ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ

***В.В. Гавриленко*[1]*, А.Ф. Обшта*[2]*, Б.А. Шувар*[2]*, А.А. Галкин*[1]**

[1]*Национальный транспортный университет, Киев, Украина*

[2]*Национальный университет «Львовская политехника», Львов, Украина*

Рассматриваются проблемы разработки алгоритмов решения сложных задач, согласованные с новыми архитектурами вычислительных систем. Получены достаточные условия сходимости построенных авторами общих итерационных алгоритмов решения операторных уравнений. Утверждения не содержат ограничений по полуупорядоченности пространств, в которых рассматриваются заданные операторные уравнения. Результаты исследований могут, в частности, иметь применение при решении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и сложной структуры.

Введение

Разработке параллельных алгоритмов систем и программ уделяется большое внимание в связи с тем, что известные на сегодня методы построения параллельных алгоритмов для решения сложных задач на многопроцессорных вычислительных системах не позволяют построить достаточно эффективные и быстродействующие программы для решения этих задач. Основным фактором, сдерживающим моделирование сложных процессов, является недостаточная производительность компьютеров и недостаточная производительность алгоритмов и программ. Организация параллельных вычислений является сложным процессом в связи с тем, что необходимо согласовывать решения проблем, связанных с конфигурацией компьютера, эффективностью системного программного окружения, структурной эффективностью прикладной программы параллельных вычислений. Что касается конфигурации компьютера, то известно, что при выполнении ресурсоемких задач нужно обеспечивать хранение массивов данных, поступающих из многих каналов, одновременно со считыванием в многоблочных операционных устройствах специализированных процессоров, выполнять операции реорганизации и упорядочения данных в массивах. Для существующих типов памяти это очень сложная, а часто и не решаемая с приемлемыми характеристиками задача.

Одним из подходов, улучшающих характеристики компьютера, является разработанный А.А. Мельником [1] метод построения памяти с упорядоченным доступом к данным, который позволил реализовать параллельный доступ к данным в памяти и стал основой для создания специализированных процессоров на основе этой памяти с новой архитектурой и значительно лучшими по сравнению с существующими характеристиками процессоров. В связи с этим актуальными являются проблемы разработки алгоритмов, согласованных с новой архитектурой вычислительной системы. С нашей точки зрения, значительно улучшить вычислительные характеристики могут согласованные с новой архитектурой вычислительной системы алгоритмы итеративного агрегирования решения сложных задач.

В прикладной математике немало численных методов, особенно касающихся сложных задач, которые не получили строгого обоснования, хотя успешно применяются на практике. К таким методам относятся, в частности, методы итеративного агрегирования, которые изучены мало и условия сходимости которых неизвестны. Несмотря на многочисленные теоретические исследования методов итеративного агрегирования, указанный факт не потерял актуальности [2]. Методы итеративного агрегирования формально можно описать как проекционно-итеративные методы [3]. Существенным отличием от проекционно-итеративных методов является их особенность, которая означает, что на каждом шаге итерационного процесса методы итеративного агрегирования являются одновременно алгоритмами выбора проекционных операторов. В предлагаемой работе построены и исследованы общие итерационные алгоритмы, которые охватывают многопараметрические методы итеративного агрегирования. Использована методика построения и исследования методов итеративного агрегирования для линейных и нелинейных операторных уравнений, предложенная в [4], а также методика построения «синтетических» аналогов этих методов, получаемая сочетанием идеи итеративного агрегирования с идеей проекционно-итеративных методов.

Построение алгоритма для линейного уравнения

Пусть E – банахово пространство, в котором рассматриваем уравнение

$$x = Ax + b \ (b \in E) \tag{1}$$

с линейным непрерывным оператором $A: E \to E$. Зададим оператор $P\left(P^2 = P\right)$, который проектирует элементы банахова пространства E в элементы банахова пространства E'. Обозначим $Q = I - P$ (I – тождественный оператор). Пусть заданы линейные непрерывные операторы $S: E \to E'$ и $\Lambda: E' \to E'$. Будем считать также, что выполняется равенство

$$S\left(A + \tilde{A}\right)P = \Lambda S\,. \tag{2}$$

Полагаем, что этим равенством определен линейный непрерывный оператор $\tilde{A}: E \to E$. Если речь идет об однопараметрическом случае, то вместо (2) получим

$$\left(\varphi, \left(A + \tilde{A}\right)x\right) = \lambda(\varphi, x), \tag{3}$$

где (φ, x) – значение линейного функционала $\varphi \in E^*$ на элементах $x \in E$ (E^* – банахово пространство, сопряженное с E). Если $\tilde{A}$ – нулевой оператор, то число λ и элемент φ являются собственным числом и соответствующим ему собственным элементом сопряженного с A оператора A^*. В более общем виде равенство $SAP = \Lambda S$, которое получается из (2), если $\tilde{A}$ является нулевым оператором, можно интерпретировать как обобщение спектральной задачи для оператора AP. Если при этом Λ является матрицей диагонального вида, то ее элементы являются собственными числами оператора AP.

Рассмотрим систему, составленную из уравнения (1) и вспомогательного уравнения

$$y = \Lambda y - SAQx - Sb + S\tilde{A}Px \tag{4}$$

с дополнительным неизвестным $y \in E'$. Предполагаем, что существует обратный оператор $\left(I' - \Lambda\right)^{-1}$, где I' – единичный оператор в E'. Множество пар $\{x, y\}$ элементов $x \in E$, $y \in E'$, которые удовлетворяют равенству

$$Sx + y = \theta', \tag{5}$$

где θ' – нулевой элемент в E', обозначим через ε_0. Это множество является подпространством в банаховом пространстве $E_0 = E \times E'$ с нормой, введенной с помощью формулы

$$\|x, y\|_0 = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_{E'}^2}. \tag{6}$$

Используя этот способ погружения пространства E в пространство E_0, построим итерационный процесс с помощью формул

$$x^{(n+1)} = APx^{(n+1)} - AQx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b\,, \tag{7}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SAQx^{(n)} + \alpha_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - Sb\,. \tag{8}$$

Здесь $a^{(n)} : E' \to E$, $\alpha_0^{(n)} : E' \to E'$ являются заданными операторами при каждом $n = 0,1,...$. Для каждого $n = 0,1,...$ постулируем выполнение условия

$$Sa^{(n)} + \alpha_0^{(n)} = \Lambda\,. \tag{9}$$

Выбор операторов, фигурирующих в (9), конкретизирует итеративный алгоритм, который описывают формулы (7), (8), при условии, что $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ удовлетворяют равенство (5) при $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$. В случае когда речь идет об однопараметрическом методе итеративного агрегирования и выполняется равенство (3), итеративный процесс (7), (8) можно представить в виде

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{APx^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + b\,, \tag{10}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, \tilde{A}Qx^{(n)}\right) + \frac{\left(\varphi, AQx^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, b^{(0)}\right) + S\tilde{A}Px^{(n)}. \tag{11}$$

Равенство (5) в этом случае имеет вид

$$\left(\varphi, x\right) + y = 0. \tag{12}$$

Выбирая $x^{(0)}$ произвольным способом, из этого равенства при $x = x^{(0)}$ находим $y^{(0)} = y$. При этом подтверждается равенство

$$\left(\varphi, a^{(n)}\right) + \alpha_0^{(n)} = \lambda \tag{13}$$

при $n = 0$ благодаря выбору $a^{(n)}$, $\alpha_0^{(n)}$ по формулам

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, Ax^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\,; \qquad \alpha_0^{(n)} = \frac{\left(\varphi, AQx^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\,. \tag{14}$$

Очевидно, что однопараметрический алгоритм (10), (11) можно представить в виде

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, Ax^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} APx^{(n)} + AQx^{(n)} + b. \tag{15}$$

Используя [4, 5], получено строгое доказательство сходимости итерационного процесса для линейного случая, то есть для приведенных выше алгоритмов (7) и (8).

Построение алгоритма для нелинейного уравнения

Исследуем один из вариантов алгоритмов итеративного агрегирования для нелинейного уравнения

$$x = Ax + Fx, \tag{16}$$

в котором линейный непрерывный оператор A и, вообще говоря, нелинейный непрерывный оператор F действуют из E в E, где E – банахово пространство.

Зададим операторы $S : E \to E'$, $\Lambda : E' \to E'$, где E' – банахово пространство, вообще говоря, не совпадает с E. Пусть оператор $\tilde{A}$ ($\tilde{A} : E \to E$) таков, что выполняется равенство

$$S(A + \tilde{A}) = \Lambda S. \tag{17}$$

Вместе с уравнением (16) будем рассматривать вспомогательное уравнение

$$y = \Lambda y + S\tilde{A}x - SFx. \tag{18}$$

Построим итерационный процесс

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + Fx^{(n)} + a^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \quad (19)$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} + S\tilde{A}x^{(n)} - SFx^{(n)} + a_0^{(n)}(y^{(n)} - y^{(n+1)}). \quad (20)$$

Используя [4, 5], получено строгое доказательство сходимости итерационного процесса для нелинейного случая, то есть для приведенных выше алгоритмов (19) и (20).

Выводы

Результаты исследований могут, в частности, иметь применение при решении на специализированных параллельных вычислительных комплексах систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и сложной структуры, описывающих балансовые задачи в математической экономике.

Литература

1. Мельник А.О. Архітектура комп'ютера. Луцьк: Волинська обласна друкарня, 2008. – 470 с.
2. Гробова Т.А., Стеценко В.Я. Методы итеративного агрегирования для приближенного решения линейных и нелинейных алгебраических систем и интегральных уравнений: Монография. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2003. – 87 с.
3. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
4. Шувар Б.А. О сходимости многопараметрических методов итеративного агрегирования // Вестник Львовск. политехн. ин-та. Прикладная математика. – 1989. №232. – С. 140-142.
5. Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: В-во Прикарпатського національного університету ім. В.Стефаника, 2007. – 515 с.