

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВУХУРОВНЕВОГО ИНДЕКСНОГО АЛГОРИТМА ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С.В. Сидоров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Данная работа продолжает развитие параллельных алгоритмов минимизации многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях, построенных на базе индексного метода. Редукция многомерных задач к одномерным основана на приближенном фрактальном отображении единичного отрезка вещественной оси на гиперкуб (развертки типа кривых Пеано). В одном из параллельных алгоритмов используется схема построения множества кривых Пеано («вращаемые развертки»), которую можно эффективно применять при решении задачи на кластере с десятками и сотнями процессоров. Другой подход к распараллеливанию ориентирован на вычислительные узлы с общей памятью. Двухуровневый параллельный индексный алгоритм глобального поиска объединяет эти подходы, учитывая иерархическую структуру современных высокопроизводительных кластерных систем.

1. Постановка задачи глобальной оптимизации

Рассмотрим задачу глобальной оптимизации вида

$$\begin{aligned} \varphi^* = \varphi(y^*) = \min \{ \varphi(y) : y \in D, g_j(y) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}, \\ D = \{ y \in \mathbb{R}^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где целевая функция $\varphi(y)$ (в дальнейшем обозначаемая также $g_{m+1}(y)$) и левые части ограничений $g_j(y), 1 \leq j \leq m$, удовлетворяют условию Липшица с соответствующими константами $L_j, 1 \leq j \leq m+1$, а именно

$$|g_j(y_1) - g_j(y_2)| \leq L_j |y_1 - y_2|, 1 \leq j \leq m+1, y_1, y_2 \in D.$$

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок $[0, 1]$ на N -мерный гиперкуб P

$$P = \{ y \in \mathbb{R}^N : -2^{-1} \leq y_i \leq 2^{-1}, 1 \leq i \leq N \} = \{ y(x) : 0 \leq x \leq 1 \},$$

исходную задачу можно редуцировать к следующей одномерной задаче:

$$\varphi(y(x^*)) = \min \{ \varphi(y(x)) : x \in [0, 1], g_j(y(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}. \quad (2)$$

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией и липшицевыми ограничениями одномерную задачу, в которой соответствующие функции удовлетворяют равномерному условию Гельдера (см. [2]), т.е.

$$\begin{aligned} |g_j(y(x')) - g_j(y(x''))| \leq K_j |x' - x''|^{1/N}, x', x'' \in [0, 1], \\ 1 \leq j \leq m+1, \end{aligned}$$

где N есть размерность исходной многомерной задачи, а коэффициенты K_j связаны с константами Липшица L_j исходной задачи соотношениями $K_j \leq 4L_j \sqrt{N}$.

Различные варианты индексного алгоритма для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [1, 4, 7].

2. Вращаемые развертки и параллельный метод для кластера

Редукция многомерных задач к одномерным с помощью разверток имеет такие важные свойства, как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности разностей функций при ограниченности вариации аргумента. Однако при этом происходит потеря части информации о близости точек в многомерном пространстве, так как точка $x \in [0, 1]$ имеет лишь левых и правых соседей, а соответствующая ей точка $y(x) \in \mathbb{R}^N$ имеет соседей по 2^N направлениям. А при использовании отображений типа кривой Пеано близким в N -мерном пространстве образам y', y'' могут соответствовать достаточно далекие прообразы x', x'' на отрезке $[0, 1]$. Как результат, единственной точке глобального минимума в многомерной задаче соответствует несколько (не более 2^N) локальных экстремумов в одномерной задаче, что, естественно, ухудшает свойства одномерной задачи.

Сохранить часть информации о близости точек позволяет использование множества отображений

$$Y_L(x) = \{y^1(x), \dots, y^L(x)\} \quad (3)$$

вместо применения единственной кривой Пеано $y(x)$ (см. [3, 5]). Каждая кривая Пеано $y^i(x)$ из $Y_L(x)$ может быть получена в результате поворота исходной кривой. При этом найдется отображение $y^i(x)$, которое точкам многомерного пространства y', y'' , которым при исходном отображении соответствовали достаточно далекие прообразы на отрезке $[0, 1]$, будет сопоставлять более близкие прообразы x', x'' .

Максимальное число различных поворотов развертки, отображающей N -мерный гиперкуб на одномерный отрезок, составляет 2^N . Использование всех из них является избыточным, требуется выбрать лишь часть из всех возможных вариантов. В предложенной схеме преобразование развертки осуществляется в виде поворота на угол $\pm\pi/2$ в каждой из координатных плоскостей. Число подобных пар поворотов определяется числом координатных плоскостей пространства, которое равно $C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$, а общее

число преобразований будет равно $N(N-1)$. Учитывая исходное отображение, приходим к заключению, что данный способ позволяет строить до $N(N-1)+1$ развертки для отображения N -мерной области на соответствующие одномерные отрезки. В случае необходимости данный способ построения множества отображений может быть легко «отмасштабирован» для получения большего (вплоть до 2^N) числа разверток.

Использование множественных отображений (3) позволяет решать задачу (1) путем параллельного решения L задач вида (2) на наборе отрезков $[0, 1]$. Каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре с использованием развертки y^s , $1 \leq s \leq L$. Результаты испытания в точке x^k , полученные конкретным процессором для решаемой им задачи, интерпретируются как результаты испытаний во всех остальных задачах (в соответствующих точках x^{k1}, \dots, x^{kL}) и рассылаются другим процессорам. При таком подходе испытание в точке $x^k \in [0, 1]$, осуществляемое в s -й задаче, состоит в последовательности действий:

1. Определить образ $y^k = y^s(x^k)$ при соответствии $y^s(x)$.
2. Проинформировать остальные процессоры о начале проведения испытания в точке y^k (блокирование точки y^k).
3. Вычислить величины $g_1(y^k), \dots, g_v(y^k)$, где значения индекса $v \leq m$ определяются условиями

$$g_j(y^k) \leq 0, 1 \leq j < v, g_v(y^k) > 0, v \leq m.$$

Выявление первого нарушенного ограничения прерывает испытание в точке y^k . В случае, когда точка y^k допустима, испытание включает вычисление значений всех

функционалов задачи, при этом значение индекса принимается равным величине $v=m+1$. Тройка

$$y_s(x^k), v=v(x^k), z^k=g_v(y^s(x^k)) \quad (4)$$

является результатом испытания в точке x^k .

4. Определить прообразы $x^{kl} \in [0, 1]$, $1 \leq l \leq L$, точки y^k , и интерпретировать испытание, проведенное в точке $y^k \in D$, как проведение испытаний в L точках

$$x^{k1}, \dots, x^{kl}, \quad (5)$$

с одинаковыми результатами

$$\begin{aligned} v(x^{k1}) &= \dots = v(x^{kL}) = v(x^k), \\ g_v(y^1(x^{k1})) &= \dots = g_v(y^L(x^{kL})) = z^k. \end{aligned}$$

Проинформировать остальные процессоры о результатах испытания в точке y^k , разослав им тройки (y^k, v, z^k) .

Каждый процессор имеет свою копию программных средств, реализующих вычисление функций задачи, и решающее правило алгоритма, а также собственное хранилище поисковой информации. Для организации взаимодействия на каждом процессоре создается очередь, в которую процессоры помещают информацию о выполненных итерациях в виде троек: точка очередной итерации, индекс и значение из (4), причем индекс заблокированной точки полагается равным -1 , а значение функции в ней не определено.

3. Параллельный метод для вычислительного узла с общей памятью

Второй подход к распараллеливанию эксплуатирует характеристическую схему индексного алгоритма. В редуцированной одномерной задаче на очередной итерации для каждого интервала (x_{i-1}, x_i) , $1 \leq i \leq k+1$, вычисляется характеристика $R(i)$, где

$$R(i) = \begin{cases} \Delta_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r_v^2 \mu_v^2 \Delta_i} - 2 \frac{(z_i + z_{i-1} - 2z_v^*)}{r_v \mu_v}, & v=v(x_{i-1})=v(x_i) \\ 2\Delta_i - 4 \frac{(z_i - z_v^*)}{r_v \mu_v}, & v=v(x_i) > v(x_{i-1}) \\ 2\Delta_i - 4 \frac{(z_{i-1} - z_v^*)}{r_v \mu_v(l, \tau)}, & v=v(x_{i-1}) > v(x_i) \end{cases}$$

$$\Delta_i = (x_i - x_{i-1})^{1/N}.$$

Величины $r_v > 1$, $1 \leq v \leq m+1$, являются параметрами алгоритма.

Далее определяется s (s – как правило, число вычислительных ядер на узле кластера) интервалов $(x_t, x_{t+1})_k$, $1 \leq k \leq s$, которым соответствует s наибольших характеристик

$$R_k(t) = \max\{R(i): 1 \leq i \leq k+1\}, 1 \leq k \leq s. \quad (6)$$

На s вычислительных ядрах параллельно проводится очередное испытание в средней точке интервала $(x_t, x_{t+1})_k$, $1 \leq k \leq s$, если индексы его конечных точек не совпадают, т.е.

$$x^{q+1} = \frac{(x_t + x_{t+1})_k}{2}, \quad v(x_{t-1}) \neq v(x_t), 1 \leq k \leq s.$$

В противном случае провести испытание в точке

$$x^{q+1} = \frac{(x_t + x_{t+1})_k}{2} - \text{sign}(z_t - z_{t-1})_k \frac{1}{2r_v} \left[\frac{|z_t - z_{t-1}|_k}{\mu_v} \right]^N,$$

$$v(x_{t-1}) = v(x_t), 1 \leq k \leq s.$$

Результаты испытания заносятся в общее хранилище поисковой информации.

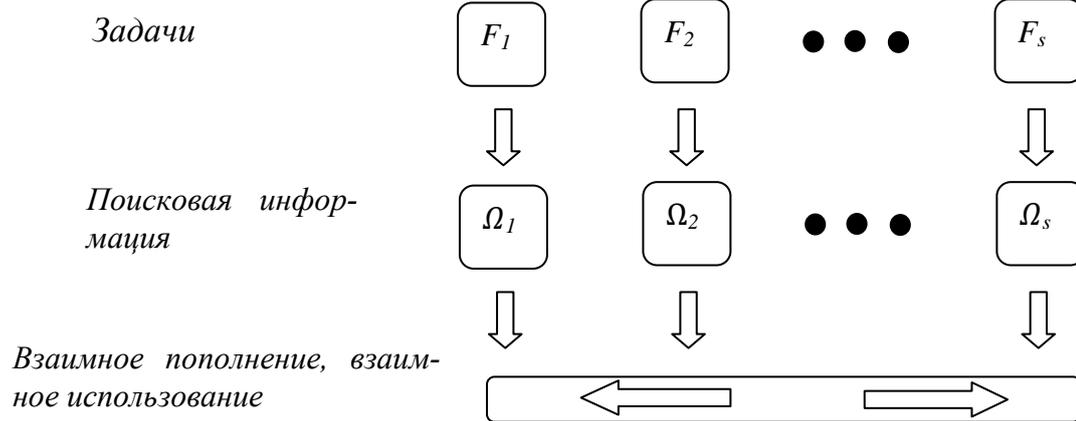


Рис 1. Информационная связанность подзадач оптимизации на узле с общей памятью

4. Двухуровневый параллельный алгоритм

Объединение двух описанных подходов позволяет получить гибридный алгоритм, эффективно использующий распределение поисковой информации по узлам кластера и общую память в рамках одного узла.

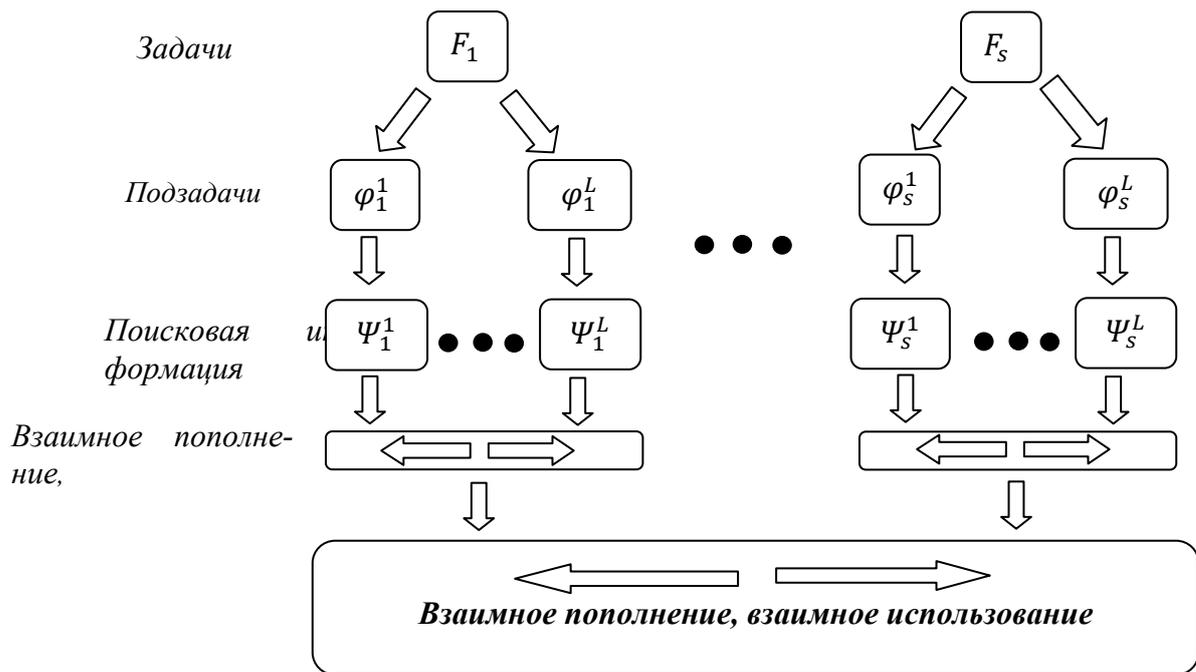


Рис 2. 2-х уровневая модель информационная связанности подзадач

Заключение

Данная работа исследует двухуровневую схему параллельных вычислений, позволяющую исключить передачу данных на вычислительном узле с общей памятью. Вся вычислительная система асинхронно решает информационно связанные подзадачи для каждой разверки (по одной на узел кластера). Проведено исследование эффективности данного алгоритма. Результаты вычислений приводятся в докладе.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (соглашение 14.В37.21.0878).

Литература

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. (Информационно-статистические алгоритмы). М.: Наука, 1978.
2. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
3. Стронгин Р.Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991, Т.31, №8. С. 1173–1185.
4. Стронгин Р.Г., Баркалов К.А. О сходимости индексного алгоритма в задачах условной оптимизации с ϵ -резервированными решениями // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1999. С. 273 – 288.
5. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
6. Баркалов К.А., Стронгин Р.Г. Метод глобальной оптимизации с адаптивным порядком проверки ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002, Т.42, №9. С. 1338–1350.
7. Баркалов К.А. Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005.
8. Баркалов К.А., Рябов В.В., Сидоров С.В. Использование кривых Пеано в параллельной глобальной оптимизации // Материалы Девятой международной конференции-семинара «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах», Владимир, 2009. С. 44–47.
9. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Баркалов К.А. Параллельные методы решения задач глобальной оптимизации // Известия вузов. Приборостроение. – 2009, Т. 52, № 10. С. 25–32.
10. Баркалов К.А., Рябов В.В., Сидоров С.В. Масштабируемые параллельные алгоритмы глобальной оптимизации со смешанной локально-глобальной стратегией // Материалы международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2010», Уфа, 2010. С. 402–409.
11. Стронгин Р.Г., Маркин Д.Л. Минимизация многоэкстремальных функций при невыпуклых ограничениях // Кибернетика. 1986. №4.
12. Törn A. and Zilinskas A. Global Optimization. Lecture Notes in Computer Science, No 350, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

Thank you for evaluating AnyBizSoft PDF Splitter.

A watermark is added at the end of each output PDF file.

To remove the watermark, you need to purchase the software from

<http://www.anypdftools.com/buy/buy-pdf-splitter.html>