ГЛОБАЛЬНЫЙ ПОИСК В ЗАДАЧАХ СВЕРХВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ НИЖЕГОРОДСКОЙ ОБЛАСТИ

Н.Н. Оленёв[1], В.В. Рябов[2]

[1]Вычислительный центр РАН, Москва
[2]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Данная работа продолжает совместные исследования ВЦ РАН и ННГУ по построению и идентификации математической модели Нижегородской области, завершая второй этап: идентификации параметров уже построенной и уточнённой модели с неулучшаемым на данный момент числом независимых параметров (N=57). Для решения задачи такой размерности применяются эффективные алгоритмы, развиваемые нижегородской научной школой глобальной оптимизации.

1. Задача идентификации модели региональной экономики

Оценка экономического развития региона особенно важна во время переходных процессов от одной стратегии развития к другой. Для адекватности используемой модели требуется, чтобы она была должным образом идентифицирована по исторической статистике. Другими словами, требуется определить параметры модели, при которых ее поведение в прошлом соответствует историческим данным, то есть должная идентификация модели подразумевает ее верификацию по временным рядам макропоказателей изучаемой региональной экономики. Идентифицированная имитационная модель региональной экономики дает возможность получить количественную оценку динамики макропоказателей экономики региона, включая оценку экономического потенциала, показатели структуры человеческого капитала и его динамики.

Задача идентификации многосекторных моделей региональной экономики заключается в поиске значений неизвестных параметров модели, при которых результаты расчетов по модели временных рядов макропоказателей экономики близки к историческим статистическим данным для этих временных рядов. Критерием близости расчетных и исторических статистических временных рядов может служить свертка критериев Тейла для каждого макропоказателя [1]. Здесь исследование сталкивается с «проклятием размерности». Число параметров, которые нельзя определить напрямую из статистики, оказывается для таких моделей настолько велико, что прямое применение параллельных вычислений на суперкомпьютерах (перебор параметров по равномерной сетке) оказывается бессильным. Требуются новые пути решения для задачи идентификации многосекторных моделей экономики с помощью параллельных вычислений.

Применение эффективных параллельных алгоритмов глобальной оптимизации, развиваемых в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского, позволяет вплотную приблизиться к решению подобных задач. Огромное количество независимых параметров модели (изначально N=60, на данный момент N=57) требует применения всех возможных способов ускорения сходимости, а также построения дополнительных локальных оценок оптимума с использованием метода Хука-Дживса. Применение алгоритмов с высокой эффективностью распараллеливания на кластере ННГУ позволяет достичь предела вычислительных ресурсов.

2. Трехсекторная модель экономики Нижегородской области

Полное описание модели обширно, оно представлено в [1]. Здесь укажем только основные положения. При построении модели экономики региона выделено восемь экономических агентов. Во-первых, три производителя, которые в модели представлены тремя секторами экономики Нижегородской области: первый сектор включает добывающие и инфраструктурные отрасли, (2) второй – обрабатывающие отрасли региональной экономики, (3) третий – отрасли услуг, включая финансовые услуги. Во-вторых, три основных потребителя конечной продукции: (4) домашние хозяйства, (5) Правительство региона, (6) внешние для региона потребители. Замыкает модель описание поведения еще двух экономических агентов: (7) банковской системы региона, (8) торгового посредника. Модель экономики региона описывает динамику материальных и финансовых балансов через изменение запасов денег, продуктов и факторов производства. Модель учитывает налогообложение производителей и домашних хозяйств, а также теневой оборот в сфере производства и потребления. Производители поставляют продукцию конечного потребления на внутренние и внешние рынки, а также промежуточную продукцию в смежные сектора экономики. Домашние хозяйства потребляют конечную продукцию и предлагают труд производственным секторам экономики. Банковская система выпускает денежные средства и выдает кредиты производителям. Правительство региона формирует консолидированный региональный бюджет, собирая налоги, которые в модели представлены семью ставками: 1) налог на прибыль, 2) налог на добавленную стоимость, 3) акцизы, 4) единый социальный налог, 5) пошлины на вывоз продукции, 6) пошлины на ввоз продукции, 7) подоходный налог. Кроме того, Правительство региона распределяет полученные средства по основным экономическим агентам. Модель учитывает теневой оборот, который не облагается налогами.

Банковская система Нижегородской области не является замкнутой, большую роль в инвестиционных решениях играют филиалы Российских банков других регионов. В качестве первого приближения при описании банковской системы Нижегородской области предполагалось, что часть золотовалютных резервов Российской федерации обеспечивает резервирование активов Нижегородской области. Считаем, что банковские активы областной банковской системы состоят из золото-валютных резервов и суммарной задолженности производственных секторов экономики региона, а пассивы – из суммарных запасов денег у контрагентов банковской системы, которые подчиняются финансовому балансу банковской системы.

Полная модель содержит более ста соотношений. Число внешних по отношению к модели параметров, которые невозможно определить напрямую из данных статистики, удалось сократить до 63 за счет использования полученных нами соотношений между параметрами на равновесном начале. Казалось бы, подобного типа нормативные модели совершенно бессмысленны, поскольку для проведения осмысленных качественных и количественных расчетов на них необходимо провести идентификацию их внешних параметров, а большая часть параметров не может быть оценена напрямую из данных экономической статистики. Нами предложена новая технология идентификации внешних параметров модели, основанная на использовании высокоскоростных параллельных вычислений на многопроцессорной системе. Для идентификации параметров сравниваются полученные при расчетах на модели временные ряды макропоказателей экономики региона с соответствующими статистическими временными рядами. В качестве критериев близости временных рядов использован индекс несовпадения Тейла. Критерием качества идентификации параметров модели является количественное соответствие основных макроэкономических показателей статистическим показателям экономики региона за период с 2000-2010 гг.

3. Эффективные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации

Алгоритмы, развиваемые Нижегородской научной школой многоэкстремальной оптимизации, предполагают следующую постановку задачи:

$$\varphi^*=\varphi(y^*)=\min\{\varphi(y): y\in D\},$$
$$D=\{y\in R^N: a_i\le y_i\le b_i, 1\le i\le N\}, \tag{1}$$

где целевая функция $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица с соответствующей константой L, а именно

$$|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|\le L\|y_1-y_2\|, \; y_1,y_2\in D.$$

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок [0,1] на N-мерный гиперкуб P

$$P=\{y\in R^N: -2^{-1}\le y_i\le 2^{-1}, 1\le i\le N\}=\{y(x): 0\le x\le 1\},$$

исходную задачу можно редуцировать к следующей одномерной задаче:

$$\varphi(y_D(x^*))=\min\{\varphi(y_D(x)): x\in[0,1]\}.$$

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией одномерную задачу, в которой целевая функция удовлетворяет равномерному условию Гельдера (см. [5]), т.е.

$$|\varphi(y_D(x'))-\varphi(y_D(x''))|\le K|x'-x''|^{1/N}, \; x',x''\in[0,1],$$

где N есть размерность исходной многомерной задачи, а коэффициент K связан с константой Липшица L исходной задачи соотношением $K\le 4L\sqrt{N}$.

Различные варианты индексного алгоритма для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [4, 5].

Параллельная версия индексного метода основана на построении множественных отображений Пеано, получаемых путём сдвига или вращения гиперкубов друг относительно друга (сдвиговые и вращаемые развёртки), что позволяет заодно и улучшать сходимость алгоритма за счёт более точной адаптивной оценки неизвестной константы Гёльдера K в процессе вычислений. Целым рядом преимуществ обладает схема построения вращаемых развёрток, предложенная в работе [7] и позволяющая использовать до $N(N-1)+1$ вычислительных ядер.

Поскольку поиск глобального оптимума занимает длительное время, значительный интерес представляет также оценка локального оптимума, в области притяжения которого найден последний рекорд. Для получения такой оценки используется метод Хука-Дживса [6]. Он относится к прямым методам (или методам нулевого порядка), т.е. использует в ходе работы только значения целевой функции, не требуя ее дифференцируемости. Это хорошо согласуется с требованием липшицевости целевой функции в задаче (1).

В дополнение к этому, точки траектории спуска отображаются с использованием кривой Пеано на одномерный отрезок и используются для адаптивной оценки константы Гельдера K в ходе решения задачи (1). Таким образом, локальный спуск и алгоритм построения глобального покрытия области поиска используют поисковую информацию, полученную друг у друга.

Ещё одна модификация состоит в использовании последовательности приближений кривых Пеано к кривой Гильберта (развёртки растущего уровня детализации).

4. Развертки растущего уровня детализации

Изложенные ранее подходы, сохраняющие часть информации о близости точек в многомерном гиперкубе при отображении на отрезок, используют множественные отображения, основанные на аффинных преобразованиях (смещениях, поворотах) исходного отображения. Однако следует отметить, что потеря информации о близости точек усугубляется и с ростом детализации развёртки.

Поэтому в рамках данной работы предлагается подход, основанный на построении отображений различной степени детализации. Причём предлагаемая модификация способна дополнять подходы на основе поворотов и вращений.

Модификация состоит в том, чтобы выполнять поиск сначала на «грубой» сетке и постепенно увеличивать детализацию развертки, тем самым усложняя получаемую одномерную целевую функцию $\varphi(y_m(x)) \rightarrow \varphi(y_{m+1}(x))$ и увеличивая предельную точность поиска. При этом необходимо определить правило перехода на следующий уровень детализации. Если рассматривать данный подход как решение последовательности задач с различным m, то очевидными условиями перехода служат:

1) достижение такой точности поиска, что при текущем m две различные точки гиперкуба сливаются в одну на отрезке;
2) остановка по общей заданной точности ε для всех подзадач;
3) остановка по максимальному числу испытаний для каждой подзадачи.

Процедура перехода от задачи с порядком развёртки m к задаче с порядком развёртки $m+1$ требует также пересчёта координат каждой точки испытания на отрезке и вычисления оценки константы Гёльдера для новой целевой функции $\varphi(y_{m+1}(x))$. Из способа построения фрактального преобразования на основе кривой Пеано вытекает такое его свойство, что порядок точек испытаний на отрезке не меняется, поэтому переупорядочивание их в памяти не требуется, что существенно упрощает процедуру перехода на новый уровень детализации.

В рамках исследования данного подхода реализована версия алгоритма, которая одновременно учитывает первые два условия перехода.

Большая размерность исследуемой задачи идентификации ($N=57$) требует применения чисел расширенной точности, т.к. для представления числа 2^N (которое используется внутри алгоритма построения кривой Пеано) недостаточно 32-битного целого числа. Граница применимости алгоритмов глобальной оптимизации на данный момент составляет $m \cdot N < 1024$, где m обычно изменяется от 10 до 15.

Результаты параллельного решения этой задачи на одном из кластеров ННГУ (~200 процессоров) приводятся в докладе.

5. Содержательные результаты идентификации модели

Найден допустимый вариант значений параметров, при которых результаты расчетов на историческом интервале 2000-2009 гг. соответствуют статистическим данным Нижегородской области, а прогноз экономического развития дает экономически осмысленные результаты. В этом решении задачи идентификации доли теневого оборота в производственных секторах экономики области (инфраструктурном, обрабатывающем и сектора услуг) составляют 0.22, 0.28 и 0.49 соответственно.

Для каждого сектора найдены четыре параметра степенной производственной функции типа Кобба-Дугласа от четырех производственных факторов: труда, капитала, используемой в производстве продукции двух смежных секторов.

Коэффициент прироста зарплаты при нехватке труда составляет 3.0, коэффициент прироста цены при нехватке продукта 0.06, инфляционная составляющая в росте зарплаты 0.5. Описание соответствующих параметров можно найти в [2]. Штраф за отмывание денег в каждом секторе составляет 0.01 от их количества. Доля теневых денег, которая была отмыта, в каждом секторе составляет 0.1.

Доли теневой продукции инфраструктурного сектора, идущие населению, обрабатывающему сектору и сектору услуг, равны, соответственно, 0.6, 0.3, 0.1. Доли теневой продукции обрабатывающего сектора, идущие населению, инфраструктурному сектору и сектору услуг, равны 0.6, 0.2, 0.2 соответственно. Доли теневой продукции сектора услуг, идущие населению, инфраструктурному сектору и обрабатывающему сектору, равны 0.5, 0.2, 0.3 соответственно.

Более подробное описание содержательных результатов приводится в докладе. Пробные вычислительные эксперименты с идентифицированной моделью показали работоспособность модели.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 11-07-97017-р_поволжье_а).

Литература

1. Оленев Н.Н., Стародубцева В.С. Исследование влияния теневого оборота на социально-экономическое положение в Республике Алтай // Региональная экономика: теория и практика. 2008. № 11 (68). С. 32–37.
2. Гергель В.П., Горбачев В.А., Оленев Н.Н., Рябов В.В., Сидоров С.В. Параллельные методы глобальной оптимизации в идентификации динамической балансовой нормативной модели региональной экономики // Вестник ЮУрГУ, №25 (242), 2011. С. 4–15.
3. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
4. Стронгин Р.Г. Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т.31. №8. С. 1173–1185.
5. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D.. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
6. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. – 2007. – С. 406-407.
7. Баркалов К.А., Рябов В.В., Сидоров С.В. Параллельные вычисления в задачах многоэкстремальной оптимизации // Вестник ННГУ. – 2009. – №6. – С. 171–177.