ОБМЕН ДАННЫМИ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В.Л. Тарасов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Изложена методика расчета собственных частот оболочек вращения. Предложено распараллеливать вычисления путем раздельного расчета собственных частот для различных значений чисел волн в окружном направлении. Время на пересылку исходных данных на отдельные процессы параллельной программы предложено сокращать за счет предварительного копирования данных из исходного файла в символьный буфер с последующей однократной рассылкой буфера. Приведены результаты численных экспериментов, показывающие сокращение времени вычислений за счет распараллеливания.

Введение

Оболочечные конструкции широко применяются в технике, поэтому различные аспекты их расчета, в том числе и расчета собственных частот неоднократно рассматривались в литературе. В частности, можно указать на работы [1, 2], в которых изложены алгоритмы и приведены программы для расчета оболочечных конструкций. В настоящей работе рассматривается задача расчета собственных частот оболочек вращения с точки зрения ускорения вычислений за счет их распараллеливания.

1. Методика расчета собственных частот

Нахождение собственных частот колебаний осесимметричных оболочечных конструкций сводится к задаче на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка путем разложения в ряд Фурье по окружной координате величин, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки [1]:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x, \lambda. m)\,\boldsymbol{y}, \quad 0 \le x \le l. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{y}$ – вектор из 8 неизвестных, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки, штрих обозначает дифференцирование по меридиональной координате x, $\boldsymbol{A}(x, \lambda, m)$ – квадратная матрица коэффициентов системы, λ – параметр, пропорциональный собственной частоте (безразмерная собственная частота), m – число волн в окружном направлении в форме колебаний, которое может принимать значения 0, 1, 2, … . В качестве основных неизвестных $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8$ удобно выбрать величины, пропорциональные, соответственно, сдвиговому усилию в срединной поверхности, меридиональному изгибающему моменту, меридиональному усилию, поперечному усилию, перемещению в окружном направлении, углу поворота нормали к срединной поверхности в плоскости меридиана, перемещению в меридиональном направлении и нормальному перемещению точек срединной поверхности.

Граничные условия на «левом» ($x = 0$) и «правом» ($x = l$) торце оболочки можно записать в виде:

$$\boldsymbol{H}_L\,\boldsymbol{y}(0) = 0, \quad \boldsymbol{H}_R\boldsymbol{y}(l) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{H}_L$, $\boldsymbol{H}_R$ – матрицы коэффициентов граничных условий размером 4×8.

Система дифференциальных уравнений (1) и краевые условия (2) однородны, поэтому существует тривиальное решение $\boldsymbol{y}(x) \equiv 0$ при любых значениях параметра частоты λ. Собственным частотам соответствуют такие значения λ, при которых однородная краевая задача (1), (2) имеет нетривиальное решение.

Алгоритм поиска собственных значений λ состоит в следующем. Граничные условия слева представляют собой систему из 4-х линейных однородных алгебраических уравнений, в которой неизвестными являются 8 величин $y_i(0)$, $i = \overline{1, 8}$. Выберем 4 линейно независимых вектора $\boldsymbol{y}^1(0)$, $\boldsymbol{y}^2(0)$, $\boldsymbol{y}^3(0)$, $\boldsymbol{y}^4(0)$ так, чтобы их компоненты удовлетворяли краевому условию при $x = 0$. Используя выбранные векторы как начальные условия, проинтегрируем численно систему (1) при некотором значении параметра частоты λ, получим 4 линейно независимых частных решения. Составим из этих частных решений линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами, которая будет являться общим решением системы (1), удовлетворяющим краевым условиям слева. Это общее решение подставим в краевые условия на правом конце при $x = l$, получим систему уравнений для нахождения произвольных постоянных. В случае расчета собственных частот система для определения постоянных интегрирования является однородной, то есть она будет иметь ненулевое решение при равенстве нулю определителя системы (частотного определителя), величина которого зависит от значения параметра λ, при котором выполнялось численное интегрирование. Значения λ, обращающие в нуль частотный определитель, есть собственные частоты.

Таким образом, определение собственных частот требует многократного интегрирования системы дифференциальных уравнений (1) для различных значений λ, которые надо подбирать так, чтобы частотный определитель обратился в нуль.

Для нахождения собственных частот перебираются значения λ с некоторым шагом до тех пор, пока не будет найден интервал, на концах которого определитель имеет разные знаки. Это признак того, что собственная частота расположена на данном интервале. Уточнение собственной частоты выполняется методом секущих. Чтобы найти интервал, содержащий собственную частоту, приходится выполнять дополнительные предварительные исследования.

2. Распараллеливание вычислений при расчете собственных частот

Для каждого значения параметра частоты λ требуется построить 4 частных решения системы (1). Очевидной является идея строить эти частные решения параллельно, используя 4 процессора. Но рассматриваемая система (1), описывающая напряженно-деформированное состояние тонких оболочек, такова, что такое распараллеливание оказывается невозможным, так как одни частные решения оказываются быстро растущими, а другие быстро убывающими, в результате чего первоначально независимые решения оказываются фактически зависимыми, и частотный определитель обращается в нуль при любых значений λ.

Для борьбы с этим явлением используют метод ортогональной прогонки С.К. Годунова [3], состоящий в том, что частные решения строятся не по отдельности, а совместно, и для преодоления «сплющивания» системы векторов частных решений проводится их ортонормирование через определенное число шагов интегрирования. Таким образом, при реализации метода ортогональной прогонки невозможно распараллеливание для независимого построения частных решений.

Другой возможностью распараллелить вычисления является распараллеливание по волновым числам, так как расчеты собственных частот для различных значений чисел волн в окружном направлении m можно выполнять независимо друг от друга. Данный подход удобен еще и тем, что число волн m явно входит в систему (1). Такое распараллеливание было реализовано в виде программы на языке С с использованием технологии MPI. Программа позволяет рассчитать собственные частоты оболочки для заданного количества волновых чисел.

3. Пересылка исходных данных на процессы параллельной программы

При разработке программы нужно было решить вопрос о передаче исходных данных, необходимых для расчетов, на все процессы параллельной программы. Геометрию и размеры типичной оболочки вращения описывают около 20 параметров, для которых в программе назначены индивидуальные числовые переменные. Ведущий процесс мог бы прочитать эти параметры из текстового файла и сделать соответствующее число рассылок на остальные процессы программы. Такой подход неудобен тем, что функцию распределения данных пришлось бы вызывать около 20 раз для пересылки небольших порций данных, а это привело бы к значительным затратам времени на рассылку. Уменьшить количество рассылок позволяет следующий алгоритм распределения исходных данных по процессам.

Нулевой процесс открывает входной файл как текстовый и читает количество рассчитываемых частот `MTS`. Если число процессов окажется больше количества частот, программа прерывается. Если число процессов не превышает количества рассчитываемых собственных частот, исходный файл закрывается и вновь открывается как бинарный, что позволяет определить его размер в байтах. Найденный размер файла рассылается всем процессам, участвующим в вычислениях, и используется в качестве размера символьного буфера для временного размещения исходных данных. Нулевой процесс читает входной файл как бинарный в собственный буфер, а затем рассылает его содержимое всем процессам программы функцией MPI_Bcast(…). Процессы создают текстовый входной поток, связывают его с буфером исходных данных и выполняют чтение из буфера в числовые переменные программы.

Набор волновых чисел делится равномерно между процессами на отдельные диапазоны. Каждый процесс вызывает функцию, которая находит собственные частоты для заданного диапазона волновых чисел. Сборка результатов осуществляется на нулевом процессе с помощью функции MPI_Gatherv(…), вызываемой каждым процессом параллельной программы. Нулевой процесс выводит результаты в выходной файл.

Работу программы поясняет табл. 1. Строки таблицы соответствуют шагам работы алгоритма. В ячейках таблицы описаны действия, выполняемые процессами параллельной программы.

Таблица 1. Схема работы программы расчета собственных частот

Процесс 0	Процесс 1	…	Процесс `k`
Чтение `MTS` из `Input.txt`. Проверка `ProcNum <= MTS`			
Чтение `Input.txt` как бинарного в `BUFF`			
Рассылка `BUFF`	Прием `BUFF`	…	Прием `BUFF`
Чтение `BUFF` как текстового потока	Чтение `BUFF` как текстового потока	…	Чтение `BUFF` как текстового потока
Определение диапазона волновых чисел	Определение диапазона волновых чисел	…	Определение диапазона волновых чисел
Расчет собственных частот	Расчет собственных частот	…	Расчет собственных частот
Отсылка результатов процессу 0	Отсылка результатов процессу 0	…	Отсылка результатов процессу 0
Вывод результатов			

4. Результаты расчетов и выводы

На вычислительном кластере ННГУ [5] были выполнены численные эксперименты по расчету собственных частот конической оболочки, сечение которой вдоль оси симметрии приведено на рис. 1. Для тестирования программы рассматривалась оболочка со следующими исходными данными: угол при большем основании $\beta = 60^0$, отношение радиуса меньшего основания к среднему радиусу $r/R_{cp} = 1/3$, отношение толщины оболочки к среднему радиусу $H/R_{cp} = 0.005$, коэффициент Пуассона материала оболочки $\nu = 0.3$. В качестве меридиональной координаты бралось отношение расстояния s, отсчитываемое вдоль меридиана, к среднему радиусу: $x = s/R_{cp}$. Торцы оболочки предполагались жестко защемленными.

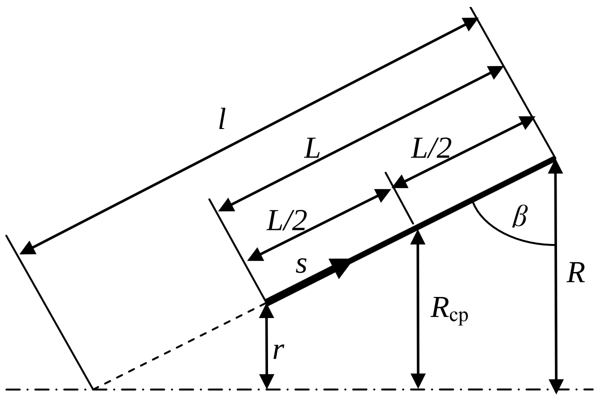

Рис. 1. Геометрические параметры усеченной конической оболочки

В приводимой далее формуле для частоты λ использованы следующие обозначения: E – модуль упругости материала оболочки, ρ – плотность материала, ω – круговая частота

$$\lambda = \omega R_{cp}\sqrt{\rho\frac{1-\nu^2}{E}}.$$

В табл. 2 проводится сравнение безразмерных собственных частот, вычисленных с помощью обсуждаемой программы, с результатами работы [6] для 6 чисел волн. Это сравнение убеждает в правильности работы программы.

Таблица 2. Сравнение параметра частоты с результатами работы [6]

m	3	4	5	6	7	8
λ	0.1629	0.1137	0.09358	0.09043	0.09373	0.09990
λ [6]	0.1635	0.1145	0.09426	0.09078	0.09387	0.09987
Разница, %	0.37	0.70	0.72	0.39	0.15	0.03

Результаты экспериментов по определению влияния числа используемых процессоров на время вычислений приведены в табл. 3. Видно, что ускорение пропорционально числу задействованных процессоров, но коэффициент пропорциональности, то есть эффективность [5], составляет только 0.5. Тем не менее, можно сделать вывод, что распараллеливание вычислений при расчете собственных частот дает существенное сокращение времени расчетов.

Таблица 3. Время вычислений и ускорение при расчете собственных частот

Количество частот	Время расчета на одном процессоре	Число процессоров	Время расчета	Ускорение
MTS = 6	T1 = 0.21 сек	6	T6 = 0.070 сек	T1 / T6 = 3
MTS = 12	T1 = 0.6 сек	12	T12 = 0.1 сек	T1 / T12 = 6

Литература

1. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций.– М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
2. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник.– М.: Машиностроение, 1981.– 216 с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
4. Тарасов В.Л. Распараллеливание вычислений при расчете собственных частот оболочек вращении // Труды IX Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем».– Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2012. – С. 905–914.
5. Интегрированная среда высокопроизводительных вычислений ННГУ – [http://cluster.software.unn.ru].
6. Кольман Э.Р., Силкин В.Б. Свободные колебания конической оболочки при различных граничных условиях // Расчеты на прочность.– М.: Машиностроение, 1968, вып. 13, С. 251-273.
7. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 423 с.