ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СВОДИМОСТИ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХИНДЕКСНЫХ ЗАДАЧ

А.С. Катеров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Рассматриваются многоиндексные задачи линейного программирования транспортного типа. Один из подходов к решению таких задач – сведение их к задаче поиска потока в сети. В работе доказано, что (в рамках рассматриваемой концепции сводимости) условие 2-вложенности является необходимым и достаточным условием сводимости в трёх- и четырёхиндексном случае. Доказательство основано на переборной схеме, выполненной средствами высокопроизводительных вычислений.

Введение

Рассматриваются многоиндексные задачи линейного программирования транспортного типа. Задачи данного класса возникают при решении различных прикладных задач: распределения мощностей каналов передачи данных провайдерами сети Интернет, объемно-календарного планирования, транспортной задачи с промежуточными пунктами и т.д. [1]. Один из подходов к решению многоиндексных задач линейного программирования основан на исследовании возможности сведения задач к потоковым алгоритмам. В качестве потоковой задачи рассматривается задача поиска циркуляции минимальной стоимости [2]. В данной работе проводится исследование сводимости трёх- и четырёхиндексных задач. Разработана параллельная программная система, предназначенная для запуска на многопроцессорных вычислительных системах с распределённой памятью, позволяющая доказывать невозможность такого сведения для некоторых частных подклассов.

Многоиндексные транспортные задачи

При постановке многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа воспользуемся формализацией, предложенной в [3]. Пусть $s \in N$ и $N(s)=\{1,2,...,s\}$. Каждому числу l поставим в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который принимает значения из множества $J_l=\{1,2,...,n_l\}$, где $n_l \geq 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f=\{k_1,k_2,...,k_t\} \subseteq N(s)$; $k_i < k_{i+1}$, $i=\overline{1,t-1}$. Набор значений индексов $F_f=(j_{k_1}, j_{k_2},..., j_{k_t})_f$ будем называть t-индексом. Множество всех t-индексов, соответствующих f, определим как $E_f=\{F_f \mid F \in J_{k_1} \times J_{k_2} \times ... \times J_{k_t}\}$. Там, где это не вызывает неоднозначности, будем опускать нижний индекс f в записи t-индексов. Если $F_{f'} \in E_{f'}$, $F_{f''} \in E_{f''}$, где $f', f'' \subseteq N(s)$ и $f' \cap f'' = \varnothing$, то через $F_{f'}F_{f''}$ обозначим такой набор, что $F_{f'}F_{f''} \in E_{f' \cup f''}$. Далее определим $\overline{f}=N(s) \setminus f$, тогда согласно введенному обозначению $F_{N(s)}=F_f F_{\overline{f}}$.

Каждому набору F_f поставим в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Данное отображение множества t-индексов E_f в множество действительных чисел назовем (как и в [3]) t-индексной матрицей и обозначим через $\{z_{F_f}\}$. Рассмотрим s-индексную матрицу $\{z_{N(s)}\}$ и введем следующее обозначение:

$$\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\bar f}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} \dots \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\bar f}}, \; F_{\bar f} \in E_{\bar f}.$$

Введенное обозначение подсумм s-индексной матрицы будем использовать при формализации многоиндексных транспортных задач.

Пусть M – заданное множество, $M \subseteq 2^{N(s)}$; $\{a_{F_{\bar f}}\}$, $\{b_{F_{\bar f}}\}$ – заданные $|\bar f|$-индексные матрицы свободных коэффициентов, $0 \le a_{F_{\bar f}} \le b_{F_{\bar f}}$, $F_{\bar f} \in E_{\bar f}$, $f \in M$; $\{c_{F_{N(s)}}\}$ – заданная s-индексная матрица коэффициентов целевой функции; $\{x_{F_{N(s)}}\}$ – s-индексная матрица неизвестных. Тогда многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа формализуется следующим образом:

$$a_{F_{\bar f}} \le \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\bar f}} \le b_{F_{\bar f}}, F_{\bar f} \in E_{\bar f}, \; f \in M, \qquad (1)$$

$$x_{F_{N(s)}} \ge 0, \; F_{N(s)} \in E_{N(s)}, \qquad (2)$$

$$\sum_{F_{N(s)} \in E_{N(s)}} c_{F_{N(s)}} x_{F_{N(s)}} \to \min. \qquad (3)$$

Далее класс всех многоиндексных задач вида (1)–(3) при фиксированном множестве M будем обозначать $W(M)$. Матрицу системы ограничений (1) обозначим через $Matr(M, n_1, \dots, n_s)$, так как она однозначно определяется множеством M, а также количеством принимаемых значений для каждого индекса: $n_1, n_2, \dots, n_s$.

В общем случае для решения таких задач могут быть использованы лишь универсальные методы решения задач линейного программирования [4]. Однако специфика поставленной задачи (линейные ограничения транспортного типа) позволила для частного класса рассматриваемых задач предложить более эффективные алгоритмы их решения, отличные от общих (достаточно трудоёмких) методов решения.

Исследование сводимости

В данной работе исследуется возможность сведения класса многоиндексных задач линейного программирования транспортного типа к классу задач поиска потока минимальной стоимости, который определяется следующим образом. Рассмотрим ориентированный граф $G = (V_G, A_G)$, $A_G \subseteq V_G^{\,2}$, здесь V_G и A_G – множество вершин и дуг графа G соответственно. Пусть l_{ij}, u_{ij} – пропускные способности дуги (i, j); e_{ij} – стоимость дуги (i, j); x_{ij} – неизвестная величина потока вдоль дуги (i, j), $(i, j) \in A_G$. Тогда через $v(G; l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i, j) \in A_G)$ обозначим следующую задачу поиска потока минимальной стоимости:

$$\sum_{(i,j) \in A_G} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A_G} x_{ji} = 0, \; i \in V_G,$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}, \; (i, j) \in A_G,$$

$$x_{ij} \ge 0, \; (i, j) \in A_G,$$

$$\sum_{(i,j) \in A_G} e_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Обозначим через $Graph$ множество всех ориентированных графов. Класс задач поиска потока минимальной стоимости определим как

$$W_{Graph} = \{v(G, l_{ij}, u_{ij}, e_{ij}, (i,j) \in A_G) \mid l_{ij}, u_{ij} \in Z_+, e_{ij} \in Z, (i,j) \in A_G, G \in Graph\}.$$

Применяется концепция $t_1 \mid t_2 - equal \mid t_3 - edge$ сводимости, предложенная в [5].

Определение 1. Множество *M* называется *k*-вложенным, если существует разбиение множества M на k подмножеств $M_i = \{f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, ..., f_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1,k}$, что $f_j^{(i)} \subset f_{j+1}^{(i)}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $i = \overline{1,k}$.

Теорема 1 [1]. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $L \mid L - equal \mid L - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, достаточно, чтобы множество *M* было 2-вложенным.

Теорема 2 [6]. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $t_1 \mid t_2 - equal \mid t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, необходимо, чтобы $Matr(M, n_1, ..., n_s)$ для любых $n_1, ..., n_s$ была абсолютно унимодулярна.

Теорема 3 [7]. Пусть $M \subseteq 2^{N(s)}$, $s \le 4$. Для того чтобы класс $W(M)$ являлся $t_1 \mid t_2 - equal \mid t_3 - edge$ сводимым к классу W_{Graph}, где $t_1(n), t_2(n), t_3(n) \ge n$, $n \in N$, необходимо и достаточно, чтобы множество *M* было 2-вложенным.

В рамках проведённых исследований была разработана параллельная программная система, которая по заданным множеству M, а также $n_1, ..., n_s$ строит $Matr(M, n_1, ..., n_s)$. Далее проверяется абсолютная унимодулярность построенной матрицы, таким образом, определятся выполнение необходимого условия сводимости теоремы 2. Проверка абсолютной унимодулярности в рассматриваемом случае основана на переборе всех миноров матрицы размером $n \times m$ с рангом больше 2, при этом число таких миноров равно $\sum_{i=3}^{\min(n,m)} C_n^i C_m^i$. Максимальный размер исследуемых матриц достигал 27×27, для них количество миноров, которые требовалось перебрать, равно 1.9×10^{15}. В связи с таким объёмом вычислений было принято решение о применении параллельности в разрабатываемой системе. Данная программная система запускалась на супер-ЭВМ МП-20 (РФЯЦ-ВНИИЭФ г. Саров).

Заключение

Исследован класс трёх- и четырёхиндексных задач линейного программирования транспортного типа. Рассмотрены вопросы сводимости многоиндексных задач к классу задач поиска потока в сети. В рамках исследуемой схемы сведения показано, что для класса многоиндексных задач с числом индексов, не превосходящим 4, условие 2-вложенности множества, определяющего систему ограничений, является одновременно необходимым и достаточным условием сводимости к классу задач поиска потока минимальной стоимости. Применение разработанной программной системы позволило отыскать множества *M*, для которых $Matr(M, n_1, ..., n_s)$ не является абсолютно унимодулярной, что и было использовано при доказательстве.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России, государственное соглашение о представлении гранта №14.В37.21.0878.

Литература

1. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многоиндексные задачи распределения ресурсов в иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 2006. № 6. С. 194-205.
2. Форд Л. , Фалкерсон Д. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

3. Раскин Л.Г., Кириченко И.О. Многоиндексные задачи линейного программирования. М.: Радио и связь, 1982.
4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
5. Афраймович Л.Г. Трехиндексные задачи линейного программирования с вложенной структурой // Автоматики и телемеханика. 2011. № 8. С. 109–120.
6. Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х. Многопродуктовые потоки в древовидных сетях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 2. С. 57-63.
7. Афраймович Л.Г., Катеров А.С. Трех- и четырехиндексные задачи с вложенной структурой // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 3 (1). С. 163-169.