ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ, ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ

Д.Г. Залялов, А.В. Лапин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматривается задача оптимального управления в правой части уравнения Лапласа при наличии поточечных ограничений на функцию управления и нелокальных ограничений на функцию состояния. Строится ее конечно-разностная аппроксимация, вводится сеточная функция Лагранжа, формулируется соответствующая седловая задача. Наряду с исходной седловой задачей рассматривается ее регуляризованный вариант. Приводятся выводы о существовании решений обеих седловых задач. Для решения регуляризованной седловой задачи применяется градиентный итерационный метод, для решения исходной задачи – предобусловленный метод Узавы. Устанавливается сходимость итерационных методов, описываются алгоритмы их численной реализации. Приводятся результаты числовых расчетов.

Введение

Данная работа является продолжением исследований в области построения, теоретического и численного анализа итерационных методов решения сеточных задач оптимального управления с ограничениями на функции управления и состояния ([1, 2]).

1. Постановка и аппроксимация задачи оптимального управления

Пусть задачей состояния является однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона на единичном квадрате Ω с границей $\partial\Omega$:

$$\Delta y = u, x \in \Omega, \qquad y(x) = 0, x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

где u – функция управления, решение y – состояние системы. Множества ограничений на функции управления и состояния зададим равенствами

$$U_{ad} = \{u \in L_2(\Omega): \left||u(x)|\right| \le 1 \ \forall x \in \Omega\}, Y_{ad} = \left\{y \in H_0^1(\Omega): \int\limits_\Omega y(x)dx \le 1\right\},$$

а целевой функционал возьмем в виде

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (y - y_d)^2 dx + \frac{r}{2}\int\limits_\Omega u^2 dx, r = const > 0, y_d \in L_2(\Omega).$$

Будем решать следующую задачу оптимального управления:

$$\min_{(y,u)\in K} J(y,u), \tag{2}$$

$$K = \{(y,u): y \in Y_{ad}, u \in U_{ad}, \text{выполнено уравнение (1)}\}.$$

Задача (2) имеет единственное решение (y,u).

Аппроксимируем задачу (2) конечно-разностной схемой на равномерной сетке $\vec{w} = \{x_{ij} = (ih, jh); 0 \le i,j \le n+1, (n+1)h = 1\}$. Конечно-разностные аппроксимации задачи состояния, множеств ограничений на сеточные функции управления u_h и состояния y_h и целевого функционала имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{i-1j}+2y_{ij}-y_{i+1j}}{h^2}+\dfrac{-y_{ij-1}+2y_{ij}-y_{ij+1}}{h^2}=u_{ij}, 1\le i,j\le n, \\ y_{0j}=y_{j0}=y_{n+1j}=y_{jn+1}=0, \end{cases} \tag{3}$$

$$U_{ad}^h=\{u_h: |u_{ij}|\le 1, i,j=1,2,\dots,n\}, Y_{ad}^h=\left\{y_h: h^2\sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}\le 1\right\},$$

$$J_h(y_h,u_h)=\frac{h^2}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(y_{ij}-y_{d,ij})^2+\frac{rh^2}{2}\sum_{ij=1}^{n}u_{ij}^2.$$

В результате получаем конечномерную задачу оптимального управления

$$\text{найти} \min_{(y_h,u_h)\in K_h} J_h(y_h,u_h), \tag{4}$$

$$K_h=\{(y_h,u_h): y_h\in Y_{ad}^h\}, u_h\in U_{ad}^h, \text{выполнено уравнение (3),}$$

которая имеет единственное решение (y_h,u_h).

2. Конечномерные седловые задачи

Пусть множество внутренних узлов $x_{ij}, 1\le i,j\le n$, сетки ω каким-либо образом упорядочено. Поставим во взаимно однозначное соответствие сеточным функциям векторы из $|R^N, N=n^2$ их узловых параметров с координатами, соответствующими выбранному упорядочению узлов.

Система линейных уравнений (3) может быть записана в виде $Ly=u$ с симметричной и положительно определенной матрицей L – матрицей сеточного оператора Лапласа при нулевых граничных условиях Дирихле, множества ограничений принимают вид:

$$U_{ad}=\left\{u\in R^N: \sum_{i=1}^{N}h^2y_i\le 1\ \forall i\right\},$$

а целевая функция после деления на $\frac{h}{2}$ равна $\frac{1}{2}\|y-y_d\|^2+\frac{r}{2}\|u\|^2$. Здесь и далее $||.||$ и $||.,.||$ – это евклидова норма и скалярное произведение в R^N. Обозначим через $\varphi(u)=$ $=I_{U_{ad}}(u)$ и $\theta(y)=I_{Y_{ad}}(y)$ индикаторные функции множеств U_{ad} и Y_{ad}. В итоге, сеточная задача оптимального управления (4) преобразуется к следующему виду:

$$\min_{Ly=u}\left\{J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_d\|^2+\frac{r}{2}\|u\|^2+\varphi(u)+\theta(y)\right\}. \tag{5}$$

Определим функцию Лагранжа для задачи (5) равенством

$$\acute{L}(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_d\|^2+\frac{r}{2}\|u\|^2+\varphi(u)+\theta(y)-(Ly-u,\lambda). \tag{6}$$

Седловая точка функции Лагранжа является решением [3] системы, дающей условия оптимальности первого порядка:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \partial\theta(y) \\ \partial\varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix}\ni\begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Задача (7) имеет решение (y,u,λ), при этом, пара (y,u) определяется однозначно и совпадает с решением задачи (5).

Рассмотрим наряду с задачей (5) регуляризованную задачу, аппроксимируя функцию $\theta(y)=I_{Y_{ad}}(y)$ дифференцируемой функцией $\theta_\varepsilon(y)=\frac{1}{2\varepsilon}((\sum_{i=1}^{N}h^2y_i-1)^+)^2$:

$$\min_{Ly=u}\left\{J(y,u)=\frac{1}{2}\Big||y-y_d||^2+\frac{r}{2}\Big||u||^2+\varphi(u)+\theta_\varepsilon(y)\right\}. \tag{8}$$

Соответствующая регуляризованная задача имеет вид:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & -L \\ 0 & rE & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_\varepsilon \\ u_\varepsilon \\ \lambda_\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla\theta(y_\varepsilon) \\ \partial\varphi(u_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} y_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Задача (9) имеет единственное решение $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$, компоненты $(y_\varepsilon, u_\varepsilon)$ совпадают с решением (8).

3. Итерационные методы решения седловых задач

3.1. Градиентный метод решения регуляризованной задачи

Разрешив третье уравнение в системе (9) относительно y_ε и затем первое уравнение относительно λ_ε, получим включение для вектора u_ε (в дальнейшем опускаем индекс ε у вектора u_ε):

$$P_\varepsilon(u) + \partial\varphi(u) \ni L^{-1}y_d, P_\varepsilon = rE + L^{-2} + L^{-1}\nabla\theta_\varepsilon{}^\circ L^{-1}. \qquad (10)$$

Применим для решения (10) одношаговый итерационный метод

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} + P_\varepsilon u^k + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni L^{-1}y_d. \qquad (11)$$

Итерационный метод (11) совпадает с градиентным методом для задачи минимизации (8) и сходится при $0 < \tau < \frac{2\varepsilon}{\mu_{min}^{-2} + \varepsilon(r + \mu_{min}^2)}$,

где μ_{min} – минимальное собственное число сеточного оператора Лапласа.

Алгоритм реализации метода (11) состоит из следующих шагов:

1) для известного вектора управления u^k найти решение уравнения состояния $Ly^k = u^k$;

2) найти сопряженное состояние λ^k: $\lambda^k = L^{-1}\left(y^k - y_d + \nabla\theta_\varepsilon(y^k)\right)$;

3) найти новое приближение к вектору управления, решив включение

$$u^{k+1} + \tau\partial\varphi(u^{k+1}) \ni (1 + \tau r)u^k - \tau\lambda^k.$$

3.2. Предобусловленный метод Узавы для исходной задачи

Исключив векторы y и u в системе (7), получим уравнение для λ:

$$P(\lambda) \equiv L(E + \partial\theta)^{-1}(L\lambda + y_d) - (rE + \partial\varphi)^{-1}(-\lambda) = 0. \qquad (12)$$

Применим для решения (12) итерационный метод

$$L^2\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} + P(\lambda^k) = 0, \qquad (13)$$

являющийся предобусловленным методов Узавы, для отыскания седловой точки функции Лагранжа (6). Итерационный метод (13) сходится при условии $0 < \tau < \frac{2r}{r + \mu_{min}^{-2}}$.

При реализации этого метода выполняются следующие шаги:

1) для известного вектора λ^k найти y^k и u^k, решив включения

$$(E + \partial\theta)y^k \ni L\lambda^k + y_d \text{ и } (rE + \partial\varphi)u^k \ni -\lambda^k;$$

2) вычислить $p^k = L^{-1}u^k$;

3) решить уравнение $L\frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\tau} = -y^k + p^k$.

4. Результаты численных экспериментов

Вычислительные эксперименты были проведены для задачи с функцией наблюдения $y_d = 10 * (\sin x_1 + \sin x_2)$ и для разных весовых параметров r в целевой функции.

Критерием остановки для градиентного метода служило неравенство $||\partial_u^k||_{L_2}^2 < 10^{-5}$, а для метода Узавы – $||\partial_\lambda^k||_{L_2}^2 < 10^{-5}$. Здесь $||\partial_u^k||_{L_2}^2 < 10^{-5}$ – норма невязки во включении (10), а $||\partial_\lambda^k||_{L_2}^2 < 10^{-5}$ – норма невязки в уравнении (12).

Были реализованы два варианта алгоритмов, а именно:

а) решение на фиксированной сетке с нулевыми начальными приближениями («односеточный метод»);

б) решение на сетке в два раза более грубой с последующим использованием полученных результатов в качестве начальных приближений на исходной сетке («2-сеточный метод»).

В табл. 1 включены результаты вычислений градиентным методом с ε=0,02. При уменьшении ε число итераций и время вычислений растет очень быстро.

Таблица 1. Градиентный метод и метод Узавы

r=0.01	1 / h	**Односеточный метод** число итераций, время	**Двухсеточный метод** число итераций, время
Градиентный метод ε = 0.02	60 100 200	946, 00:00:31 950, 00:02:31 951, 00:22:28	1902, 00:00:26 1890, 00:01:49 1858, 00:13:48
Метод Узавы	60 100 200	540, 00:00:09 901, 00:00:34 1868, 00:04:42	815, 00:00:07 1339, 00:00:31 2748, 00:03:56

r=0.01	1 / h	**Односеточный метод** число итераций, время	**Двухсеточный метод** число итераций, время
Градиентный метод ε = 0.02	60 100 200	901, 00:00:30 901, 00:02:27 904, 00:20:46	1851, 00:00:27 1829, 00:01:49 1801, 00:13:15
Метод Узавы	60 100 200	955, 00:00:12 1615, 00:00:59 3411, 00:08:14	1415, 00:00:09 2369, 00:00:42 4973, 00:05:28

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 10-01-00629.

Литература

1. Hinze M., Schiela A. Discretization of interior point methods for state constrained elliptic optimal control problems: Optimal error estimates and parameter adjustment // Comput. Optim. Appl. 2011. V. 48, No. 3. P. 581–600.
2. Laitinen E., Lapin A., Lapin S. On the iterative solution of finite-dimensional inclusions with applications to optimal control problems // Comp. Methods in Appl. Math. 2010. V. 10, No. 3. P. 283–301.
3. Лапин А.В., Хасанов М.Г. Решение задачи оптимального управления правой частью эллиптического уравнения при наличии ограничений на состояние // Ученые записки Казанского университета. 2010. Т. 152, Кн. 4. С. 56–67.
4. Lapin A. Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. 2010. V. 31, No 4. P. 309–322.