ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ В РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПРИМЕРЕ ВХОДА АППАРАТА В АТМОСФЕРУ

В.В. Дикусар, Н.Н. Оленёв

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

При решении задач оптимального управления применение принципа максимума редуцирует исходную постановку к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом возникает необходимость численно определять матрицу Якоби. Предложена схема параллельного вычисления указанной матрицы на каждом шаге расчета траектории. Применение параллельной схемы иллюстрируется практической задачей о выборе угла атаки аппарата, тормозящего в атмосфере при полете на максимальную и минимальную дальность с учетом ограничений на величину полной перегрузки.

Введение

Применение принципа максимума сводит задачу оптимального управления к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Трудоемкая процедура численного расчета матрицы Якоби в краевой задаче естественно распараллеливается в силу независимости частных производных. Параллельный алгоритм применяется для решения задачи оптимального управления, возникающей при расчете входа аппарата в атмосферу.

1. Уравнения движения. Постановка задачи

Рассматривается задача о выборе управления подъемной силой спускаемого аппарата в атмосфере при полете на максимальную и минимальную дальность с учетом ограничений на величину полной перегрузки. Решение указанной задачи позволяет определить маневренные возможности аппарата [1].

Выражение для полной перегрузки имеет вид:

$$\varphi(x,u) = n = (c_x^2 + c_y^2)^{1/2} qS/G \le N, \quad q = \rho V^2/2, \tag{1}$$

где q – скоростной напор; ρ – плотность атмосферы; V – скорость; c_x – коэффициент сопротивления; c_y – коэффициент подъемной силы; S – характерная площадь аппарата, G – вес.

Из (1) видно, что $\varphi(x,u)$ содержит явно управление c_y и рассматриваемое ограничение принадлежит к классу смешанных.

Аэродинамические силы, действующие на аппарат, характеризуются полярой вида

$$c_x = a + bc_y^2, \tag{2}$$

где a – коэффициент сопротивления при нулевом угле атаки, b – параметр поляры.

На величину управляющей функции $c_y(t)$ наложены ограничения

$$c_1 \le c_y(t) \le c_2. \tag{3}$$

Уравнения плоского движения аппарата в атмосфере имеют вид

$$\dot{V} = -c_x q \frac{S}{m} - g\sin\theta,\ t \in [t_0, t_1],$$

$$\dot{\theta} = c_y q/mV + (V/R - \frac{g}{V})\cos\theta, \tag{4}$$

$$\dot{h} = V\sin\theta,\ \dot{L} = V\cos\theta.$$

Здесь g – ускорение силы тяжести; h – высота; L – дальность полета; θ – местный угол наклона траектории; t – время; m – масса аппарата; R – радиус планеты.

Будем считать атмосферу изотермической

$$\rho = \rho_o \exp(-\beta h), \tag{5}$$

где ρ_o – плотность атмосферы на поверхности планеты; β – показатель экспоненты в формуле для плотности.

Для системы (4) заданы начальные условия

$$V(t_0) = V_0, \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad h(t_0) = h_0, \quad L(t_0) = 0. \tag{6}$$

Граничные условия определяются конечной высотой полета

$$h(t_1) = h_1, \tag{7}$$

причем $V_1(t_1)$, $\theta(t_1)$, t_1 в конце полета не фиксированы.

Требуется найти траекторию, удовлетворяющую связям (1)-(7), на которой $L(t_1)$ достигает экстремального значения.

2. Принцип максимума (регулярный случай)

Исследование задачи в регулярном случае проводится с использованием классического принципа максимума Понтрягина Л.С. [1]. Траектория называется регулярной, если во всех состояниях системы, встречающихся на оптимальной траектории, управление эффективно. Для рассматриваемой задачи требование регулярности эквивалентно требованию $\partial n/\partial c_y \neq 0$ при $n = N$.

Обозначая сопряженные переменные к θ, h, V, L для системы (4) через p_1, p_2, p_3, p_4, запишем функцию Понтрягина

$$H = p_1\left[c_y \rho V S/2m + \left(\frac{V}{R} - g/V\right)\cos\theta\right] + p_2 V\sin\theta - \\ - p_3\left(\frac{c_x \rho V^2 S}{2m} + g\sin\theta\right) + p_4 V\cos\theta. \tag{8}$$

Так как система (4) автономна и на время спуска никаких ограничений не накладывается, то $H \equiv 0$ на всем интервале движения.

В соответствии с [1] система сопряженных уравнений должна иметь вид

$$p_i = -\partial H/dx_i + \lambda(t)\partial n/\partial x_i, \quad x = (\theta, h, V, L) = \{x_i\}, \quad i = \overline{1,4}.$$

Выпишем теперь уравнения для p_i в явном виде

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial\theta}, \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial h}, \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial V}, \dot{p}_4 = 0, \tag{9}$$

где $\lambda(t)$ – множитель Лагранжа, причем $\lambda(t)(n - N) = 0$,

$$\lambda(t) = g(p_1/2 - b p_3 c_y V)\sqrt{c_x^2 + c_y^2}/V \cdot c_y(1 + 2bc_x). \tag{10}$$

Оптимальное управление определяется из условия минимума (максимума) функции Понтрягина (8) при $p_4(t_1) = -1$

$$H \to \min_{c_y} \text{ при } L(t_1) \to \max, H \to \max_{c_y} \text{ при } L(t_1) \to \min . \tag{11}$$

Из условий $\dot{p}_4 = 0$ (9) и $p_4(t_1) = -1$ следует, что $p_4(t) \equiv -1$ на всей оптимальной траектории. Поскольку $V(t_1)$ и $\theta(t_1)$ в конце полета не фиксированы, то

$$p_1(t_1) = 0, \quad p_3(t_1) = 0. \tag{12}$$

Если задать $p_1(t_0)$ и $p_3(t_0)$, то из условия $H \equiv 0$ можно определить $p_2(t_0)$, и число контролируемых в конце траектории функций $p_1(t_1)$ и $p_3(t_1)$ (12) совпадает с числом параметров, задаваемых в начальной точке.

Таким образом, поставленная задача сводится к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим методические особенности решения задачи с учетом ограничения $n \le N$ (1). При движении в открытой области $n < N$ имеем согласно условию дополняющей нежесткости $\lambda(t)(n-N) = 0$: $\lambda(t) = 0$; при этом значение n соответствует значению c_y, определенному согласно принципу максимума (минимума)

$$c_y = c_1, \quad c_y = c_2, \quad c_y = c_y^*, \quad c_y^* = p_1/2bp_3V, \quad c_1 \le c_y^* \le c_2.$$

Значение c_y^* вычисляется из уравнения $\partial H/\partial c_y = 0$. Для полученных значений c_y вычисляем величины

$$H_1 = H(c_1), \quad H_2 = H(c_2), \quad H_3 = H(c_y^*), \quad H_0 = \max\{H_1, H_2, H_3\}. \tag{13}$$

Максимальное значение функции Понтрягина (13) определяет оптимальное управление

$$c_y^0 = \arg H_0. \tag{14}$$

В некоторый момент времени функция $n(t)$ станет больше N и тогда равенством $n(t) = N$ определится время выхода на ограничение. При движении по ограничению $\varphi(x,u) = N$ (1) управление $c_y(t)$ определяется из условия связи

$$c_y^2(t) = \{-(1+2ab) + [(1+2ab)^2 + 4(Nmg/sq - a^2)b^2]^{1/2}\}/2b^2 = r(t). \tag{15}$$

Отсюда следует: $c_y = \sqrt{r(t)}$, $c_y = -\sqrt{r(t)}$. Полученные выражения дают возможность вычислить

$$H_4 = H(\sqrt{r(t)}), \quad H_5 = H(-\sqrt{r(t)}), \quad H_n = \max\{H_4, H_5\}. \tag{16}$$

Соотношения (16) определяют необходимый знак для $c_y^0(t)$.

Из выражения для $c_y^2(t)$ (15) следует, что $|c_y(t)|$ является непрерывной функцией в силу непрерывности $q(t)$.

Момент схода с ограничения $n(t) = N$ устанавливается двумя теоремами.

Теорема 1. В задаче на $L(t_1) \to \min$ сход с ограничения $n(t) = N$ происходит в момент $c_y(t) = c_1$.

Теорема 2. В задаче на $L(t_1) \to \max$ сход с ограничения $n(t) = N$ наступает в момент $c_y(t) = c_2$.

Доказательство теорем опускаем ввиду ограниченного объема статьи.

Если в процессе движения по ограничению $n(t) = N$ в какой-то точке $c_y = 0$ и $\dot{q} \ne 0$, то на такой траектории в последующий момент происходит нарушение ограничения. Это связано с тем, что локальное влияние на управление уже исчерпано; $\partial n/\partial c_y = 0$. При решении краевой задачи итеративными методами указанный факт важен прежде всего потому, что на некоторых пробных траекториях может происходить нарушение ограничения (1). Одновременно с этим возникают вычислительные трудности в построении итерационных методов расчета, поскольку из (10) следует, что $\lambda(t) \to \infty$ при $|c_y| \to 0$.

Краевая задача решалась с использованием параллельного варианта метода Ньютона. Матрица Якоби вычислялась с применением параллельного алгоритма на суперкомпьютере МСЦ РАН.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №10-08-00624, №11-07-00201).

Литература

1. Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.В. Необходимое условие экстремума. М., 1990. 320 с.