ОБЗОР МЕТОДОВ ПЕРЕУПОРЯДОЧЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ

А.Ю. Малова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается задача уменьшения заполнения факторов разреженных матриц. Приводится обзор методов переупорядочения матриц. Основное внимание уделяется методу минимальной степени, методу вложенных сечений и их модификациям. Дается обзор программного обеспечения, решающего указанную задачу.

Введение

Одной из актуальных задач алгебры разреженных матриц является решение систем линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с разреженной симметричной положительно определенной матрицей A. Для решения разреженных СЛАУ применяются прямые и итерационные методы. Прямой метод основан на факторизации матрицы системы (для симметричных положительно определенных матриц – разложение Холецкого) с последующим решением треугольных систем. Одна из основных особенностей данного подхода – возрастание числа ненулевых элементов матрицы в процессе факторизации. Это влечет за собой вычислительные трудности, которые могут повлиять на возможность и эффективность решения данной задачи на ЭВМ: необходимо выделять дополнительную память для хранения новых ненулевых элементов, с ростом их числа значительно увеличивается время, необходимое для факторизации матрицы. Кроме того, сильное заполнение влечет за собой накопление вычислительных ошибок, что может повлиять на саму возможность использования прямого метода.

Для решения данной проблемы к исходной матрице применяется процедура перестановки ее строк и столбцов с целью уменьшения заполнения фактора. Из всех $n!$ перестановок для матрицы порядка n одно или более обеспечивают минимальное заполнение и несколько упорядочений минимизируют число арифметических операций при факторизации. Нахождение таких перестановок является NP-полной задачей [51], и на практике применяются эвристические методы, использующие представление исходной матрицы A в виде графа.Основные методы переупорядочения, позволяющие снизить заполненность симметричной разреженной матрицы, можно разделить на две группы – подходы, основанные на методе вложенных сечений, и подходы, основанные на методе минимальной степени. Для ленточных матриц существует специальный класс алгоритмов типа Катхилла-Макки, которые оставим за рамками обзора.

В данной работе рассмотрены указанные методы переупорядочения симметричных разреженных матриц и их модификации, дано сравнение методов. Также приведен обзор программных библиотек для переупорядочения матриц и разделения графов. Результаты работы используются на кафедре математического обеспечения ЭВМ факультета ВМК ННГУ при разработке нового прямого решателя для больших разреженных систем линейных алгебраических уравнений [53, 54].

Метод вложенных сечений

Метод вложенных сечений (*nested dissection, ND*) был предложен А. Джорджем [8] в 1973 г. для решения матричных задач, возникающих в конечно-разностных и конечно-элементных приложениях. В 1978 г. Джордж и Лю [11] обобщили алгоритм для задач с нерегулярной сеткой. Метод основан на многократном разбиении графа матрицы при помощи вершинных разделителей. На каждом шаге алгоритма некоторым образом выбирается разделитель графа, его вершины нумеруются и удаляются из графа. При этом граф распадается на две или более связные компоненты. Затем данная процедура повторяется рекурсивно для каждой новой связной компоненты графа, до тех пор, пока не будут пронумерованы все вершины. При таком подходе заполнение локализуется в областях матрицы, соответствующих выделенным подграфам и разделителю. Метод вложенных сечений для регулярной $k * k$ сетки дает минимальное заполнение – $O(k^2 \log k)$.

Модификации метода различаются, в первую очередь, способами выделения разделителя и связных подграфов. Так, в методе *автоматических вложенных сечений* (automatic nested dissection) [11] разделитель выбирается из середины структуры уровней смежности графа, построенной с корнем в псевдопериферийной вершине. Заполнение фактора матрицы после работы алгоритма автоматических вложенных сечений составляет $O(n \log n)$, где n – число вершин графа.

Липтон, Роуз и Тарьян в 1979 г. предложили *обобщенный метод вложенных сечений* (generalized nested dissection) [32]. Их алгоритм основан на теореме о $\sqrt{n}$-разделителе и дает заполнение фактора матрицы $O(n \log n)$. Теоретически метод был исследован в работах Липтона и Тарьяна [33], Гильберта и Тарьяна [15].

Для разбиения графа в ряде модификаций используется спектральная информация о его матрице. Потен, Симон и соавторы в 1992 г. предложили *спектральный метод вложенных сечений* (spectral nested dissection) [42], особенностью которого является алгоритм спектрального разделения графа [41]. В данном подходе граф разделяется по средней компоненте собственного вектора, соответствующего второму по величине собственному числу матрицы Лапласа графа. Самой трудоемкой операцией при этом является вычисление необходимого собственного вектора.

Группа методов вложенных сечений использует геометрическую информацию о вершинах. Метод *картезианских вложенных сечений* (cartesian parallel nested dissection) [19] был предложен Хифом и Рагхаван в 1991 г. Они использовали двумерные декартовы координаты для нахождения разделителя. В этом случае граф разделяется по значению одной из координат. *Геометрический метод* разделения графа был предложен Миллером, Тэнгом и соавторами в 1993 г. [36], а затем применен Гильбертом, Миллером, Тэнгом в 1994 г. [13]. В отличие от метода картезианских вложенных сечений, авторы использовали координаты вершин графа в d-мерном пространстве, спроецированные на поверхность $d + 1$-мерной сферы. Для нахождения разделителя вычисляется центральная точка, разделяющая исходное множество точек на две примерно равные части, а разделитель определяется как множество вершин, близких к проекции произвольного $d + 1$-мерного круга на исходную d-мерную поверхность. Недостатком геометрического подхода является его вычислительная трудоемкость при определении центральной точки. Некоторые эвристики для практического применения были рассмотрены в работе [13].

За последние годы были предложены модификации метода вложенных сечений, основанные на многоуровневой процедуре разделения графа с комбинированными техниками нахождения разделителя. Большинство из них используют специализированные алгоритмы для разделения графов (graph partitioning) и улучшения разделения (partition refinement). На каждом шаге переупорядочения многоуровневым методом поиск оптимального разделителя выполняется в три этапа.

- *Огрубление графа (coarsening)*: с помощью процедуры паросочетания вершин строится последовательность графов $G_1, G_2, \ldots, G_m$ таких, что $|V| > |V_1| > \ldots > |V_m|$.

- *Разделение графа (partitioning)*: поиск разделителя и выделение двух несвязных компонент наименьшего огрубленного графа G_m.
- *Развертывание графа (uncoarsening)*: разделение графа G_m проектируется на исходный граф Gчерез последовательность графов $G_{m-1}, G_{m-2}, \dots, G_1$. Во время этого процесса выполняется улучшение проецируемого разделение графа.

Такая схема позволяет находить достаточно хорошее разделение графа за приемлемое время, т.к. трудозатратные алгоритмы применяются к небольшим по размеру графам. Многоуровневый метод вложенных сечений был применен в работах Кариписа и Кумара [26], Эшкрафта и Лю [2], Хендриксона и Леланда [20], Хендриксона и Ротберга [23], Гупта [17] и др.

Для выполнения огрубления графа применяются различные методы *паросочетания (matching)*. Среди наиболее используемых техник нахождения паросочетаний – метод случайных паросочетаний (randommatching), паросочетание тяжелых ребер (heavy edge matching), паросочетание легких ребер (light edge matching), паросочетание тяжелых клик (heavy clique matching) [26]. Сложность таких алгоритмов составляет $O(|E|)$.

После огрубления графа выполняется разделение наименьшего графа G_m на две примерно равные части, затем выделяется вершинная или реберная граница разбиения. По типу используемого аппарата в алгоритмах для разбиения графов можно выделить три группы: спектральные, геометрические и комбинаторные. Подробный обзор методов разделения графа представлен в работе Потена [40].

Среди комбинаторных методов широко применяется группа алгоритмов, основанных на итерационном улучшении разбиения. Впервые такой подход был предложен Керниганом и Лином [31] в 1970 г., а затем модифицирован Фидуччиа и Матэйсесом [7] в 1982 г. за счет использования специальных структур данных. Модификация алгоритма Кернигана–Лина для вершинного разделителя была представлена Эшкрафтом и Лю [2] в 1996 г. На каждом шаге итерационных алгоритмов оценивается качество полученного разбиения и размер разделителя, а также целесообразность перемещения вершин из разделителя в одну из частей графа. Временная сложность одной итерации алгоритма Кернигана–Лина составляет $O(|E|\log|E|)$, для алгоритмов Фидуччиа–Матфейсеса и Эшкрафта–Лю эта оценка уменьшена до $O(|E|)$ при использовании соответствующих структур данных. Подобные алгоритмы преимущественно находят реберный разделитель графа, для определения вершинного разделителя затем находят наименьшую вершинную оболочку реберного разделителя.

Другие комбинаторные методы разделения графа основаны на «наращивании» подграфа вокруг некоторой вершины. К таким методам относятся алгоритм выращивания графа (graph growing algorithm, GGP) и жадный алгоритм выращивания графа (greedy graph growing algorithm, GGGP), использующий специальные веса. Их основным недостатком является чувствительность к выбору начальной вершины для «наращивания» подграфа.

На этапе развертывания графа на каждом шаге применяются локальные техники улучшения проецируемого разделения. Для этого обычно используются итерационные методы (модификации алгоритма Кернигана–Лина), где в качестве начального приближения выбрана проекция разделения предыдущего графа.

Метод минимальной степени

Одним из распространенных методов переупорядочения матрицы является *метод минимальной степени* (*minimum degree, MD*), предложенный Тиннеем и Уолкером в 1969 г. [47]. Этот алгоритм является симметричным аналогом алгоритма Марковица [35] (1957 г.) и основан на локальной стратегии уменьшения заполнения фактора матрицы. Теоретические основы метода минимальной степени приведены в работах Роуза [43, 44].

Метод минимальной степени в некотором смысле моделирует процесс симметричного Гауссова исключения. Вершина, исключаемая из графа на каждом шаге алгоритма, соответствуют выбору ведущего элемента в строках и столбцах, обеспечивающих внесение наименьшего числа ненулевых элементов. В процессе упорядочения строится последовательность *графов исключения* (*elimination graphs*), в которой каждый следующий граф получен из предыдущего удалением вершины с минимальной степенью и созданием клики между всеми смежными с ней вершинами.

В такой постановке наиболее затратными операциями являются преобразование графа и пересчет степеней. Одно из улучшений алгоритма, использующее структуру только исходного графа, основано на использовании достижимых множеств [52]. Также для представления графов исключения используются фактор-графы (quotient graphs, Джордж, Лю, [9]), супер-элементы (superelements, Дафф, Рэйд [5]). Эти подходы основаны на слиянии связанных исключенных вершин в супер-узлы. Ряд модификаций алгоритма, направленных на одновременное исключение последовательности вершин (*mass elimination*), был предложен Джорджем и Лю [9, 10] в 1980 г. В этих работах авторы ввели понятие *неразличимых вершин* (*indistinguishable nodes*) – вершин, смежные множества которых совпадают.

Существует ряд эвристик для сокращения вычислений при пересчете степеней. Например, Эйзенстат и соавторы [6] в 1977 г. использовали неполное обновление степеней (incomplete degree update). Они показали, что если смежное множество вершины u включено в смежное множество вершины v, то степень вершины v не нужно вычислять, пока не будет исключена вершина u (в этом случае вершина v называется *превосходимой* (*outmatched*)).

В 1985 г. Лю предложил *множественный метод минимальной степени* (*multiple minimum degree, MMD*) [34], основанный на одновременной нумерации всех возможных вершин минимальной степени до этапа пересчета степеней. Такой подход ухудшает качество получаемой перестановки, однако позволяет уменьшить время вычислений за счет отложенного пересчета степеней вершин. Лю предложил использовать в алгоритме внешние степени вершин вместо их действительных степеней. Этот прием уменьшает размер клики, создаваемой после удаления вершины с минимальной степенью.

Одним из активно развивающихся подходов к модификации метода минимальной степени является использование оценок степеней вершин вместо их значений. *Приближенный метод минимальной степени* (approximate minimum degree, AMD) был предложен Амстеем, Дэвисом и Даффом [1] в 1996 г. Данный прием также использовали Гильберт, Молер, Шрейбер [14], Дэвис, Гильберт, Ларимор и Нг [4] и др.

Подробный обзор модификаций метода минимальной степени представлен в работе Джорджа, Лю [12]. Отметим, что метод минимальной степени дает наименьшее заполнение фактора, если граф матрицы был деревом, в других случаях заполнение не минимально.

Обзор программного обеспечения

Мировым лидером среди программных пакетов для разделения графов и переупорядочения разреженных матриц является группа библиотек METIS, разработанная в Университете Миннесоты (США). В пакете METIS [25] для переупорядочения матриц и разделения графов реализована последовательная версия многоуровневого метода вложенных сечений, основанная на работах [26, 28]. В пакете ParMETIS [30] содержится параллельная MPI-версия многоуровневого метода вложенных сечений, основанная на работах [27, 29, 45].

Другая широко используемая академическая разработка – библиотека Scotch [39] и ее параллельная версия PT-Scotch [3] от лаборатории LaBRI Университета Бордо (Франция). Библиотеки предназначены для разделения графов и гиперграфов, переупорядочения разреженных матриц. Для переупорядочения матриц используется комбинированный подход [38]. Сравнение работы пакетов PT-Scotch, ParMETIS и WSMP [18] можно найти в работе [16].

К другим известным библиотекам относятся Chaco и JOSTLE. Библиотека Chaco [22], предназначенная для разделения графов, была разработана в лаборатории Sandia National Laboratories (США). В ней реализованы модификации многоуровневого и спектрального методов вложенных сечений на основе работ [20, 21, 23]. Программный комплекс JOSTLE [48], разработанный в Гринвичском университете (Великобритания), включает средства для последовательного и параллельного многоуровневого разделения графов. Особенности реализации многоуровневой схемы основаны на работах авторов [49, 50].

В библиотеках для решения систем линейных уравнений с разреженной матрицей, как правило, имеются встроенные методы для переупорядочения, а также обеспечивается интерфейс для подключения специализированных библиотек. Например, в коммерческом пакете для разреженных матриц MKL Pardiso, входящем в состав библиотеки Intel® MKL [24], используется оптимизированная версия метода вложенных сечений из библиотеки METIS, а также собственная реализация множественного метода минимальной степени. Один из ведущих академических параллельных прямых решателей, MUMPS [37], содержит реализацию ряда модификаций метода минимальной степени (приближенный, приближенный с выбором квазиплотной строки (QAMD), метод минимизации заполнения (approximate minimum fill-in, AMF)). Также библиотека имеет интерфейс для использования переупорядочения из пакета PORD [46], распространяемого вместе с MUMPS, и внешних библиотек METIS, SCOTCH, ParMETIS, PT-SCOTCH.

Заключение

Задача нахождения переупорядочения, минимизирующего заполнение фактора Холецкого матрицы, является NP-сложной [51]. Для ее решения разработаны различные эвристические методы, среди которых широко применяются классы методов вложенных сечений и методов минимальной степени. Рассмотренные подходы различаются стратегией обработки матрицы: метод минимальной степени использует локальную стратегию уменьшения заполнения, а метод вложенных сечений – глобальную.

В настоящее время в практических приложениях широко используется подход, основанный на комбинировании метода вложенных сечений и метода минимальной степени. Чаще всего сначала процесс переупорядочения ведется методом вложенных сечений, а когда размер оставшихся подграфов будет достаточно малым, к ним применяется метод минимальной степени. Это позволяет использовать достоинства обоих алгоритмов: сбалансированность разделения графа вложенными сечениями и локальное уменьшение заполнения методом минимальной степени. Иногда множество разделителей, полученных на одном шаге метода вложенных сечений, затем переупорядочивается методом минимальной степени. Комбинированный подход был использован, в частности, в работах Хендриксона и Ротберга [23], Пеллигрини, Ротберга и Амстея [38], Гупта [17].

В случае параллельных вычислений большую роль играет структура порождаемого дерева исключения, построенного по портрету фактора матрицы. Предпочтительным является портрет с «коротким и широким», а не «узким и длинным» деревом исключения, поскольку первое оставляет большие ресурсы для параллелизма. Такой портрет характерен для метода вложенных сечений. Дерево исключения, порождаемое при переупорядочении методом минимальной степени, имеет более «узкую и длинную» структуру. На практике этот метод чаще применяют для небольших матриц. В параллельных решателях преимущественно используют модификации метода вложенных сечений, чаще всего – многоуровневого. Это позволяет найти приемлемое по качеству и перспективам последующего распараллеливания переупорядочение за относительно небольшое время.

Работа выполнена в лаборатории ITLab ННГУ в рамках ФЦП при финансовой поддержке Минобрнауки России, гос. соглашение № 14.В37.21.0878.

Литература

1. Amestoy P.R., Davis T., Duff I. An approximate minimum degree ordering algorithm // SIAM. J. on Matrix Anal. Appl. – 1996. – Vol. 17, No. 4. – P. 886–905.
2. Aschcraft C., Liu J.W.H. A partition improvement algorithm for generalized nested dissection // Technical Report BCSTECH-92-020, Boeing computer Services. – 1994.
3. Chevalier C., Pellegrini F. PT-SCOTCH: a tool for efficient parallel graph ordering // Parallel Computing. – 2008. – Vol. 34, No. 6–8. – P. 318–331.
4. Davis T.A., Gilbert J.R., Larimore S., Ng E. A column approximate minimum degree ordering algorithm // Transactions on Mathematical Software. – 2004. – Vol. 30, No. 3. – P. 353–376.
5. Duff I.S., Reid J.K. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations // ACM Trans. Math. Software. – 1983. Vol. 9, No. 3. – P. 302–325.
6. Eisenstat S.C., Gursky M.C., Schultz M.H., Sherman A.H. Yale sparse matrix package, I: The symmetric codes. // International J. on Numerical Methods Engineering. – 1982. – Vol. 18. – P. 1145–1151.
7. Fiduccia C.M., Mattheyses R.M. A linear time heuristic for improving network partitions // Proceedings 19th IEEE Design Automation Conference. – 1982. P. 175–181.
8. George A. Nested dissection of a regular finite element mesh // SIAM J. on Numerical Analysis. – 1973. – Vol. 10, No. 2. – P. 345–363.
9. George A., Liu J.W.H. A minimal storage implementation of the minimum degree algorithm // SIAM J. Numerical Analysis. – 1980. – Vol. 17. – P. 282–299.
10. George A., Liu J.W.H. A fast implementation of the minimum degree algorithm using quotient graphs // ACM Trans. Math. Software. – 1980. – Vol. 6. – P. 337–358.
11. George A., Liu J.W.H. An automatic nested dissection algorithm for irregular finite element problems // SIAM J. on Numerical Analysis. – 1978. – Vol. 15, No. 5. – P. 1053–1069.
12. George A., Liu J.W.H. The evolution of the minimum degree ordering algorithm // SIAM Review. – 1989. – Vol. 31, No. 1. – P. 1–19.
13. Gilbert J.R., Miller G.L., Teng S.-H. Geometric mesh partitioning: Implementation and experiments // Technical Report CSL-94-13, Xerox Palo Alto Research Centre. – 1994.
14. Gilbert J.R., Moler C., Schreiber R. Sparse matrices in MATLAB: design and implementation // SIAM J. Matrix Anal. Applic. – 1992. – Vol. 13. – P. 333–356.
15. Gilbert J.R., Tarjan R.E. The analysis of a nested dissection algorithm // Numerische Mathematik. – 1987. – Vol. 50. – P. 377–404.
16. Gupta A. An evaluation of parallel graph partitioning and ordering software on a massively parallel computer // Technical Report RC 25008(W1006-029), IBM T.J. Watson Research Center. – 2010.

17. Gupta A. Fast and effective algorithms for graph partitioning and sparse matrix reordering // IBM Journal of Research and Development. – 1996. – Vol. 41, No. (1/2). – P. 171–183.
18. Gupta A. WSMP: Watson sparse matrix package (Part-I: Direct solution of symmetric sparse systems) // Technical Report RC 21886, IBM T. J. Watson Research Center. – 2000. URL: [http://www.cs.umn.edu/˜agupta/wsmp].
19. Heath M.T., Raghavan P. A Cartesian parallel nested dissection algorithm // SIAM J. on Matrix Analysis and Applications. – 1995. – Vol. 16, No. 1. – P. 235–253.
20. Hendrickson B., Leland R. A multilevel algorithm for partitioning graphs // Technical Report SAND93-1301, Sandia National Laboratories. – 1993.
21. Hendrickson B., Leland R. An improved spectral graph partitioning algorithm for mapping parallel computations // SIAM J. on Scientific Computing. – 1995. – Vol. 16, No. 2. – P. 452–469.
22. Hendrickson B., Leland R. The Chaco user's guide: Version 2.0 // Technical Report SAND94–2692, Sandia National Laboratories. – 1994. – [http://www.sandia.gov/~bahendr/papers/guide.ps].
23. Hendrickson B., Rothberg. Improving the runtime and quality of nested dissection ordering // SIAM J. on Scientific Computing. – 1999. – Vol. 20. – P. 468–489.
24. Intel Math Kernel Library Reference Manual. URL: [http://software.intel.com/sites/products/documentation/hpc/mkl/mklman.pdf].
25. Karipis G. METIS. A Software Package for Partitioning Unstructured Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Orderings of Sparse Matrices. Version 5.0. // Technical report, University of Minnesota, Department of Computer Science and Engineering. – 2011. URL: [http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/fetch/sw/metis/manual.pdf]
26. Karypis G., Kumar V. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs // SIAM J. on Scientific Computing. – 1999. – Vol. 20, No. 1. – P. 359–392.
27. Karypis G., Kumar V. A Parallel algorithm for multilevel graph partitioning and sparse matrix ordering // J. of Parallel and Distributed Computing. – 1998. – Vol. 48. – P. 71–85.
28. Karypis G., Kumar V. Multilevel k-way partitioning scheme for irregular graphs // J. of Parallel and Distributed Computing. – 1998. – Vol. 48, No. 1. – P. 96–129.
29. Karypis G., Kumar V. Parallel Multilevel k-way Partitioning Scheme for Irregular Graphs // SIAM Review. – 1999. – Vol. 41, No. 2. – P. 278–300.
30. Karypis G., Kumar V. ParMETIS: Parallel graph partitioning and sparse matrix ordering library // Technical Report TR 97-060, Department of Computer Science, University of Minnesota. – 1997.
31. Kernighan B.W., Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs // The Bell System Technical Journal. – 1970. – Vol. 29. – P. 291–307.
32. Lipton R.J., Rose D.J., Tarjan R.E. Generalized nested dissection // SIAM J. on Numerical Analysis. – 1979. – Vol. 16, No. 2. – P. 346–358.
33. Lipton R.J., Tarjan R.E. Applications of a planar separator theorem // SIAM J. on Computing. – 1980. – Vol. 9, No. 3. – P. 615–627.
34. Liu J.W.H. Modification of the minimum-degree algorithm by multiple elimination // ACM Trans. Math. Software. – 1985. – Vol. 11, No. 2. – P. 141–153.
35. Markowitz H.M. The elimination form of the inverse and its application to linear programming // Management Science. – 1957. – Vol. 3. – P. 255– 269.
36. Miller G.L., Teng Sh.-H., Vavasis S.A. A unified geometric approach to graph separators // Proceedings of 31st Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – 1991. – P. 538–547.

37. MUltifrontal Massively Parallel Solver (MUMPS 4.10.0) User's guide // Technical report ENSEEINT-IRIT. – 2011. URL: [http://mumps.enseeiht.fr/doc/userguide_4.10.0.pdf].
38. Pellegrini F., Roman J., Amestoy P. Hybridizing nested dissection and halo approximate minimum degree for efficient sparse matrix ordering // Concurrency: Practice and Experience. – 2000. – Vol. 12. – P. 68–84.
39. Pellegrini F. Scotch and libScotch 5.1 User's Guide // Technical Report LaBRI, Universit´e Bordeaux I. – 2010. – [http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/03/27/PDF/scotch_user5.1.pdf].
40. Pothen A. Graph partitioning algorithms with applications for scientific computing // Technical Report Old Dominion University Norfolk, VA, USA. – 1997.
41. Pothen A., Simon H.D., Liou K.-P. Partitioning sparse matrices with eigenvectors of graphs // SIAM J. of Matrix Analysis and Applications. – 1990. – Vol. 11, No. 3. – P. 430–452.
42. Pothen A., Simon H.D., Wang L. Spectral nested dissection // Technical Report 92-01, Computer Science Department, Pennsylvania State University. – 1992.
43. Rose D.J. A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations // Graph Theory and Computing. Read R.C., ed. New York: Academic Press, 1973. – P. 183–217.
44. Rose D.J. Symmetric elimination on sparse positive definite systems and the potential flow network problem // PhD thesis, Applied Math., Harvard Univ. – 1970.
45. Schloegel K., Karypis G., Kumar V. Parallel multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning // Proceedings of Euro-Par – 2000. – P. 296–310.
46. Schulze J. Towards a tighter coupling of bottom-up and top-down sparse matrix ordering methods // Bit Numerical Mathematics. – 2001. – Vol. 41, No. 4. – P. 800–841.
47. Tinney W., Walker J. Direct solutions of sparse network equations by optimally ordered triangular factorization // Proceedings of the IEEE. – 1967. – Vol. 55, No. 11. – P. 1801–1809.
48. Walshaw C., Cross M. JOSTLE: parallel multilevel graph-partitioning software – an overview // In F. Magoules, editor, Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Techniques, Civil-Comp Ltd. – 2007. – P. 27–58.
49. Walshaw C., Cross M. Mesh partitioning: a multilevel balancing and refinement algorithm // SIAM J. on Scientific Computing. – 2000. – Vol. 22, No. 1. – P. 63–80.
50. Walshaw C., Cross M. Parallel optimization algorithms for multilevel mesh partitioning // Parallel Computing. – 2000. – Vol. 26, No. 12. – P. 1635–1660.
51. Yannakakis M. Computing the minimum fill-in is NP-complete // SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods. – 1981. – Vol. 2, No. 1. – P. 77–79.
52. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
53. Козинов Е.А., Лебедев И.Г., Лебедев С.А., Малова А.Ю. и др. Новый решатель для алгебраических систем разреженных линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей // Вестник Нижегородского государственного университета. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2012. Вып. 5(1). (В печати)
54. Козинов Е.А., Лебедев И.Г., Лебедев С.А. и др. Разработка прямого решателя для разреженных систем линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2012): Труды Международной научной конференции (Новосибирск, 26 – 30 марта 2012 г.) – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2012. – С. 525–530. – [http://pavt.susu.ru/2012/short/043.pdf].