ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ОПОРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ДВУХУРОВНЕВОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

О.В. Хамисов

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ) СО РАН

10 сентября 2017 г.

Двухуровневая задача

I уровень (лидер — leader)

Двухуровневая задача

I уровень (лидер — leader)

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

I уровень (лидер — leader)

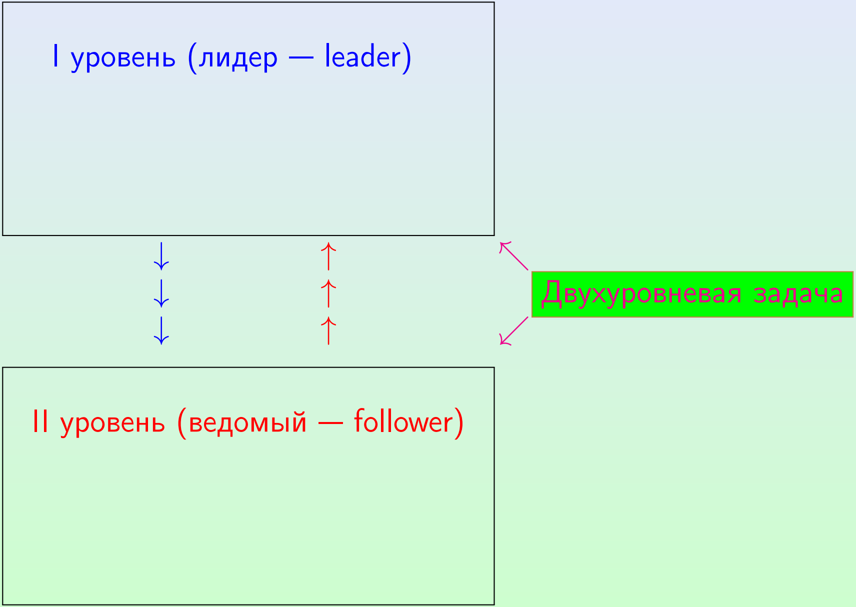
$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)


I уровень (лидер — leader)
Двухуровневая задача
II уровень (ведомый — follower)

I уровень (лидер — leader)

$\downarrow$ x $\downarrow$ $\quad\quad$ $\uparrow\uparrow\uparrow$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

I уровень (лидер — leader)

$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$

$\downarrow$ $\uparrow$

x $\uparrow$

$\downarrow$ $\uparrow$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

I уровень (лидер — leader)

$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$

$\downarrow$ $\uparrow$

x y

$\downarrow$ $\uparrow$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$

I уровень (лидер — leader)

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$\downarrow$ $\uparrow$

x y

$\downarrow$ $\uparrow$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_y,$$

$$g(x, y) \le 0, \;\; y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_{x},$$

$$G(x, y) \le 0, \; x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\downarrow \qquad \uparrow$$

$$x \qquad y$$

$$\downarrow \qquad \uparrow$$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_{y},$$

$$g(x, y) \le 0, \; y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_x,$$

$$G(x, y) \le 0, \;\; x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$F \in C^2$,

$$\downarrow \qquad \uparrow$$
$$x \qquad y$$
$$\downarrow \qquad \uparrow$$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_y,$$

$$g(x, y) \le 0, \;\; y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_x,$$

$$G(x, y) \le 0,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$F \in C^2,$
$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k,$
$G \in C^2,$

$$\downarrow\ x\ \downarrow \qquad \uparrow\ y\ \uparrow$$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_y,$$

$$g(x, y) \le 0,\ y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_{x},$$

$$G(x, y) \leq 0, \; x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$F \in C^2$,
$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$,
$G \in C^2$,
X — выпуклый компакт.

$$\downarrow \quad \uparrow$$
$$x \quad y$$
$$\downarrow \quad \uparrow$$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_{y},$$

$$g(x, y) \leq 0, \; y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_x,$$

$$G(x, y) \le 0, \; x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$F \in C^2$,
$G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$,
$G \in C^2$,
X — выпуклый компакт.

$$\downarrow \quad x \quad \downarrow \qquad \uparrow \quad y \quad \uparrow$$

Двухуровневая задача

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_y,$$

$$g(x, y) \le 0, \; y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

$f \in C^2$,
$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$,
$g \in C^2$,
Y — выпуклый компакт.

I уровень (лидер — leader)

$$F(x, y) \to \min_x,$$

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n.$$

$F \in C^2$,

X — выпуклый компакт.

$$\downarrow \qquad \uparrow$$
$$x \qquad y$$
$$\downarrow \qquad \uparrow$$

Модель Штакельберга

II уровень (ведомый — follower)

$$f(x, y) \to \min_y,$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

$f \in C^2$,

Y — выпуклый компакт.

Задача двухуровневого программирования: (J. Bard)

$$
\begin{aligned}
&F(x, y) \to \min_x, \\
&\qquad G(x, y) \le 0,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n, \\
&\qquad f(x, y) \to \min_y, \\
&\qquad\qquad g(x, y) \le 0,\ y \in Y \subset \mathbb{R}^m.
\end{aligned}
$$

Задача двухуровневого программирования: (S. Dempe)

$$F(x,y) \to \min_{x},$$

$$G(x,y) \leq 0,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$y \in \Psi(x),$$

где Ψ — точечно-множественное отображение:

$$\Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_{y}\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0,\ y \in Y\}.$$

Задача двухуровневого программирования: (S. Dempe)

$$F(x,y) \to \min_{x}?,$$

$$G(x,y) \leq 0,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$y \in \Psi(x),$$

где Ψ — точечно-множественное отображение:

$$\Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_{y}\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0,\ y \in Y\}.$$

$\Psi(x)$ — множество: неединственность реакции второго уровня.

Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$

$$0 \le x \le 1,$$

$$y \in \Psi(x) = \operatorname{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$
$$0 \le x \le 1,$$
$$y \in \Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [0,1]\,, & x = 0. \end{cases}$$

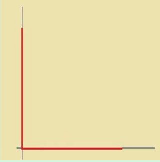
Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$

$$0 \le x \le 1,$$

$$y \in \Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [0,1]\,, & x = 0. \end{cases}$$



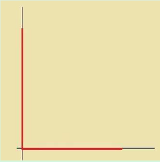
Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$

$$0 \le x \le 1,$$

$$y \in \Psi(x) = \operatorname{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$



$$F(x, y(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$

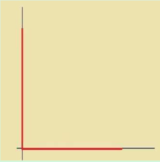
Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$

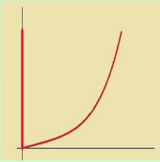
$$0 \le x \le 1,$$

$$y \in \Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$



$$F(x, y(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$



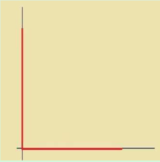
Пример 1.

$$x^2 + y^2 \to \min_x,$$

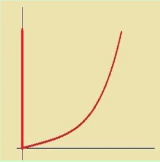
$$0 \le x \le 1,$$

$$y \in \Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_y \{xy : 0 \le y \le 1\}.$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$



$$F(x, y(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$



Задача не имеет решения!

- Оптимистическая целевая функция:

$$\varphi_o(x) = \min_y \{F(x,y) : y \in \Psi(x)\}$$

- Оптимистическая постановка:

$$\varphi_o(x) \to \min_x,$$

$$G(x,y) \le 0, x \in X.$$

$$\Downarrow$$

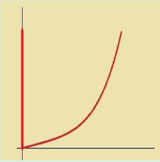
$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \le 0, x \in X,$$

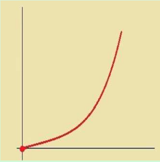
$$y \in \Psi(x).$$

- Оптимистическая целевая функция из примера 1:

$$F(x, y(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ [0, 1], & x = 0. \end{cases}$$



$$\varphi_o(x) = \min_y \{F(x, y) : y \in \Psi(x)\} = x^2.$$



Оптимистическое решение $(x^o, y^o) = (0, 0)$.

- Пессимистическая целевая функция:

$$\varphi_p(x) = \max_y \{F(x, y) : y \in \Psi(x)\}$$

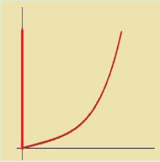
- Пессимистическая постановка:

$$\varphi_p(x) \to \min_x,$$

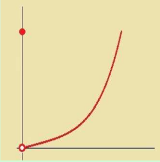
$$G(x, y) \leq 0, x \in X.$$

- Пессимистическая целевая функция из примера 1:

$$F(x, y(x)) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ [0, 1], & x = 0. \end{cases}$$



$$\varphi_p(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$



Пессимистического решения не существует!

S. Dempe, 2002

- *Если выполнены условия "компактности" и "регулярности" и, кроме того, решение нижнего уровня единственно* $\forall x$, *то решение двухуровневой задачи существует.*
- *Если выполнены условия "компактности" и "регулярности" , то оптимистическое решение существует.*
- *Если выполнены условия "компактности" и точечно-множественное отображение* Ψ *полунепрерывно снизу, то пессимистическое решение существует.*

$$\Downarrow$$

Наиболее часто исследуется задача в оптимистической постановке.

- Оптимистическая постановка

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

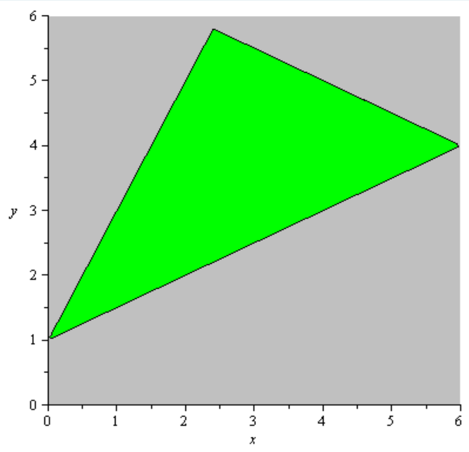
$$G(x,y) \leq 0, x \in X,$$

$$y \in \Psi(x),$$

$$\Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_{y}\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0,\ y \in Y\}.$$

Пример 2.

$$(x-3)^2+(y-2)^2 \to \min,$$
$$0 \le x \le 8,$$
$$(y-5)^2 \to \min,$$
$$-2x+y-1 \le 0,$$
$$x-2y+2 \le 0,$$
$$x+2y-14 \le 0,$$
$$0 \le y \le 6.$$



Пример 2.

$$(x-3)^2+(y-2)^2 \to \min,$$

$$0 \le x \le 8,$$

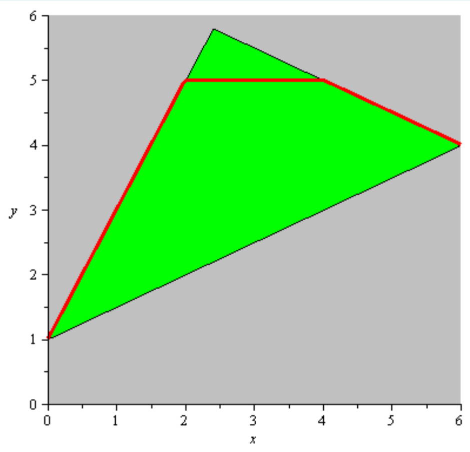
$$(y-5)^2 \to \min,$$

$$-2x+y-1 \le 0,$$

$$x-2y+2 \le 0,$$

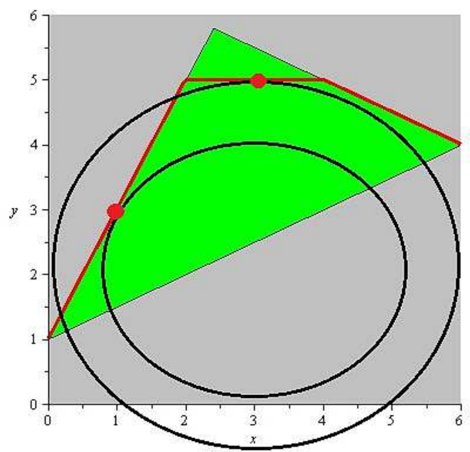
$$x+2y-14 \le 0,$$

$$0 \le y \le 6.$$



Пример 2.

$$(x-3)^2+(y-2)^2 \to \min,$$
$$0 \le x \le 8,$$
$$(y-5)^2 \to \min,$$
$$-2x+y-1 \le 0,$$
$$x-2y+2 \le 0,$$
$$x+2y-14 \le 0,$$
$$0 \le y \le 6.$$



$$(x^*, y^*) = (1,3), F(x^*, y^*) = 5.$$

- Задача двухуровневого программирования

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \le 0, x \in X,$$

$$y \in \Psi(x),$$

$$\Psi(x) = \operatorname*{Argmin}_{y}\{f(x,y) : g(x,y) \le 0,\ y \in Y\}$$

— невыпуклая многоэкстремальная задача оптимизации с неявно заданной допустимой областью.

Предположим, что внутренняя задача

$$f(x,y) \to \min_y,$$

$$g(x,y) \le 0,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

— регулярная задача выпуклого параметрического программирования.

$$\Downarrow$$

Одноуровневая задача I:

$$F(x,y) \to \min_{x,y,\lambda},$$

$$G(x,y) \le 0,\ x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\nabla_y L(x,y,\lambda) = 0,$$

$$g(x,y) \le 0,$$

$$\lambda^T g(x,y) = 0,\ \lambda \ge 0.$$

- Одноуровневая задач I и исходная двухуровневая задача имеют совпадающие глобальные решения и могут иметь несовпадающие локальные решения.
- Условия регулярности нарушаются в каждой допустимой точке одноуровневой задачи I.
- В общем случае (без условия выпуклости) одноуровневая задача I не эквивалентна исходной двухуровневой задаче и в смысле глобального решения.

Одноуровневая задача II

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \le 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x,y) - \psi(x) \le 0,$$

$$g(x,y) \le 0,$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m,$$

где

$$\psi(x) = \min_z \{ f(x,z) : g(x,z) \le 0, z \in Y \}.$$

• Условия регулярности нарушаются в каждой допустимой точке одноуровневой задачи II.

• ОУЗ II и ДУ задача эквивалентны и глобальном, и в локальном смысле.

Задача оптимизации с неявно заданным ограничением

$$F(x) \to \min,$$

$$x \in D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\},$$

$$x \in \Omega,$$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, X — выпуклое компактное множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: для заданной точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

- мы можем проверить включение $\tilde{x} \in \Omega$;
- если $\tilde{x} \notin \Omega$ мы можем построить *отделяющую* функцию $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) > 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega.$$

Задача оптимизации с неявно заданным ограничением

$$F(x) \to \min,$$

$$x \in D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\},$$

$$x \in \Omega,$$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, X — выпуклое компактное множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: для заданной точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

- мы можем проверить включение $\tilde{x} \in \Omega$;
- если $\tilde{x} \notin \Omega$ мы можем построить *отделяющую* функцию $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) > 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega.$$

Задача оптимизации с неявно заданным ограничением

$$F(x) \to \min,$$

$$x \in D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\},$$

$$x \in \Omega,$$

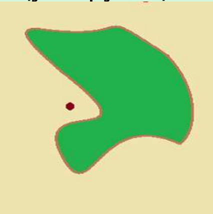
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, X — выпуклое компактное множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: для заданной точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

- мы можем проверить включение $\tilde{x} \in \Omega$;
- если $\tilde{x} \notin \Omega$ мы можем построить *отделяющую* функцию $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) > 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega.$$



Задача оптимизации с неявно заданным ограничением

$$F(x) \to \min,$$

$$x \in D = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n : G(x) \leq 0\},$$

$$x \in \Omega,$$

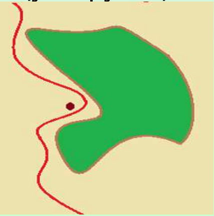
$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, X — выпуклое компактное множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ: для заданной точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

- мы можем проверить включение $\tilde{x} \in \Omega$;
- если $\tilde{x} \notin \Omega$ мы можем построить *отделяющую* функцию $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) > 0,$$

$$\tilde{\psi}(x) \leq 0 \ \forall x \in \Omega.$$



Аппроксимирующая последовательность:

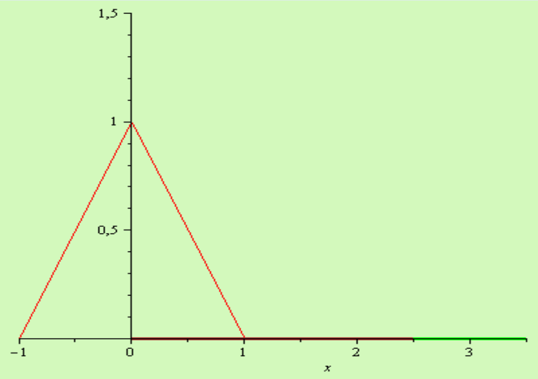
- $x^k \in D \setminus \Omega$, $\psi_k(x^k) > 0$;
- $\psi_k(x^{k+1}) \leq 0$.

Отсекаемое множество $M_k = \{x : \psi_k(x) > 0\}$ "результативно", если $int(M_k) \neq \emptyset \Rightarrow \psi_k$ непрерывна.

Сходимость к допустимой точке: принадлежат ли предельные точки аппроксимирующей последовательности множеству Ω?

Ответ: нет, даже если ψ_k — равномерно липшицевы (=каждая функция удовлетворяет условию Липшица, константы Липшица ограничены сверху одним и тем же числом).

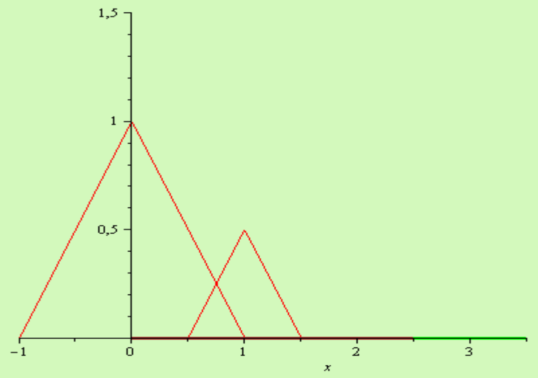
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$x^1 = \frac{1}{1}$

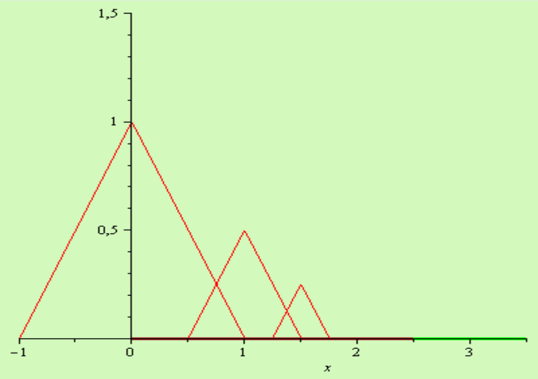
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$x^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

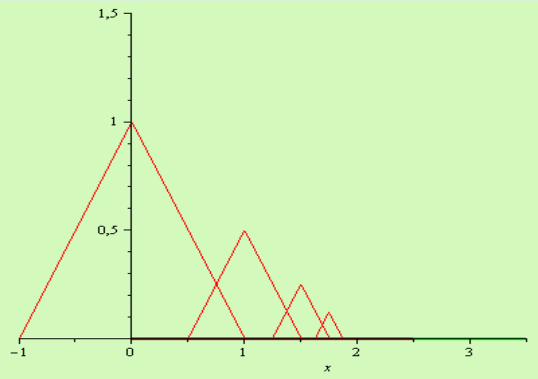
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$x^3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

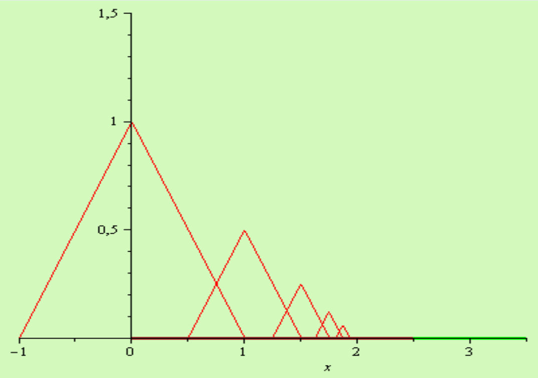
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$x^4 = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}$$

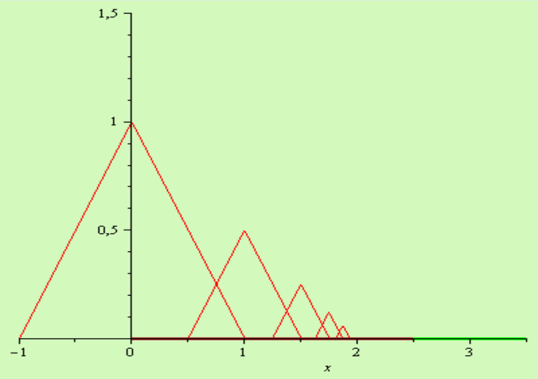
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$x^5 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

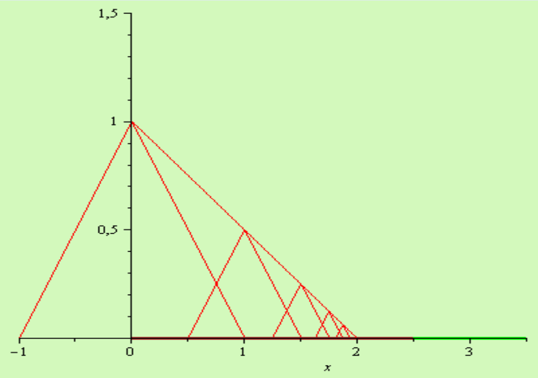
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0,\ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$x^* = \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots = 2 < 2.5$$

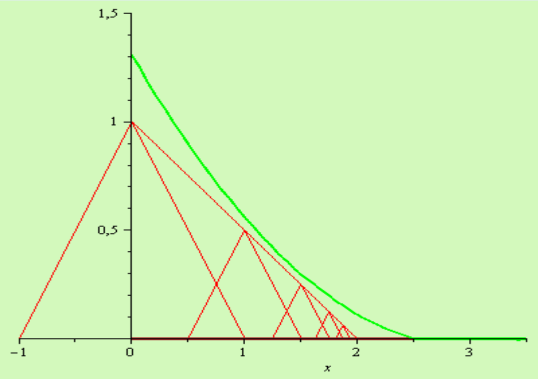
$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0, \ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$x^* = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2 < 2.5$$

$$X = [0, 3.5], \Omega = [2.5, 3.5]$$



$$x^0 = 0, \ \psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - |x - x^k|, x^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{i-1}}$$

$$x^* = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2 < 2.5$$

Функциональное определение Ω:

$$\Omega = \{x : f(x) \leq 0\},$$

Функция f задана неявно, но имеет явные опорные функции.

Опорные функции.

$\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — опорные функции f на $X \subset \mathbb{R}^n$ если они непрерывны по x и

$$\psi(x, y) \le f(x) \le \varphi(x, y) \;\; \forall (x, y) \in X \times X,$$

$$\psi(y, y) = f(y) = \varphi(y, y) \;\; \forall y \in X.$$

Типы опорных функций

- $\varphi(x, y)$ выпукла по x, $\psi(x, y)$ вогнута по x;
- $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ липшицевы по x;
- $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ k раз непрерывно дифференцируемы по x.

Утверждение. Предположим, что

- $\{x^k\}$ аппроксимирующая последовательность относительно $\psi(x,y)$:

$$\psi(x^k,x^k) > 0,\ \psi(x^j,x^k) \leq 0\ \forall k,\ \forall j > k;$$

- $\psi(x,y)$ равномерно липшицева по x;
- $X \bigcap \Omega \neq \emptyset$.

Тогда для каждой сходящейся подпоследовательности $\{x^{k_j}\}$

$$\lim_{j\to\infty} f(x^{k_j}) = 0$$

(каждая предельная точка $\{x^k\}$ принадлежит Ω).

Утверждение. *Предположим, что*

- $\{x^k\}$ *аппроксимирующая последовательность относительно* $\psi(x,y)$*:*

$$\psi(x^k,x^k)>0,\ \psi(x^j,x^k)\leq 0\ \forall k,\ \forall j>k;$$

- $\psi(x,y)$ *равномерно липшицева по* x*;*
- $X\bigcap\Omega\neq\emptyset$*.*

Тогда для каждой сходящейся подпоследовательности $\{x^{k_j}\}$

$$\lim_{j\to\infty} f(x^{k_j})=0$$

(каждая предельная точка $\{x^k\}$ *принадлежит* Ω*).*

Утверждение. *Предположим, что*

- $\{x^k\}$ *аппроксимирующая последовательность относительно* $\psi(x, y)$*:*

$$\psi(x^k, x^k) > 0,\ \psi(x^j, x^k) \leq 0\ \forall k,\ \forall j > k;$$

- $\psi(x, y)$ *равномерно липшицева по* x*;*
- $X \bigcap \Omega \neq \emptyset$.

Тогда для каждой сходящейся подпоследовательности $\{x^{k_j}\}$

$$\lim_{j \to \infty} f(x^{k_j}) = 0$$

(каждая предельная точка $\{x^k\}$ *принадлежит* Ω*).*

- x^k — (внешние) точки глобального оптимума.

Утверждение. *Предположим, что*

- $\{x^k\}$ *аппроксимирующая последовательность относительно* $\psi(x, y)$*:*

$$\psi(x^k, x^k) > 0,\ \psi(x^j, x^k) \leq 0\ \forall k,\ \forall j > k;$$

- $\psi(x, y)$ *равномерно липшицева по* x*;*
- $X \bigcap \Omega \neq \emptyset$.

Тогда для каждой сходящейся подпоследовательности $\{x^{k_j}\}$

$$\lim_{j\to\infty} f(x^{k_j}) = 0$$

(каждая предельная точка $\{x^k\}$ *принадлежит* Ω*).*

• x^k — (внешние) точки глобального оптимума.

$$\Downarrow$$

• Каждая предельная точка $\{x^k\}$ есть точка глобального оптимума в исходной задаче с неявным ограничением.

Одноуровневая задача IIa (ограничения нижнего уровня не зависят от x)

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x,y) - \psi(x) \leq 0,$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m,$$

где

$$\psi(x) = \min_y \{f(x,y) : y \in Y\}.$$

$$\psi(x) = \min_y \{f(x, y) : y \in Y\}.$$

Для заданного $\tilde{x}$ найдём

$$\tilde{y} \in Argmin\{f(\tilde{x}, y) : y \in Y\}.$$

Тогда

$$\psi(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

$$\psi(x) \leq f(x, \tilde{y}).$$

Следовательно, $f(x, \tilde{y})$ — опорная в $\tilde{x}$ функция и

$$0 \geq f(x, y) - \psi(x) \geq f(x, y) - f(x, \tilde{y}).$$

Аппроксимирующая задача

$$F(x, y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x, y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x, y) - f(x, \tilde{y}) \leq 0,$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА I

Шаг 0. Решить задачу

$$F(x, y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x, y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть (x^0, y^0) — решение. Установить $k = 0$.

Шаг 1. Решить задачу

$$f(x^k, y) \to \min,$$

$$y \in Y.$$

Пусть $\tilde{y}^k$ — решение.

ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА I

Шаг 2. Если $f(x^k, y^k) = f(x^k, \tilde{y}^k)$, то стоп: (x^k, y^k) — решение исходной двухуровневой задачи.

Шаг 3. Решить аппроксимирующую задачу

$$F(x, y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x, y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x, y) - f(x, \tilde{y}^j) \leq 0, j = \overline{0, k},$$

$$y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть (x^{k+1}, y^{k+1}) — решение.

Шаг 4. Переопределить k=k+1. Перейти на **Шаг 1**.

Пример 3[1].

$$-x + xy + 10y^2 \to \min,$$

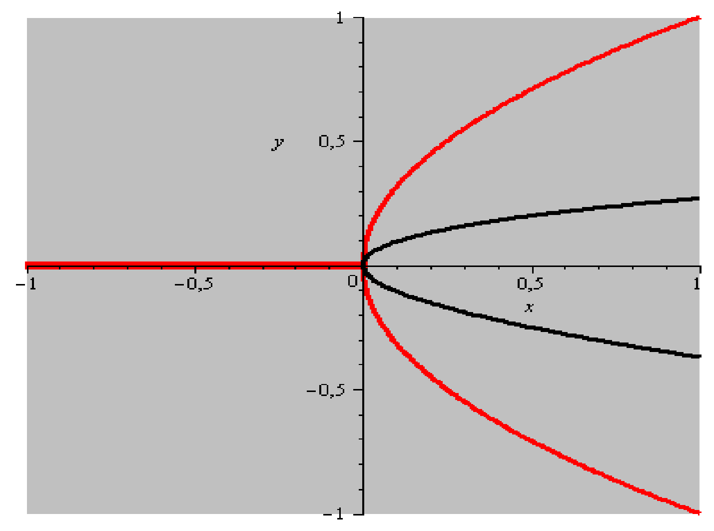
$$-1 \le x \le 1,$$

$$-xy^2 + \frac{y^4}{2} \to \min,$$

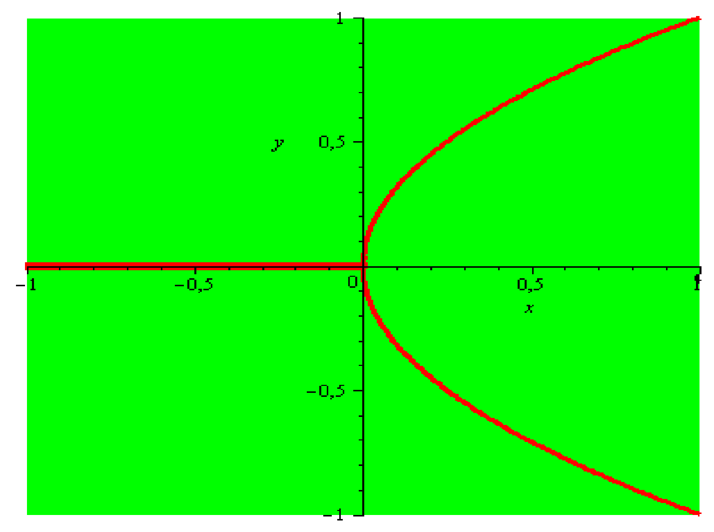
$$-1 \le y \le 1.$$

[1] A.Mitsos, P.Barton *A test set for bilevel programs.*
http://yoric.mit.edu/download/Reports/bileveltestset.pdf

Оптимальное решение: $(x^*, y^*) = (0, 0)$, $F(x^*, y^*) = 0$.

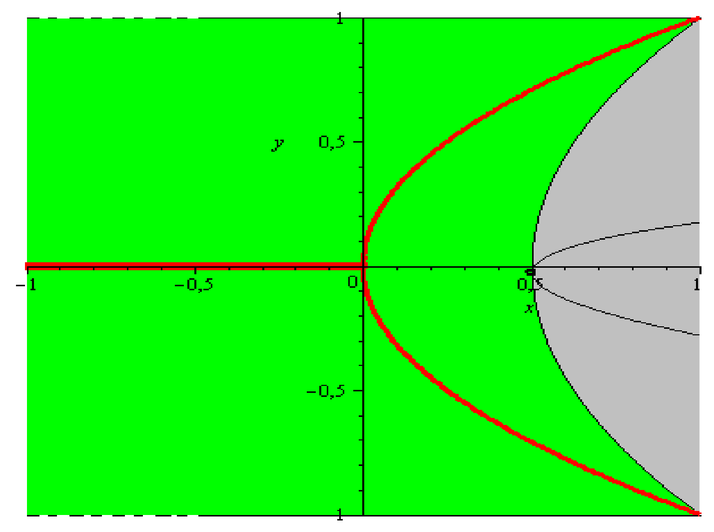


Оптимальное решение: $(x^*, y^*) = (0, 0), F(x^*, y^*) = 0$.



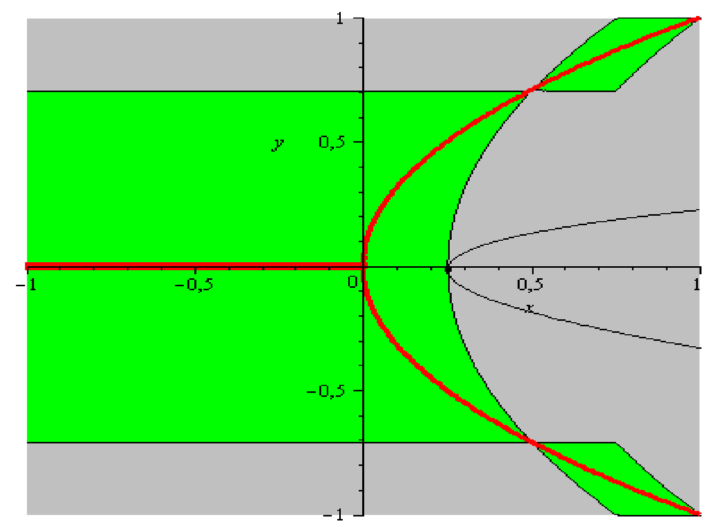
Итерация 0: $(x^0, y^0) = (1, -0.05), F(x^0, y^0) = -1.025$.

Оптимальное решение: $(x^*, y^*) = (0, 0), F(x^*, y^*) = 0.$



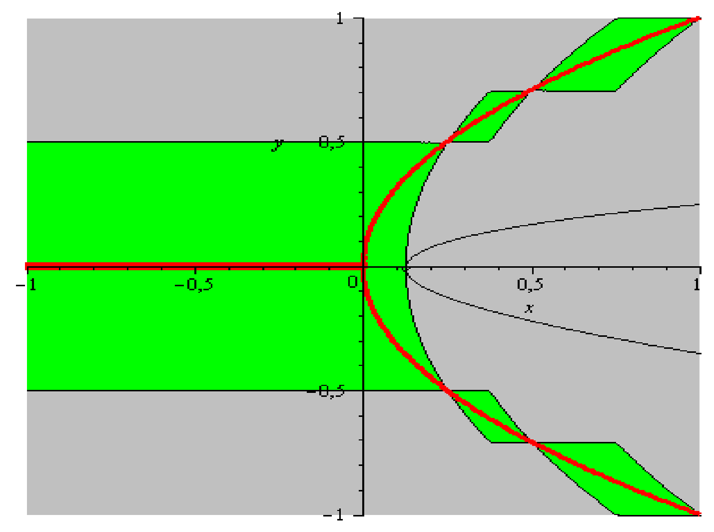
Итерация 1: $(x^1, y^1) = (0.5, -0.026), F(x^1, y^1) = -0.50624.$

Оптимальное решение: $(x^*, y^*) = (0, 0), F(x^*, y^*) = 0$.



Итерация 2: $(x^2, y^2) = (0.25, -0.013), F(x^2, y^2) = -0.25156$.

Оптимальное решение: $(x^*, y^*) = (0, 0), F(x^*, y^*) = 0$.



Итерация 3: $(x^3, y^3) = (0.125, -0.006), F(x^3, y^3) = -0.12539$.

3-я аппроксимирующая невыпуклая задача

$$-x + xy + 10y^2 \to \min,$$

$$-xy^2 + 0.5y^4 + x - 0.5 \le 0,$$

$$-xy^2 + 0.5y^4 + 0.25x - 0.03125 \le 0,$$

$$-xy^2 + 0.5y^4 + 0.5x - 0.125 \le 0,$$

$$-1 \le x \le 1,$$

$$-1 \le y \le 1.$$

Одноуровневая задача IIb

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x,y) - \psi(x) \leq 0,$$

$$g(x,y) \leq 0, y \in Y \subset \mathbb{R}^m,$$

где

$$\psi(x) = \min_y \{f(x,y) : g(x,y) \leq 0, y \in Y\}.$$

Предположения

- $\exists y^0 \in int(Y) : g_i(x, y^0) < 0, i = 1, \ldots, s \ \forall x \in X;$
- $f(x,y), g_i(x,y)$ выпуклы по y;
- $X, \ Y$ выпуклые компактные множества.

В силу соотношений двойственности

$$\psi(x) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{y \in Y} \{ f(x, y) + \lambda^T g(x, y) \}.$$

Из (равномерного) условия Слейтера

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda^*(x) \leq \frac{f(x, y^0) - f(x, y^*(x))}{\min_{1 \leq i \leq s} \{ -g_i(x, y^0) \}}.$$

Найдём приближённые оценки

$$\max_{x \in X, y \in Y} \{ f(x, y^0) - f(x, y) \} \leq M_1,$$

$$\min_{x \in X} \min_{1 \leq i \leq s} \{ -g_i(x, y^0) \} \geq M_2 > 0.$$

Тогда

$$\lambda^*(x) \in \Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{s} \lambda^*(x) \leq \frac{M_1}{M_2} = \gamma \}.$$

Опорная функция-мажоранта

$$\psi(x) = \max_{\lambda\in\Lambda}\min_{y\in Y}\{f(x,y) + \lambda^T g(x,y)\} =$$

$$= \min_{y\in Y}\max_{\lambda\in\Lambda}\{f(x,y) + \lambda^T g(x,y)\} \le$$

$$\le f(x,\tilde{y}) + \max_{\lambda\in\Lambda}\{\lambda^T g(x,\tilde{y})\} =$$

$$= f(x,\tilde{y}) + \gamma \max\{0, g_1(x,\tilde{y}), \ldots, g_s(x,\tilde{y})\}.$$

Тогда

$$f(x,y) - \psi(x) \ge f(x,y) - f(x,\tilde{y}) - \gamma \max\{0, g_1(x,\tilde{y}), \ldots, g_s(x,\tilde{y})\}.$$

Аппроксимирующая задача

$$F(x,y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x,y) \le 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x,y) - f(x,\tilde{y}) - \gamma \max\{0, g_1(x,\tilde{y}), \ldots, g_s(x,\tilde{y})\} \le 0,$$

$$g(x,y) \le 0, y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА II

Шаг 0. Решить задачу

$$F(x, y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x, y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$g(x, y) \leq 0, y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть (x^0, y^0) — решение. Установить $k = 0$.

Шаг 1. Решить задачу

$$f(x^k, y) \to \min,$$

$$g_i(x^k, y) \leq 0, i = 1, \ldots, s, \quad y \in Y.$$

Пусть $\tilde{y}^k$ — решение.

ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА II

Шаг 2. Если $f(x^k, y^k) = f(x^k, \tilde{y}^k)$, то стоп: (x^k, y^k) решение исходной двухуровневой задачи.

Шаг 3. Решить аппроксимирующую задачу

$$F(x, y) \to \min_{x,y},$$

$$G(x, y) \leq 0, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

$$f(x, y) - f(x, \tilde{y}^j) - \gamma \max\{0, g_1(x, \tilde{y}^j), \ldots, g_s(x, \tilde{y}^j)\} \leq 0, j = \overline{0, k},$$

$$g(x, y) \leq 0, y \in Y \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть (x^{k+1}, y^{k+1}) — решение.

Шаг 4. Переопределить k=k+1. Перейти на **Шаг 1**.

Пример 4.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 \to \min,$$

$$0 \leq x \leq 8,$$

$$(y-5)^2 \to \min,$$

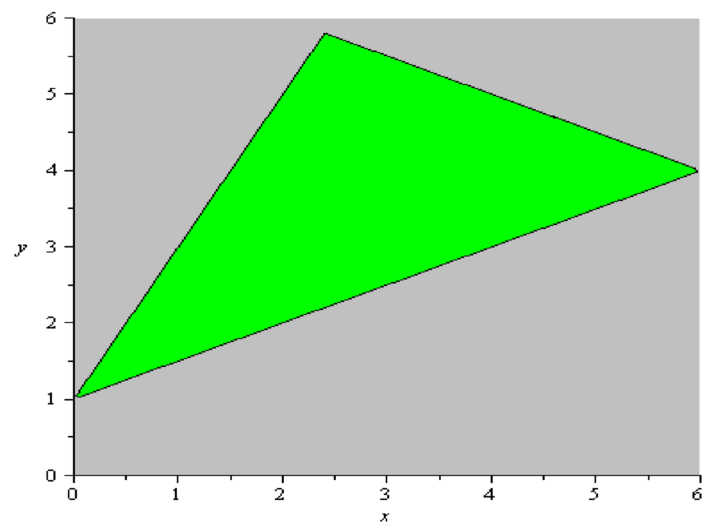
$$-2x + y - 1 \leq 0,$$

$$x - 2y + 2 \leq 0,$$

$$x + 2y - 14 \leq 0,$$

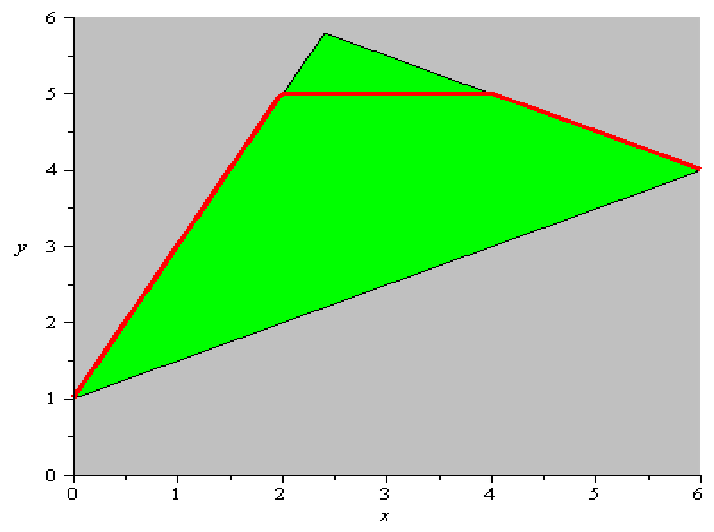
$$0 \leq y \leq 6.$$

Слабо допустимое множество.



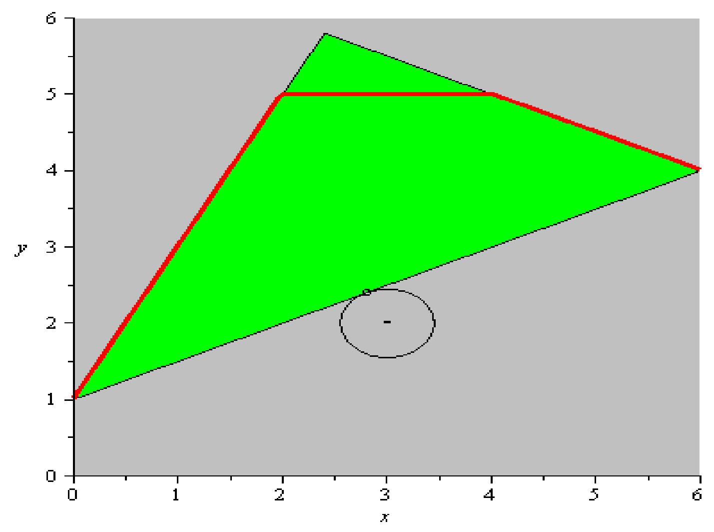
$(x^*, y^*) = (1, 3), F(x^*, y^*) = 5.$

Допустимое множество.



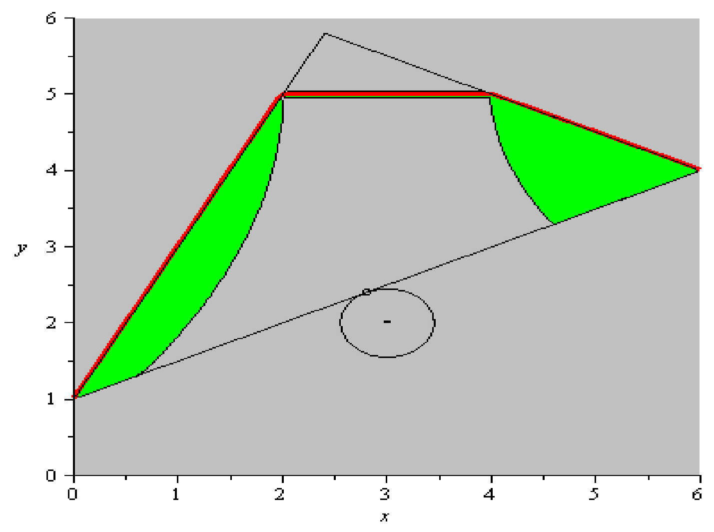
$(x^*, y^*) = (1, 3), F(x^*, y^*) = 5.$

Итерация 0.



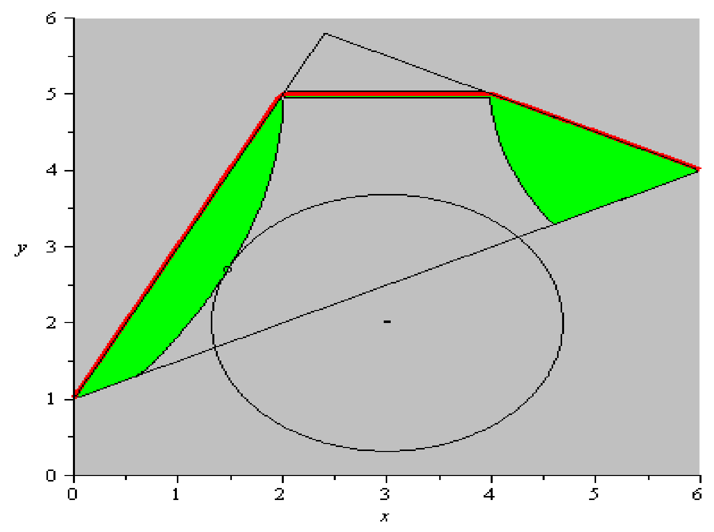
$(x^0, y^0) = (2.8, 2.4), F(x^0, y^0) = 0.2.$

Итерация 1.



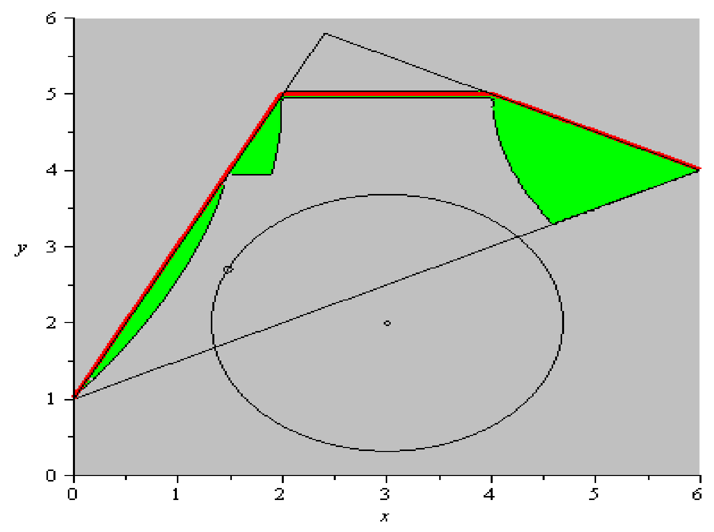
$(x^1, y^1) = (1.472, 2.702), F(x^1, y^1) = 2.828.$

Итерация 1.



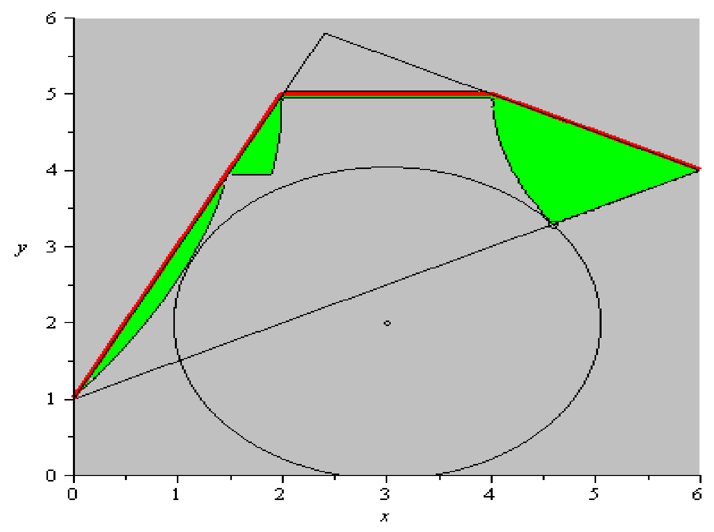
$(x^1, y^1) = (1.472, 2.702), F(x^1, y^1) = 2.828.$

Итерация 2.



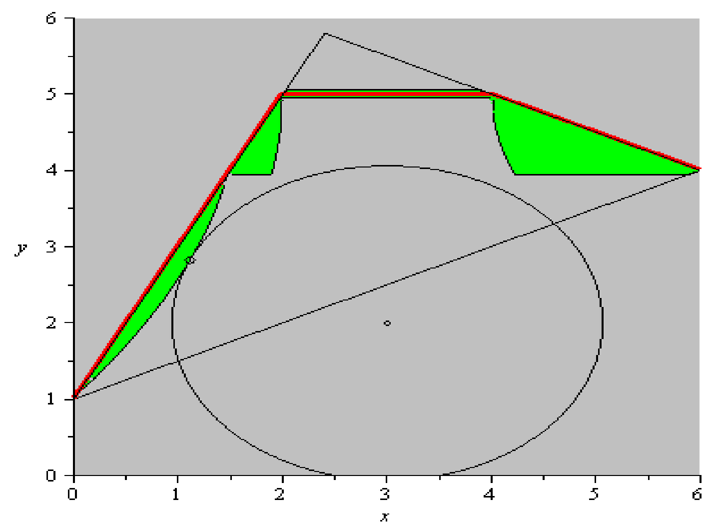
$(x^2, y^2) = (4.584, 3.292), F(x^2, y^2) = 4.177.$

Итерация 2.



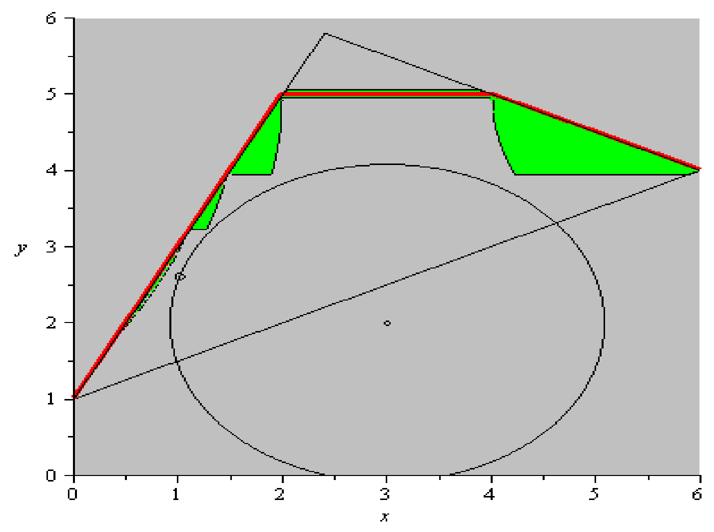
$(x^2, y^2) = (4.584, 3.292), F(x^2, y^2) = 4.177.$

Итерация 3.



$(x^3, y^3) = (1.11, 2.823), F(x^3, y^3) = 4.251.$

Итерация 3.



$(x^3, y^3) = (1.11, 2.823), F(x^3, y^3) = 4.251.$

Заключение.

- Аппроксимация невыпуклой неявной задачей невыпуклой явной задачей и решение последней в локальном или глобальном смысле.
- Опорные функции требуют менее жестких условий сходимости.
- В выпукло-линейном случае вспомогательные задачи остаются выпуклыми.

Открытые вопросы.

- Качество невыпуклых аппроксимаций.
- Класс задач двухуровневого программирования с computationally tractable невыпуклыми вспомогательными задачами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!