АЛГОРИТМ ПОИСКА НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМОМ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МАЖОРАНТОЙ

А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Вопросы, связанные с исследованием эффективности численных методов оптимизации, представляют значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. С теоретической точки зрения такие исследования интересны выяснением потенциальных возможностей алгоритмов оптимизации на рассматриваемых классах задач. С точки зрения практики использование эффективных методов в качестве вспомогательных процедур является важным при решении сложных задач, требующих большого объёма вычислений или проведения дорогостоящих экспериментов.

В рамках построения эффективных методов оптимизации большое значение приобретает рассмотрение классов функций одной переменной, что объясняется следующими обстоятельствами.

Во-первых, такие методы используются как вспомогательные процедуры во многих алгоритмах поиска экстремума функций многих переменных.

Во-вторых, во многих задачах оптимального проектирования система ограничений, описывающих требования, которые накладываются на характеристики проектируемого устройства, может содержать характеристики, зависящие как от вектора варьируемых параметров, так и от параметра, значения которого принадлежат некоторому отрезку. Таким параметром, например, могут быть частота, время, температура и т.п.

Эффективность алгоритма во многом определяется классом рассматриваемых задач.

В работе [1] построены оптимальный одношаговый и приближенно оптимальный алгоритмы для классов функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой.

В работах [2] и [3] построены приближенно оптимальные алгоритмы в классах функций, определяемых кусочно-степенными мажорантами.

В работе рассматриваются подклассы класса функций, определяемых кусочно-линейной мажорантой, позволяющие построить простой и достаточно эффективный алгоритм поиска их наибольшего значения.

Будем говорить, что непрерывная функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, принадлежит классу функций $F_1(a,b,K_1,K_2)$, если выполняются следующие соотношения:

$$\frac{f(x_2)-K_1}{x_2-a} \le \frac{f(x_1)-K_1}{x_1-a},\ \frac{f(x_2)-K_2}{b-x_2} \ge \frac{f(x_1)-K_2}{b-x_1}, \qquad (1)$$

где $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, $K_1, K_2 \in R$, $K_1 > K_2$.

Непрерывная функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, принадлежит классу функций $F_2(a,b,K_1,K_2)$, если выполняются соотношения (1) при $K_2 > K_1$.

При $K_1 = K_2 = K$ получаем класс функций $F(a,b,K)$, рассмотренный ранее в [1].

Для классов $F_1(a,b,K_1,K_2)$ и $F_2(a,b,K_1,K_2)$ выполняются следующие свойства: если функция $f(x) \in F_1(a,b,K_1,K_2)$ $(F_2(a,b,K_1,K_2))$, то $f(x) \geq \min(K_1, K_2)$, класс функций $F_1(a,b,K_1,K_2)$ $(F_2(a,b,K_1,K_2))$ замкнут относительно операции взятия максимума, минимума и суммирования с неотрицательными коэффициентами. Данным классам принадлежат вогнутые, выпуклые и липшицевы функции.

Алгоритм основан на построении точной верхней мажоранты всех функций из класса $F_1(a,b,K_1,K_2)$ $(F_2(a,b,K_1,K_2))$, которые на фиксированном наборе точек принимают заданные значения. Очередная точка вычислений функции выбирается на основе концепции одношаговой оптимальности.

Построенный алгоритм был реализован в виде программной библиотеки. В рамках вычислительного эксперимента были проведены сравнения работы данного алгоритма и алгоритма, рассмотренного в [1]. В качестве тестовых функций выступали кусочно-линейные функции, кусочно-квадратичные и кусочно-вогнутые функции. Результаты экспериментов показывают, что рассмотренный алгоритм обладает более высокой скоростью сходимости по сравнению с алгоритмом, рассмотренным в [1].

Литература

1. Коротченко А.Г. Об одном алгоритме поиска наибольшего значения одномерных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1978. Т. 18, № 3. С. 563-573.

2. Коротченко А.Г. О приближенно-оптимальных алгоритмах поиска экстремума в одном классе функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, № 3. С. 355-365.

3. Коротченко А.Г. Приближенно-оптимальный алгоритм поиска экстремума одного класса функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 5. С. 30-39.