ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЫСОКОЙ ТОЧНОСТИ НА КОМПЬЮТЕРЕ НОВОГО ТИПА

Я.Д. Сергеев[1,2], Д.Е. Квасов[2]

[1]*Калабрийский университет, Ренде, Италия*
[2]*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

Предлагается новая позиционная система с бесконечным основанием, позволяющая записывать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов. Обсуждаются вопросы построения новых высокоточных численных методов на основе данной системы с использованием нового типа суперкомпьютеров – компьютера бесконечности.

Введение

Вопросам, связанным с бесконечностью и бесконечно малыми величинами посвящена обширная литература (см., например, [3, 4, 11, 13]). Эти вопросы, как правило, затрагивают проблемы, напрямую связанные с основаниями математики. Те ответы на них, которые считаются удовлетворительными в каждый конкретный исторический период, активно используются как в формировании фундамента математики этого времени, так и при решении прикладных задач. Именно использование понятий бесконечно большого и бесконечно малого в численных методах и изучение способов их эффективной реализации на высокопроизводительных компьютерах, а также расширение границ их применения является основной задачей настоящей работы.

1. Новая система счисления для представления конечных, бесконечно больших и бесконечно малых величин

Современная точка зрения на бесконечность во многом определяется идеями Г. Кантора, который показал, что существуют бесконечные множества, имеющие разную мощность (см. [4]). Современные системы записи конечных чисел позволяют проводить вычисления с высокой точностью с конечными величинами. При работе с бесконечными числами возникают трудности. Существующие системы счисления не позволяют нам численно (не символьно) работать с бесконечными и бесконечно малыми величинами на компьютере с использованием тех же формальных правил, что и при работе с конечными числами. Среди причин, которые не позволяют нам организовать такую работу, можно выделить, как минимум, следующие: существование неопределенных форм (например, ∞-∞, ∞/∞, $0*\infty$ и т.д.), невыполнение для бесконечности аристотелевского принципа «часть меньше целого» (действительно, для любого конечного z следует $z + 1 > z$, тогда как $\infty+1=\infty$) и невозможность хранения бесконечного числа знаков в конечной памяти компьютера.

В работах [14, 15, 18, 20, 21] предлагается новая позиционная система записи с бесконечной базой, позволяющая выражать бесконечно большие и бесконечно малые величины в явной форме конечным числом символов. При этом вводится новый нумерал ①, называемый *гросс-единица* (от англ. “grossone”, «большая единица»), определяемый как число элементов в множестве натуральных чисел, а символ ∞ (а также $\aleph_0$, $\aleph_1$, ω) исключается из числа используемых нумералов (под нумералом понимается символ или группа символов, используемых для представления числа). Некая величина A в новой позиционной системе записи представляется в виде:

$$A = a_{k_1} ①^{k_1} a_{k_2} ①^{k_2} \dots a_{k_K} ①^{k_K} = \sum_{i=1}^{K} a_{k_i} ①^{k_i}, \text{ где } k_1 > k_2 > \dots > k_{K\text{-}1} > k_K. \qquad (1)$$

В записи (1) конечные нумералы a_{k_i}, $1 \le i \le K$, называются *гросс-цифрами* и могут быть как положительными, так и отрицательными; величины k_i, $1 \le i \le K$, называются *гросс-степенями* и могут быть конечными, бесконечными и бесконечно малыми; сама же величина A называется *гросс-нумералом*. Таким образом, конечные величины a составляют частный случай записи (1), а именно, $a = a①^0$. Правила выполнения арифметических операций с нумералами типа (1) подробно описаны в [5, 14–17].

Предлагаемая методология позволяет вычислить у определенных бесконечных множеств число их элементов (см. [14, 15, 21]), соблюдая принцип «часть меньше целого». Например, легко определить, что количество нечетных натуральных чисел равно ①/2, также как и количество четных натуральных чисел, число целых чисел равно 2①+1 и т.д. Если из множества целых чисел исключить ноль, то в нем останется 2① элементов. При этом следует ①/2 < ① < 2① < 2①+1. Аналогично, можно вычислить число элементов с точностью до одного элемента у определенных множеств континуальной мощности и показать, например, что $2^{①} < 3^{①} - 1 < 3^{①} < 3^{①} + 1 < ①^{①}$. При этом новый подход не противоречит теориям Г. Кантора (см. [4]) и нестандартного анализа А. Робинсона (см. [3, 13]), а дополняет их, постоянно отслеживая разницу между числами и нумералами и изучая возможность практического выполнения операций (см. [7, 12, 20, 21]).

Тем самым, данный физически ориентированный подход к численным расчетам позволяет построить простую и наглядную арифметику для практической работы не только с конечными числами, но и с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. При этом наблюдаемое в окружающем нас мире свойство «часть всегда меньше целого», используемое при работе с конечными числами, естественно распространяется на бесконечно большие и бесконечно малые величины.

2. Компьютер бесконечности

При решении многих прикладных задач, в частности, численного анализа математических моделей, негладкой и глобальной оптимизации, аппроксимации и т.д. возникают условия, при которых требуется исследовать математические модели в их предельных состояниях и проводить вычислительные эксперименты с супервысокой точностью. Поскольку традиционные процессоры не позволяют проводить вычисления с бесконечными и бесконечно малыми числами, эти требования приводят к необходимости прекращения вычислений на компьютерах и привлечении экспертов для решения этих проблем путем создания новых математических моделей и т.п.

Рассмотренная система записи чисел с бесконечным основанием открывает новое перспективное направление в вычислительной математике на базе «компьютера бесконечности», позволяющего автоматически производить численные (не символьные) расчеты с бесконечными, бесконечно малыми, конечными числами, а также с бесконечными числами с конечными и бесконечно малыми частями (см. [5, 8, 16, 17]). В рамках этого направления могут быть развиты принципиально новые вычислительные модели и алгоритмы с использованием исчисления бесконечно малых и бесконечно больших величин для нового поколения аппаратно-программных компьютерных платформ, обладающих экстремальными характеристиками по производительности и точности. При этом повышение точности вычислительных операций осуществляется не за счет количественного увеличения вычислительной мощи компьютеров, а за счет применения качественно новых форматов данных и позиционной системы счисления с основанием гросс-единица.

Существует программный прототип компьютера бесконечности, использующий специально разработанную (на языках C++, C#) библиотеку классов и методов (см. [8]), которая дополняет существующие типы данных новым типом *Grossnumber* для операций с гросс-нумералами. Библиотека позволяет создавать объекты класса *Grossnumber*, соответствующие нумералам (1), и взаимодействовать с ними путем вызова специально разработанных методов, эффективно реализующих основные математические операции и дополнительные функции для расширения возможностей использования гросс-нумералов (см. [5, 8, 16, 17]).

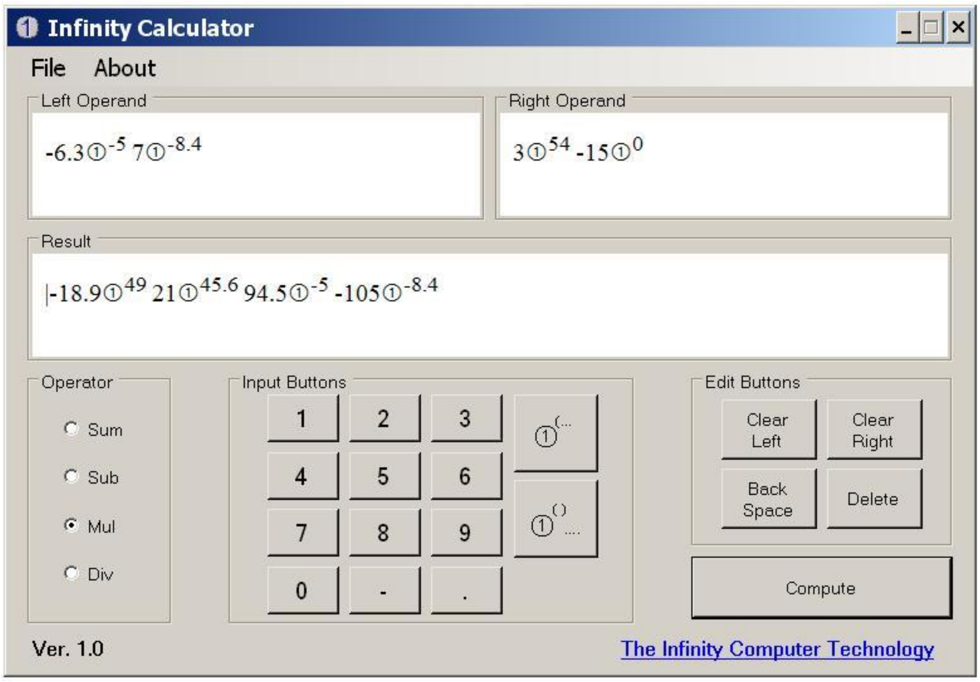

Рис. 1. Интерфейс калькулятора бесконечности (с примером умножения двух гросс-нумералов)

С целью демонстрации работы компьютера бесконечности (см. [23]), в качестве его программного прототипа предлагается так называемый «калькулятор бесконечности», который позволяет осуществлять арифметические операции с гросс-нумералами. На рис. 1 приведен интерфейс калькулятора: в данном примере произведено умножение двух гросс-нумералов, $A_{\text{left}} = -6.3①^{-5}\,7①^{-8.4}$ и $A_{\text{right}} = 3①^{54}\,-15①^{0}$, с результатом операции, $A_{\text{result}} = -18.9①^{49}\,21①^{45.6}\,94.5①^{-5}\,-105①^{-8.4}$. Как видно из записи операндов и результата, гросс-нумерал A_{left} представляет бесконечно малую величину (все гросс-степени конечны и отрицательны), A_{right} – бесконечно большую величину (в которой присутствует также и конечная часть, $-15①^{0} = -15$), а результат A_{result} состоит как из бесконечно больших ($-18.9①^{49}\,21①^{45.6}$), так и бесконечно малых ($94.5①^{-5}\,-105①^{-8.4}$) гросс-нумералов.

3. Примеры прикладных задач

Предлагаемый подход позволяет дать детальные ответы на серию классических вопросов и парадоксов, имеющих дело с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами. Например, с новых позиций могут быть рассмотрены машины Тьюринга (см. [22]) и первая проблема Гильберта (см. [18]). В работах [9, 10, 12, 19, 21, 24, 25] обсуждаются границы применимости нового подхода и рассматриваются приложения (численный анализ, теория вероятности, оптимизация, фракталы и др.).

В качестве простого, но эффектного примера рассмотрим задачу условной оптимизации. Как известно (см., например, [1, 2, 6]), одним из методов ее решения является использование штрафных функций с последующим анализом условий регулярности. При этом возникает проблема подбора штрафных параметров, которая не всегда может быть удовлетворительно решена. Оказывается (см. [10]), использование ①-нумералов позволяет избежать неинтуитивного итерационного выбора коэффициентов штрафных функций, автоматизируя решение задач безусловной оптимизации.

Пусть, например, требуется найти решение следующей простой задачи:

$$\min (1/2\, x_1^2 + 1/6\, x_2^2), \quad x = (x_1,x_2):\ x_1+ x_2 = 1. \tag{2}$$

Используя метод штрафных функций (см., например, [2]), эта задача может быть решена путем (безусловной) минимизации некоей новой функции, например:

$$\min (1/2\, x_1^2 + 1/6\, x_2^2) - 1/(2\varepsilon)(1- x_1- x_2)^2, \tag{3}$$

где выбор штрафного параметра ε осуществляется либо путем его последовательного уменьшения, либо априорно. И в том, и в другом случаях имеются известные трудности с определением данного коэффициента. Заменяя же в (3) величину 1/ε на ① и используя необходимые условия экстремума

$$x_1 - ①(1-x_1-x_2) = 0 \text{ и } 1/3x_2 - ①(1-x_1-x_2) = 0,$$

получаем следующую стационарную точку минимизируемой функции:

$$x^*_1 = 1①/(1+4①), \qquad x^*_2 = 3①/(1+4①). \tag{4}$$

Легко заметить, что значения x^*_1, x^*_2 из (4) могут быть записаны также как:

$$x^*_1 = 1/4 - ①^{-1}(1/16 - 1/64①^{-1} \ldots), \qquad x^*_2 = 3/4 - ①^{-1}(3/16 - 3/64①^{-1} \ldots),$$

где в записях гросс-нумералов x^*_1, x^*_2 можно выделить конечные части ($\bar{x}_1$=1/4 и $\bar{x}_2$=3/4, соответственно) и бесконечно малые (гросс-нумералы с отрицательными гросс-степенями). Оставляя в этих записях лишь конечные части, автоматически получаем решение $\bar{x}_1$=1/4, $\bar{x}_2$=3/4 исходной задачи (2) без привлечения процедуры подбора штрафного параметра в (3).

Подобная техника может быть использована не только при решении задач безусловной оптимизации, но и во многих других областях, включая методы решения систем линейных и дифференциальных уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, государственное соглашение о предоставлении гранта № 14.B37.21.0878.

Литература

1. Баркалов К.А. Оценки эффективности параллельного индексного метода глобальной оптимизации // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия “Математическое моделирование. Оптимальное управление”. – 2011. – Т. 3, № 2. – С. 13–19.
2. Гергель В.П., Стронгин Р.Г., Городецкий С.Ю., Гришагин В.А., Маркина М.В. Современные методы принятия оптимальных решений. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2002. – 190 с.
3. Дэвис М. Прикладной нестандартный анализ. – М.: Мир, 1980. – 236 с.
4. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1988. – 431 с.
5. Сергеев Я.Д. Компьютерная система для хранения бесконечных, бесконечно малых и конечных величин и выполнения с ними арифметических операций: Патент РФ № 2395111. – 20.07.2010.

6. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
7. Сочков А.Л. Философские аспекты новейшей арифметики бесконечности // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия “Социальные науки”. – 2009. – Т. 3, № 15. – С. 72–77.
8. Brugnano L., Consegni L., Kvasov D.E., Sergeyev Ya.D. On implementation aspects of the Infinity Computer // Proceedings of the International Workshop “Infinity-2010: Infinite and Infinitesimal in Mathematics, Computing and Natural Sciences”, Cetraro (Italy), May 17–21, 2010. – DEIS, Università della Calabria: Rende (CS). – P. 19.
9. D’Alotto L. Cellular automata using infinite computations // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, № 16. – P. 8077–8082.
10. De Cosmis S., De Leone R. The use of grossone in Mathematical Programming and Operations Research // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, № 16. – P. 8029–8038.
11. Lolli G. Infinitesimals and infinites in the history of mathematics: A brief survey // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, № 16. – P. 7979–7988.
12. Margenstern M. Using Grossone to count the number of elements of infinite sets and the connection with bijections // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2011. – Vol. 3, № 3. – P. 196–204.
13. Robinson A. Non-standard analysis. – Princeton University Press, 1996. – 308 p.
14. Sergeyev Ya.D. Arithmetic of infinity. – CS: Edizioni Orizzonti Meridionali, 2003. – 112 p.
15. Sergeyev Ya.D. A new applied approach for executing computations with infinite and infinitesimal quantities // Informatica. – 2008. – Vol. 19, № 4. – P. 567–596.
16. Sergeyev Ya.D. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them: EU patent 1728149. – 03.06.2009.
17. Sergeyev Ya.D. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them: USA patent 7,860,914. – 28.12.2010.
18. Sergeyev Ya.D. Counting systems and the First Hilbert problem // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. – 2010. – Vol. 72, № 3-4. – P. 1701–1708.
19. Sergeyev Ya.D. Higher order numerical differentiation on the Infinity Computer // Optimization Letters. – 2011. – Vol. 5, № 4. – P. 575–585.
20. Sergeyev Ya.D. Lagrange Lecture: Methodology of numerical computations with infinities and infinitesimals // Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino. – 2010. – Vol. 68, № 2. – P. 95–113.
21. Sergeyev Ya.D. Numerical point of view on Calculus for functions assuming finite, infinite, and infinitesimal values over finite, infinite, and infinitesimal domains // Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications. – 2009. – Vol. 71, № 12. – P. e1688–e1707.
22. Sergeyev Ya.D., Garro A. Observability of Turing Machines: A refinement of the theory of computation // Informatica. – 2010. – Vol. 21, № 3. – P. 425–454.
23. The Infinity Computer web page, http://www.theinfinitycomputer.com
24. Vita M.C., De Bartolo S., Fallico C., Veltri M. Usage of infinitesimals in the Menger’s Sponge model of porosity // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, № 16. – P. 8187–8195.
25. Zhigljavsky A. Computing sums of conditionally convergent and divergent series using the concept of grossone // Applied Mathematics and Computation. – 2012. – Vol. 218, No 16. – P. 8064–8076.