирования.

Предположим, что четвёртая производная вектора $Y(x)$ удовлетворяет на отрезке $[x_0, x_0 + z]$ условию:

$$\max_{1\le j\le n} |y^{IV}(x)^j| \le K,$$

где $z > 0$ - некоторое число, K - вещественная константа.

М-задачи

Тогда получаем, что ограничение на формулу (6) сводится к выполнению неравенства:

$$\varphi_i(h_{i-2},h_{i-1},h_i)=h_i^6+2(h_{i-2}+2h_{i-1})h_i^5+2h_{i-1}(h_{i-2}+2h_{i-1})h_i^4+$$

$$+2h_{i-1}(h_{i-2}+h_{i-1})(h_{i-2}+2h_{i-1})h_i^3+h_{i-1}^2(h_{i-2}+h_{i-1})^2h_i^2-3\Delta_i h_i^2- \quad (10)$$

$$-2(h_{i-2}+2h_{i-1})\Delta_i h_i-(h_{i-1}^2+h_{i-1}h_{i-2})\Delta_i\le 0,$$

где $\Delta_i=2\varepsilon_i K^{-1}$, $h_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots.$

Таким образом, если $t\le x_0+z$, t - момент окончания процесса интегрирования, то конкретный алгоритм численного решения задачи (5) состоит в использовании разностной формулы (6), где шаги интегрирования должны удовлетворять соотношениям (10).

М-задачи

Положим $h_{2i-2} = \tau_{i-1}$, $h_{2i-1} = \tau_i$, $h_{2i} = \tau_i$ в функциях $\varphi_{2i}(h_{2i-2}, h_{2i-1}, h_{2i})$, задаваемой в (10) и введём в рассмотрение

$$f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 14\tau_i^5 + 12\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1}, \qquad (11)$$

где $\varphi_{2i}(h_{2i-2}, h_{2i-1}, h_{2i}) = \tau_i f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots.$

Будем определять стратегию выбора шагов интегрирования для конечно разностной формулы (5) следующим образом. Пусть $h_0 = \tau_0 > 0$. Значения шагов h_1 и h_2 будем задавать как $h_1 = h_2 = \tau_1$, где τ_1 должно удовлетворять условию:

$$f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) \le 0 \qquad (12)$$

для $i = 1$.

М-задачи

Решения Y_{-1}, Y_{-2} системы (5) находятся в точках $x_{-1} = x_0 - h_0$ и $x_{-2} = x_{-1} - h_0$ каким-либо одношаговым алгоритмом. Выполним две итерации алгоритма: с $h_{-1} = \tau_0$, $h_0 = \tau_0$ и $h_1 = \tau_1$ на первой итерации и $h_0 = \tau_0$, $h_1 = \tau_1$ и $h_2 = \tau_1$ на второй. В общем случае будем брать h_{2i-1}, h_{2i} равными τ_i , которое удовлетворяет (12) и выполнять следующие две итерации, используя формулу так, чтобы $h_{2i-3} = \tau_{i-1}$, $h_{2i-2} = \tau_{i-1}$ и $h_{2i-1} = \tau_i$ на первой из них и $h_{2i-2} = \tau_{i-1}$, $h_{2i-1} = \tau_i$ и $h_{2i} = \tau_i$, $i = 2,3,\ldots$. Множество таких стратегий будем обозначать через Ω.

М-задачи

Предположим, что момент окончания интегрирования t удовлетворяет рассмотренному условию: $t \le x_0 + z$. На множестве стратегий Ω будем выбирать стратегию таким образом, чтобы минимизировать число узлов интегрирования формулы на отрезке $[x_0, t]$ при выполнении ограничений (12) для $i = 1, \ldots, m$, где m определяется условиями окончания процесса интегрирования. Стратегию, определённую таким образом будем называть оптимальной стратегией на множестве стратегий Ω.

М-задачи

Тогда задачу выбора оптимальной стратегии можно сформулировать как задачу математического программирования в виде:

$$Q_m(H^m) = 2\sum_{i=1}^{m}\tau_i \to \max,$$

$$f_i(\tau_{i-1},\tau_i) \le 0,\ \tau_i > 0,\ i = 1,\dots,m, \qquad (13)$$

$$H_m = \left(\tau_1,\dots,\tau_m\right), m = 1, 2, \dots .$$

Здесь τ_0 равно некоторому заданному значению $\overline{\tau}_0(\overline{\tau}_0 > 0)$.

М-задачи

Теорема 1

Задача (13) является М-задачей.

Для фиксированного $\tau_{i-1} = \overline{\tau}_{i-1}$ определим $\overline{\tau}_i$ как единственный положительный корень уравнения

$$f_i(\overline{\tau}_{i-1}, \tau_i) = 0,\ \tau_i > 0,\ i = 1, \ldots, m\,. \qquad (14)$$

Функции $f_i(\overline{\tau}_{i-1}, \tau_i)$ задаются соотношением (11) для $\tau_{i-1} = \overline{\tau}_{i-1}$, при этом они являются полиномами пятой степени по τ_i с коэффициентами, имеющими только одно изменение знака для фиксированных значений $\overline{\tau}_{i-1}$, Δ_i.

Тогда, уравнение (14) имеет один положительный корень по τ_i, $\tau_i > 0$. Вектор $H^m = (\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_m)$ является решением задачи (13) для любого $m = 1, 2, \ldots$ в силу теоремы 1.

α-алгоритм

Будем считать, что отрезок интегрирования $[x_0, t]$ разбит на μ отрезков $[z_{\nu-1}, z_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, \mu$, $x_{\mu-1} < t \le z_\mu$, и для каждого рассматриваемого отрезка введена верхняя оценка K_ν четвёртой производной по компонентам решения системы дифференциальных уравнений (5). Здесь

$$x_{\nu-1} = x_0 + (\nu - 1)z,\ z_\nu = x_0 + \nu z,\ z > 0,\ \nu = 1, \ldots, \mu. \quad (15)$$

α-алгоритм

Алгоритм численного интегрирования будем называть α-алгоритмом с использованием формулы (6), если шаги интегрирования h_i алгоритма выбираются на каждом отрезке $[z_{\nu-1}, z_\nu]$ так, что они реализуют оптимальную стратегию на множестве стратегий Ω. При этом должно выполняться следующее условие. Пусть $\overline{x}_i$ - точка интегрирования приближенно оптимального алгоритма, определяемая оптимальной стратегией на множестве стратегий Ω. Тогда

$$h_i = \begin{cases} \overline{h}_i, \overline{h}_i < z_\nu - \overline{x}_{i-1}, \\ z_\nu - \overline{x}_{i-1}, \ \overline{h}_i \geq z_\nu - \overline{x}_{i-1}. \end{cases}$$

α-алгоритм

Решение $Y_i = Y(\overline{x}_i)$ системы (5) вычисляется с помощью формул (6)-(8) с соответствующими значениями шагов интегрирования на каждой i-ой итерации алгоритма. Решения Y_{-2}, Y_{-1} находятся с помощью какого-либо одношагового алгоритма с шагами h_{-1}, h_0 ($h_{-1} = h_0 = \overline{\tau}$).

При реализации α-алгоритма необходимо знать оценку на четвёртую производную от компонент решения системы дифференциальных уравнений (5). Данная оценка определяется с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.

α-алгоритм

Для реализации α-алгоритма требуется на каждом шаге решать уравнение:

$$f_i(\tau_{i-1},\tau_i) = 14\tau_i^5 + 12\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1} = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$v_i = \frac{\tau_i}{\tau_{i-1}}, \; u_i = \frac{\Delta_i}{\tau_{i-1}^4}.$$

Получим уравнение

$$14v_i^5 + 12v_i^4 + 3v_i^3 - 8u_i\tau_i - 3u_i = 0,$$

Данное уравнение задаёт неявным образом функцию $v_i(u_i)$, которая является вогнутой при $u_i > 0$, причём $v_i'(u_i) \to 0$ при $u_i \to \infty$.

α-алгоритм

Данное обстоятельство позволяет затабулировать значения функции $v_i(u_i)$ в узлах заданной сетке на фиксированном отрезке. В точках находящихся между узлами сетки значения указанной функции можно находить путём кусочно-линейной аппроксимации.

Таким образом, мы можем не решать на каждом шаге α-алгоритма уравнение (14), а вычислять значение τ_i с использованием полученной таблицы значений, т.е. значение τ_i при каждом значении i становится непосредственно вычислимым с использованием обычных арифметических операций.

Вычислительный эксперимент

Рассмотрим систему с начальными условиями $y_1(0)=1,\ \ y_2(0)=2,$ $y_3(0)=3$:

$$y_1' = (5-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)^3})y_1+(-3+\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{3}{(x+1)^4})y_2+$$

$$+(-3+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^4})y_3+e^{\frac{1}{x+1}}+e^{\frac{1}{(x+1)^2}}+e^{\frac{1}{(x+1)^3}};$$

Вычислительный эксперимент

$$y_2' = (12 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3})y_1 + (-10 - \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4})y_2 +$$

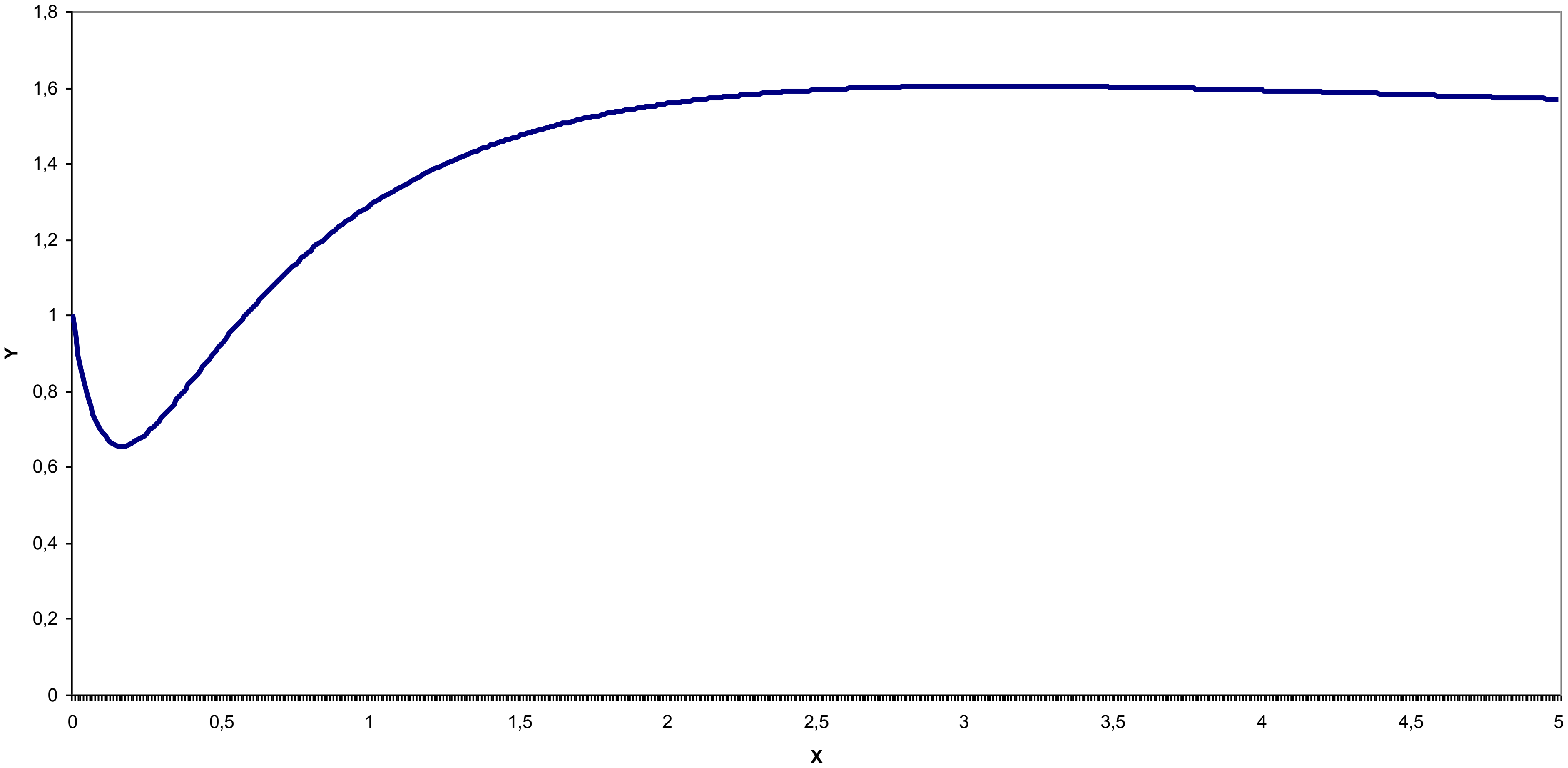
$$+(-3 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^4})y_3 + e^{\frac{1}{x+1}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + e^{\frac{1}{(x+1)^3}};$$

$$y_3' = (12 - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3})y_1 + (-6 - \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{6}{(x+1)^4})y_2 +$$

$$+(-7 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^4})y_3 + e^{\frac{1}{x+1}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^2}} + 2e^{\frac{1}{(x+1)^3}};$$

График функции $y_1(x)$ приведен на рисунке (графики $y_2(x)$ и $y_3(x)$ аналогичны).

Вычислительный эксперимент



Вычислительный эксперимент

В следующей таблице представлены результаты вычислительного эксперимента.

S	$\overline{\tau}_0$	ε	N	σ	z
5	0.000001	0.0001	62	0.00119	0.3
5	0.000001	0.00001	110	0.00028	0.3
5	0.00001	0.0001	58	0.0044	0.3
5	0.00001	0.00001	98	0.00086	0.3
5	0.000001	0.0001	100	0.00034	0.1
5	0.00001	0.0001	96	0.00037	0.1
5	0.00001	0.00001	172	0.00016	0.1
5	0.00001	0.000001	296	0.000164	0.1
5	0.00001	0.000001	174	0.00021	0.3
5	0.000001	0.000001	194	0.000052	0.3
10	0.00001	0.00001	132	0.00086	0.3

Вычислительный эксперимент

Здесь S - длина сегмента интегрирования, h_0, h_{-1}, h_{-2} -значения начальных шагов $(h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \overline{\tau}_0)$, $\varepsilon_i = \varepsilon$ - заданная точность, $i = 1, 2, \ldots,$ N - число выполненных шагов, z - длина интервала, на котором оценивалась четвёртая производная от решения, σ- максимальная ошибка (максимальная ошибка - это наибольшая ошибка, полученная для компонент решения на отрезке интегрирования). Уравнение (14) решалось с точностью 0.00001 . Решения Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-1} найдены, используя формулу Эйлера.

Вычислительный эксперимент

Максимальная ошибка равна 0.00036 при интегрировании с постоянном шагом $h = 0.012$ $(h_0 = h_{-1} = h_{-2} = 0.000001)$ и при $N = 417$, а при использовании α-алгоритма она равнялась 0.00037, и число шагов $N = 96$ при интегрировании рассматриваемой системы на отрезке $[0,5]$.

Полученные результаты можно использовать и для других конечно разностных схем. Также данный метод можно применять для решения нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Литература

1. Коротченко А.Г. О поиске минимумов нескольких унимодальных функций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1979, Т. 19, №5, с. 1337-1340.
2. Коротченко А.Г. Приближенно оптимальный алгоритм поиска экстремума для одного класса функций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1996, Т. 36, №5, с. 30-39.
3. Коротченко А.Г., Лапин А.В. Об одном алгоритме численного интегрирования с оптимальным выбором шага // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, сер. математическое моделирование и оптимальное управление, 2001, вып. 2(24), 270-278.
4. Коротченко А.Г., Лапин А.В. О построении приближенно оптимального алгоритма численного интегрирования // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, сер. математическое моделирование и оптимальное управление, 2003, вып. 1(26), 189-195.
5. Коротченко А.Г. О задачах математического программирования, имеющих многоэтапный характер // Вестник нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, Т. 1, 183-187.
6. A.G. Korotchenko, V.M. Smoryakova (2013) Multistage mathematical programming problems Proceedings of the international conference "NUMERICAL COMPUTATIONS: THEORY AND ALGORITHMS.", p. 88.
7. A.G. Korotchenko, V.M. Smoryakova, On a method of construction of numerical integration formulas // AIP Conf. Proc., Volume 1776: Numerical Computations: Theory and Algorithms (NUMTA–2016), 2016, ISBN: 9780735414389, pp. 090012-1 – 090012-4