ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС КАК БЕСКОНЕЧНЫЙ РАЗРЫВ ВТОРОГО РОДА В КООРДИНАТАХ ЦЕНТРА СМЕЩЕНИЯ

Ю.А. Милюкин, С.В. Суворов, В.А.Подчукаев

Юго-Западный госуниверситет, Курск

Поставлена и решена задача аналитического конструирования по заданной математической модели динамической системы в пространстве состояний соответствующей ей математической модели в фазовом пространстве. Показано, что изображающая точка всякого решения динамической системы общего вида в пространстве состояний принадлежит гиперсфере со смещённым центром в фазовом пространстве. Полученный результат, вскрывающий причины динамического хаоса, требует динамической компьютерной визуализации, связывающей якобы случайные эффекты фазовых портретов с точками разрыва в компонентах вектора центра смещения, порождающих эти эффекты.

Для простоты изложения ограничимся случаем динамических систем, описываемых обыкновенными однородными дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\dot{x} = P(x,t)x,\ \ x \in R^n,\ \ t \in [0,\infty),\ \ t_0 \ge 0,\ \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

где x – вектор состояний; x_0 – вектор начальных условий; t – время; $P(x, t)$ – заданная функциональная матрица, элементы которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными по x и t в пространстве состояний $R^n\times[0,\infty)$, что гарантирует существование единственного решения $x(t, t_0, x_0)$, проходящего через точку (t_0, x_0), не являющуюся состоянием равновесия.

Будем полагать, что решение $x(t,t_0,x_0)$ детерминированной системы, описываемой уравнением (1) (подстановка которого в (1) обращает его в тождество), известно. Проблема хаоса была идентифицирована в процессе построения (по известным решениям в пространстве состояний $R^n \times [0,\infty)$) фазовых портретов этих решений (в фазовом пространстве R^n). Собственно фазовое пространство не содержит оси времени t, в то время как изображающая точка самого фазового портрета однозначно определяется текущими значениями компонент соответствующего решения $x(t, t_0, x_0)$. Классические примеры динамического хаоса позволяют говорить о «странном» (случайном, непредсказуемом и т.д.) поведении фазовых портретов детерминированных систем. Ясно, что «странный» характер такого поведения проистекает из перехода от пространства размерности $(n+1)$, каковым является пространство состояний $R^n \times [0,\infty)$, к фазовому пространству R^n размерности n, в явном виде не содержащему времени, а включающему его лишь опосредованно посредством изображающих точек решения, зависящих от времени.

В дальнейшем уравнение (1) будем называть математической моделью детерминированной системы в пространстве состояний $R^n \times [0,\infty)$. Отметим, что общепринятой математической модели той же системы, но уже в фазовом пространстве R^n, на единицу меньшей размерности, до сих пор нет.

Сконструируем такую модель, исходя из математической модели в пространстве состояний.

Первый шаг в этом направлении сделан в монографии [2], с. 100 (лемма). Полученный там результат сформулируем в виде следующего утверждения: изображающая точка всякого решения $x(t,t_0,x_0)$ уравнения (1) с кососимметрической матрицей $P(x,t)$ принадлежит гиперсфере

$$x^T(t,t_0,x_0)x(t,t_0,x_0)=x_0^T x_0 \tag{2}$$

в фазовом пространстве R^n.

Предложенный в [2] алгоритм перехода от математической модели (1) в пространстве состояний $R^n\times[0,\infty)$ к математической модели (2) в фазовом пространстве R^n включает следующие операции:

1) умножение обеих частей уравнения (1) слева на транспонированный вектор состояний x^T;

2) применение к полученному в п.1 результату следующего тождества для кососимметрических матриц [3], свойство 10.61:

$$x^T P(x,t)x\equiv 0, \tag{3}$$

которое позволяет представить этот результат в виде

$$x^T\frac{dx}{dt}=0; \tag{4}$$

3) умножение обеих частей уравнения (4) на dt;

4) интегрирование полученного в п.3 результата в пределах от t_0 до t;

5) замены в полученном равенстве $x(t)=x(t,t_0,x_0),\ x(t_0)=x_0$ и представлении полученного результата в каноническом виде гиперсферы (2) [4].

Следующий шаг по переходу от математических моделей динамических систем в пространстве состояний $R^n\times[0,\infty)$ (с матрицами $P(x,t)$ общего вида) к математическим моделям этих систем в фазовом пространстве R^n осуществлён в [5], §2 (теорема).

В указанной статье отправной точкой послужило каноническое представление функциональной матрицы $P(x,t)$ общего вида в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц

$$P(x,t)\equiv\frac{P(x,t)+P^T(x,t)}{2}+\frac{P(x,t)-P^T(x,t)}{2},$$

с учётом которого уравнение (1) можно записать следующим образом:

$$\dot{x}=\left[\frac{P(x,t)+P^T(x,t)}{2}+\frac{P(x,t)-P^T(x,t)}{2}\right]x.$$

Применение к полученной таким образом математической модели динамической системы (в пространстве состояний $R^n\times[0,\infty)$) описанного выше алгоритма перехода к математической модели в фазовом пространстве R^n позволяет сформулировать результат в виде следующего утверждения: изображающая точка всякого решения уравнения (1) $x(t,t_0,x_0)$ общего вида принадлежит гиперсфере со смещённым центром

$$x^T(t,t_0,x_0)x(t,t_0,x_0)+2G^T[x(t,t_0,x_0),t]x(t,t_0,x_0)=x_0^T x_0, \tag{5}$$

которую можно представить в виде уравнения центральной гиперсферы переменного радиуса

$$\begin{gathered}\{x(t,t_0,x_0)+G[x(t,t_0,x_0),t]\}^T\{x(t,t_0,x_0)+G[x(t,t_0,x_0),t]\}=\\ =x_0^T x_0+G^T[x(t,t_0,x_0),t]G[x(t,t_0,x_0),t].\end{gathered} \tag{6}$$

Следует отметить, что в отличие от случая кососимметрической функциональной матрицы, использование описанного выше алгоритма при операции интегрирования (п. 4) в пределах от t_0 до t применяется к равенству

$$x^T dx = x^T \frac{P(x,t)+P^T(x,t)}{2} xdt .$$

При этом результат интегрирования правой части этого равенства в соответствии с канонической формой представления гиперквадрик общего вида [4, с. 340] должен быть представлен посредством следующей билинейной формы:

$$-2G^T[x(t,t_0,x_0),t]x(t,t_0,x_0) = \int_{t_0}^{t} x^T(\tau)\left[P(x,\tau)+P^T(x,\tau)\right]x(\tau)d\tau. \quad (7)$$

Из сравнения (5) с (6) видно, что вектор $G[x(t,t_0,x_0),t]$ определяет координаты центра смещения.

В дальнейшем (5) будем называть математической моделью динамической системы общего вида (1) в фазовом пространстве R^n.

Таким образом, в обоих случаях геометрическим местом изображающих точек решения динамической системы в фазовом пространстве является гиперсфера. Для кососимметрических матриц – это гиперсфера постоянного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0}$, а в случае функциональных матриц $P(x,\ t)$ общего вида – гиперсфера переменного радиуса $\sqrt{x_0^T x_0 + G^T[x(t,t_0,x_0),t]G[x(t,t_0,x_0),t]}$.

Будем рассматривать (7) как уравнение, в котором вектор состояний и интеграл правой части известны, а вектор $G[x(t,t_0,x_0),t]$ подлежит определению, то есть с позиций линейной алгебры задача определения этого вектора не доопределена, и, как следствие, её решение неединственно. Поэтому какого-либо конструктивизма к рассматриваемой проблеме результат, зафиксированный в виде (7), не прибавляет, хотя сам вектор $G[x(t,t_0,x_0),t]$ может рассматриваться в качестве нового инструмента исследований.

Наполним этот вектор конструктивным содержанием.

Полученный результат

Принимая во внимание исходное уравнение (1), запишем правую часть (7) в виде

$$\int_{t_0}^{t} x^T(\tau)[P(x,\tau)+P^T(x,\tau)]x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t}\left[x^T(\tau)\frac{dx(\tau)}{d\tau}+\frac{dx^T(\tau)}{d\tau}x(\tau)\right]d\tau =$$

$$=\int_{t_0}^{t} 2x^T(\tau)dx(\tau) = x^T(\tau)x(\tau)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= x^T(t,t_0,x_0)x(t,t_0,x_0) - x_0^T x_0 = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2(t,t_0,x_0)-x_{0,i}^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2(t,t_0,x_0)-x_{0,i}^2}{x_i(t,t_{0,}x_0)}x_i(t,t_0,x_0) .$$

Отметим, что полученное выражение сконструировано исходя из условия, что для всех

$$x_i(t,t_0,x_0) \neq 0 \ (i=\overline{1,n})$$

справедливо тождество

$$\frac{x_i(t,t_{0,}x_0)}{x_i(t,t_{0,}x_0)} \equiv 1 .$$

Подобное представление позволяет единственным образом выделить искомый вектор из билинейной формы левой части (7) в виде

$$G[x(t,t_0,x_0),t] = -\frac{1}{2} col \left[x_1(t,t_0,x_0) - \frac{x_{0,1}^2}{x_1(t,t_0,x_0)}, ..., x_n(t,t_0,x_0) - \frac{x_{0,n}^2}{x_n(t,t_0,x_0)} \right]. \qquad (8)$$

Факт получения (8) достаточно красноречив, позволяя связать динамический хаос с бесконечными разрывами второго рода [6, с. 221] в отдельных компонентах вектора G при переходе через ноль знаменателей соответствующих компонент вектора решения уравнения (1). Другими словами, управление хаосом осуществляется посредством вектора центра смещения G, не бравшимся в рассмотрение в многочисленных исследованиях динамического хаоса ранее. Таким образом, указанные точки разрыва являются своего рода «выколотыми» точками центра смещения, влекущими за собой «случайный» характер поведения фазового портрета после прохождения этих точек. Отметим, что «выколотые» точки вряд ли могут быть зафиксированы соответствующим выбором шага интегрирования при численных методах построения фазовых портретов.

Полученный результат, вскрывающий причины динамического хаоса, требует динамической компьютерной визуализации, связывающей якобы случайные эффекты фазовых портретов с точками разрыва в компонентах вектора центра смещения, порождающих эти эффекты.

Литература

1. Кузнецов С.П. Динамический хаос. – М: Физматлит, 2006. – 294 с.
2. Подчукаев В.А. Аналитические методы теории автоматического управления. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.
3. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. Пензов Ю.Е. Аналитическая геометрия. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1972. – 364 с.
5. Подчукаев В.А., Звягина А.С. Новое доказательство гипотезы Ж.А. Пуанкаре // Доклады Академии военных наук. 2009. № 5(40). С. 115–123.
6. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.