ОРГАНИЗАЦИЯ ПОЗИЦИОННО-МОДУЛЯРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ВЫСОКОТОЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В.С. Князьков, К.С. Исупов, А.В. Логинов

Вятский госуниверситет

Рассматриваются программные решения комплекса High Precision Digit-Parallel Solver (HPDP-Solver), в основу которого заложен новый формат представления вещественных чисел в форме с плавающей точкой, что позволяет организовать распараллеливание вычислений до уровня знакопозиций мантисс чисел в многоядерных процессорах. В веденном модулярно-позиционном (квазимодулярном) формате данных для представления мантисс чисел используется многомодульная модулярная система счисления (система остаточных классов), а порядки чисел представляются в позиционной системе. Задача использования арифметики систем остаточных классов для численных расчетов с плавающей точкой на многоядерных процессорах общего назначения до настоящего времени не решалась.

Введение

Эффективность применения модулярных систем при обработке больших массивов целых чисел продемонстрирована в работах [1–3]. В работе [4] предложен способ применения модулярных систем счисления для ослабления влияния ошибок округления компьютерных вычислений с фиксированной точкой при обработке рациональных и комплексно-рациональных чисел. Однако до сих пор модулярные системы счисления не применялись для вычислений с плавающей точкой на платформах универсальных многоядерных процессоров. Именно на решение этой задачи нацелена предлагаемая разработка.

Модулярно-позиционный формат для высокоточных разрядно-параллельных вычислений с плавающей точкой

В двоичных форматах с плавающей точкой (рассматриваются форматы IEEE-754) любое вещественное число представляется трехэлементным набором:

$$\left[M, e, s \,\middle|\, M \in [0,\, 2),\, e \in [e_{\min},\, e_{\max}],\, s \in \{0,1\} \right], \qquad (1)$$

где M – рациональная мантисса, e – порядок, $e_{\min} = 2 - 2^{w-1}$, $e_{\max} = 2^{w-1} - 1$, s – знак числа.

Значение чисел, записанных в таком формате, определяется в общем виде формулой $-1^s \cdot M \cdot 2^e$. Машинными представлениями чисел вида (1) являются $(w+t+1)$-разрядные двоичные векторы $\langle s r_w ... r_2 r_1\, d_t ... d_2 d_1 \rangle$, где разряды с d_1 по d_t отводятся под представление рациональных двоичных мантисс $M = d_t . d_{t-1} ... d_2 d_1$, разряды с r_1 по r_w отводятся под представление целочисленных порядков e, записанных в форме с избытком $E = r_w r_{w-1} ... r_2 r_1 = e + e_{\max}$, разряд s выражает знак числа.

Принимая во внимание условие, что под целую часть рациональной мантиссы $M = d_t . d_{t-1} ... d_2 d_1$ в двоичных форматах вида (1) отводится 1 бит d_t, определим целочисленную мантиссу $M' = d_t d_{t-1} ... d_2 d_1$ как t-разрядное неотрицательное целое двоичное число, такое, что $M = M' \cdot 2^{1-t}$. Определим перемещенный порядок λ , как целое двоичное число со знаком, такое, что $\lambda = e - t + 1$, где e – w-разрядный порядок числа, представленного в двоичном формате (1).

Зададим n целочисленных положительных оснований системы остаточных классов [5, 6] $p_1, p_2, \ldots, p_n$ таких, что:

$$\begin{cases} \forall i_1, i_2 \in \{1,2,\ldots,n\}, i_1 \neq i_2 : \gcd(p_{i_1}, p_{i_2}) = 1, \\ p_i = 2^{f_i} - 1, \; i = 1,2,\ldots,n, \end{cases}$$

где $\gcd(p_{i_1}, p_{i_2})$ – наибольший общий делитель для p_{i_1} и p_{i_2} .

Целочисленную мантиссу $M' = d_t d_{t-1} \ldots d_2 d_1$ преобразуем в систему остаточных классов (СОК) с заданными основаниями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, получая тем самым *модулярную мантиссу* $\tilde{M} = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$:

$$\tilde{M} = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle = \left\langle |M'|_{p_1}, |M'|_{p_2}, \ldots, |M'|_{p_n} \right\rangle,$$

где $m_i \in [0, \; p_i - 1], \; i = 1,2,\ldots,n$ – цифры (модулярные разряды) модулярной мантиссы $\tilde{M}$, $|M'|_{p_i}$ – операция получения остатка от деления M' на i-е основание p_i.

С порядком λ оперируют в позиционной двоичной системе счисления. Таким образом, любое число с плавающей точкой (ПТ) вида (1) можно представить в следующем модулярно-позиционном формате (рис. 1):

$$\left[\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle, \; \lambda, \; s \,\middle|\, m_i \in [0, \; p_i - 1], \; \lambda \in [\lambda'_{\min}, \lambda'_{\max}], s \in \{0,1\} \right], \tag{2}$$

где $\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ – набор разрядов-цифр модулярной мантиссы $\tilde{M}$; λ – позиционный перемещенный порядок, представляющий собой целое двоичное число со знаком.

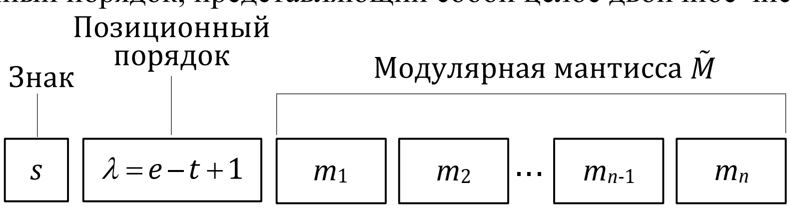

Рис. 1. Модулярно-позиционный формат с плавающей точкой

Представление чисел с ПТ в модулярно-позиционном формате (2) позволяет решить сразу несколько проблем, присущих позиционным представлениям вида (1):

- во-первых, увеличивается точность вычислений, которая определяется разрядностью мантисс (модулярные мантиссы $\tilde{M} = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ в общем случае могут изменяться в пределах интервала $[0, \; P - 1]$, где $P = \prod_{i=1}^{n} p_i$ – произведение оснований $p_1, p_2, \ldots, p_n$), поэтому для достижения точности 4*double достаточно выбрать восемь 32-битных оснований $p_1, p_2, \ldots, p_8$;
- во-вторых, ввиду взаимной независимости цифр-знакопозиций $m_i, i \in [1, \; n]$, модулярных мантисс обеспечивается возможность параллельного оперирования с отдельными цифрами-знакопозициями операндов при арифметических вычислениях;
- в-третьих, решается задача минимизации скорости вычислений при выполнении арифметических операций в зависимости от требуемой точности (при добавлении

дополнительных оснований p_i для увеличения точности, в случае если их число превышает число вычислительных устройств, время выполнения операций увеличивается линейно, а не экспоненциально, как в высокоточных позиционных библиотеках).

Модулярно-позиционные структуры могут быть эффективно использованы при высокоточном решении задач, когда использование форматов с фиксированной точкой принципиально невозможно в силу природы самих задач, а машинные форматы с плавающей точкой не обеспечивают требуемой точности. Использование модулярно-позиционного формата видится целесообразным при решении задач над массивами данных большой размерности, когда время, затрачиваемое на прямое и обратное преобразование несопоставимо мало, по сравнению со временем непосредственно расчетов.

В качестве примера на рис. 2 представлены схемы параллельных алгоритмов умножения и сложения модулярно-позиционных операндов. Для реализации операций деления и сравнения по величине модулярных мантисс, определения их выхода за допустимый диапазон представления и преобразования модулярных мантисс в позиционную систему, являющихся наиболее сложными операциями в СОК, предлагается использовать эффективные методы и алгоритмы, предложенные в работах [5, 6].

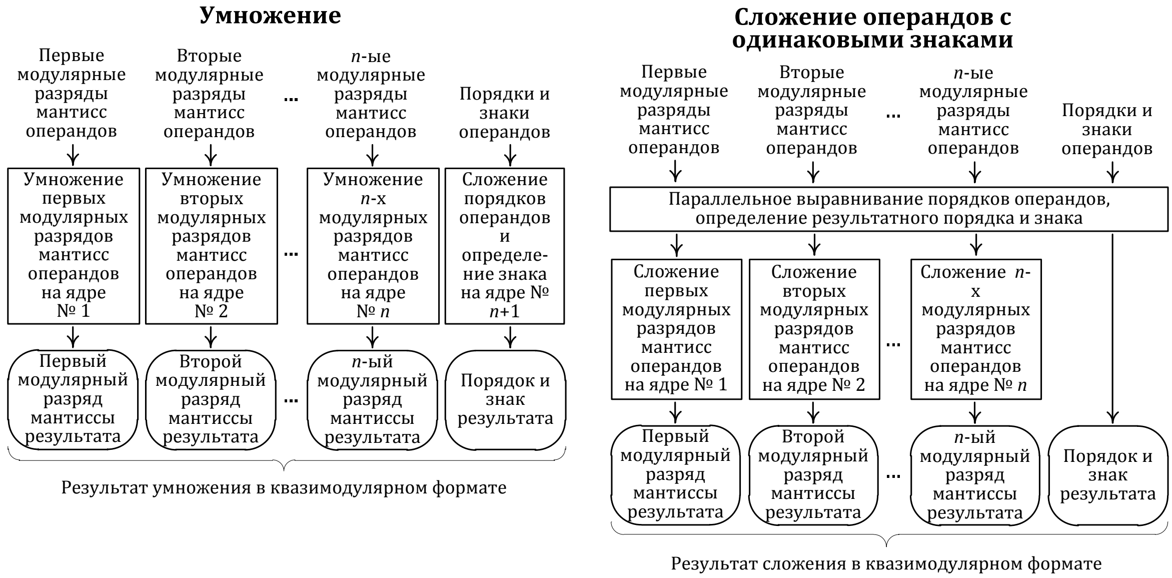

Рис. 2. Примеры алгоритмов выполнения арифметических операций с плавающей точкой в модулярно-позиционном формате

Введение новых способов организации арифметических вычислений с использованием модулярно-позиционного формата с плавающей точкой для представления вещественных чисел вызывает необходимость проектирования оригинальных схем декомпозиции данных по узлам и ядрам вычислительных устройств. Поэтому в комплексе используются специальные схемы распределения модулярно-позиционных структур данных между узлами и вычислительными ядрами в пределах узлов.

Для оценки эффективности применения модулярно-позиционного формата при высокоточном решении численных задач над массивами данных с плавающей точкой был проведен эксперимент, направленный на исследование быстродействия серверной части пакета HPDP-Solver в сравнении с широко известной программной библиотекой The GNU MP Bignum Library (GMP).

В качестве алгоритмической базы для эксперимента выступали высокоточные параллельные алгоритмы умножения плотных матриц $C = A \cdot B,\ A,B,C \in R^{n \times n}$ и скалярного произведения векторов $c = a \times b,\ a,b,c \in R^n$.

На рис. 3 представлен график зависимости времени умножения матриц 1500×1500 от точности счета при распараллеливании вычислений на восемь ядер.

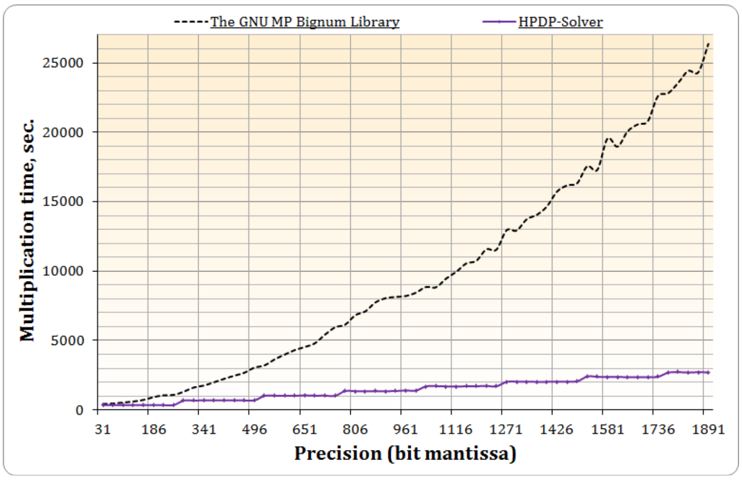

Рис. 3. Изменение времени умножения матриц при росте разрядности мантисс: счет на 8 ядрах

Литература

1. Исупов К.С., Князьков В.С. Инструментальный комплекс для проектирования параллельных масштабируемых программ численных расчетов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2010. № 6(70). С. 68–72.
2. Knyazkov V., Isupov K. Tool complex for performance of precision parallel calcula-tions in basis of matrix algebra // Information technologies in science, education and busi-ness: Catalog CeBIT 2011 the Ministry of Education and Sience of the Russian Federation. Participants Vyatka State University. 2011. 9 p.
3. Исупов К.С. Параллельные вычисления над многоразрядными числами в системе остаточных классов // Международная суперкомпьютерная конференция «Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее»: Сб. трудов. М.: МГУ, 2011. С. 534–540.
4. Оцоков Ш.А. Структурно-алгоритмические методы организации высокоточных вычислений на основе теоретических обобщений в модулярной системе счисления: диссертация доктора технических наук. М., 2010. 287 с.
5. Sabbagh A., Navi K. New Arithmetic Residue to Binary Converters // IJCSES International Journal of Computer Sciences and Engineering Systems. 2007. V. 1, No. 4. P. 295–299.
6. Chang C., Lai Y. A Division Algorithm For Residue Numbers // Applied Mathematics and Computation. 2006. No. 172(1). P. 368–378.