

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА С ОБОБЩЁННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

*В.А. Гришагин, Д.Н. Добряев*

*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

## Введение

Принятие оптимальных решений, т.е. наилучших в рамках некоторых критериев, является неотъемлемой частью процессов, окружающих человека. Быстрое развитие вычислительных средств, в частности возможности распараллеливания, предоставляют новые возможности для решения оптимизационных проблем, что позволяет существенно увеличить размерность и сложность решаемых задач [1, 2]. Но наряду с использованием новых высокопроизводительных технологий очень важное место занимает методика поиска оптимума. А это, в свою очередь, требует создания новых алгоритмов, адаптированных к специфике решаемой задачи. В настоящей статье предлагается алгоритм глобального поиска, основанный на характеристической структуре решающего правила, в котором используются обобщённые характеристики квадратичного типа, и его параллельная реализация. В силу широкой области применения методов оптимизации актуальным является вопрос использования данного подхода при решении практических задач во всевозможных областях с целью предоставления более удобного и производительного инструментария для изучения тех или иных процессов, в частности возможности увеличения спектра и размерности решаемых прикладных задач. Поэтому основное внимание уделяется использованию изложенных методов в гидродинамике и решению прикладных задач на примере нахождения потокораспределения в гидросистемах. Приведены соответствующие результаты экспериментов.

## Обобщённая квадратичная характеристика и сходимость метода

Алгоритм с обобщённой характеристикой квадратичного типа определяется следующим решающим правилом [6]:

$$R(i) = \alpha m(x_i - x_{i-1}) + \beta \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - \gamma(z_i + z_{i-1}) + \delta|z_i - z_{i-1}|, \quad (1)$$

$$x^{k+1} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \xi \frac{z_i - z_{i-1}}{m}, \quad (2)$$

где  $\alpha > 0, \beta, \gamma, \delta, \xi \geq 0$  – параметры. Величина  $m$  вычисляется:

$$m = \begin{cases} rM, & M > 0 \\ 1, & M = 0 \end{cases}, \text{ где } M = \max_{1 \leq i \leq \tau} \frac{|z_i - z_{i-1}|}{x_i - x_{i-1}}, \text{ а } r > 1 \text{ – параметр метода.}$$

Метод сходится, если параметры удовлетворяют следующим условиям [6]:

$$2\sqrt{\alpha\beta} + \delta > \gamma, \beta > \alpha, \xi < \frac{r}{2} \text{ или } 2\sqrt{\alpha\beta} + \delta \geq \gamma, \beta \leq \alpha, \xi < \frac{r}{2}. \quad (3)$$

Если функция  $z(x)$  удовлетворяет условию Липшица, то предельная точка является глобальным минимумом, если выполнено  $m > \frac{\gamma L}{\alpha}, \xi < \frac{r}{2}$ . (4)

### Параллельный алгоритм с обобщённой характеристикой

Распараллеливание решающего правила алгоритма с обобщённой характеристикой заключается в выборе нескольких интервалов (по количеству процессоров) с максимальными характеристиками и независимом вычислении в них значений целевой функции [2]. Пусть имеется  $p > 1$  вычислительных узлов.

**Шаг 1 (инициализация).** Первые  $p > 1$  испытаний алгоритма проводятся в произвольных точках  $x^1, x^2, \dots, x^p$  отрезка  $[a, b]$ . Вычисляются значения  $z_i = f(x_i), 1 < i < p$ .

**Шаг 2 (начало итерации – формирование системы интервалов).** Координаты испытаний  $x^1, x^2, \dots, x^k, k = k(n)$ , перенумеровываются в порядке возрастания:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\tau-1} < x_{\tau} = b, \quad (5)$$

где  $\tau = k(n) - 1$ .

**Шаг 3 (вычисление характеристик интервалов).** Каждому интервалу  $(x_{i-1}, x_i), 1 \leq i \leq \tau$ , ставится в соответствие число (характеристика)

$$R(i) = \alpha m(x_i - x_{i-1}) + \beta \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - \gamma(z_i + z_{i-1}) + \delta |z_i - z_{i-1}|.$$

**Шаг 4 (выбор интервалов с  $p$  максимальными характеристиками).** Среди характеристик  $R(i)$  выбираются  $p$  максимальных и соответствующие им интервалы.

**Шаг 5 (формирование координат новых испытаний).** В выбранных интервалах формируются точки испытаний  $x^{k+s} = \frac{x_{t_s} + x_{t_s-1}}{2} - \xi \frac{z_{t_s} - z_{t_s-1}}{m}$  для  $1 \leq s \leq p$ .

**Шаг 6 (проверка условия остановки).** Если выполняется условие остановки  $\min_{1 \leq s \leq p} (x_{t_s} - x_{t_s-1}) \leq \varepsilon$ , (6)

то вычисления заканчиваются. В противном случае осуществляется вычисление значений функции в точках  $x^{k+1}, \dots, x^{k+p}$  – каждое испытание на своём процессоре.

В системе *PSoDI* [3] реализована возможность использования параллельного алгоритма глобального поиска с обобщённой характеристикой квадратичного типа для решения многомерных многоэкстремальных задач оптимизации в рамках многошаговой схемы на многоядерных архитектурах, где параллельно решаются одномерные подзадачи по последней ( $n$ -й) переменной. Также есть возможность распараллеливания по первой переменной, когда параллельно решаются подзадачи размерности  $n-1$ .

### Примеры использования предложенного подхода распараллеливания алгоритма с обобщённой характеристикой при решении прикладных задач стационарного потокораспределения в гидросистемах

Спектр применения методов оптимизации очень широк. Одной из задач, решение которой можно свести к поиску экстремума функции, является задача нахождения стационарного потокораспределения в гидросистемах [4]. Существенным преимуществом использования методики является тот факт, что минимумы совпадают с устойчивыми состояниями равновесия [7], что исключает проблему определения устойчивости.

Покажем примеры решения задачи нахождения равновесных режимов системы циркуляции теплоносителя (СЦТ) ядерной энергетической установки, являющейся

частным видом гидросистемы. В силу большой размерности и многоэкстремальности подобных задач целесообразно применять параллельные методы поиска оптимума.

На рис. 1 представлена расчетная модель типовой системы циркуляции.

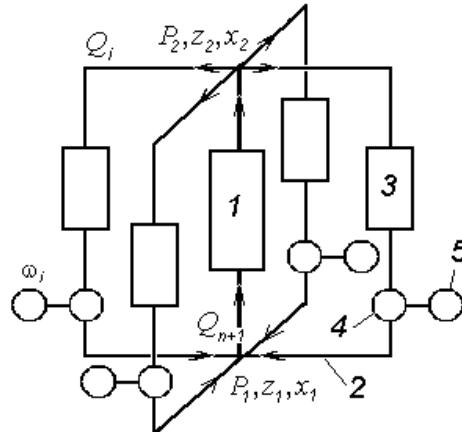


Рис. 1

Теплоноситель, нагревающийся в активной зоне реактора 1, поступает по трубопроводам в параллельно работающие теплообменные петли 2 и после охлаждения в теплообменниках 3 снова подается в активную зону. Течение теплоносителя обеспечивается работой циркуляционных насосов 4, снабженных электродвигателями 5. Стрелками показано направление течения теплоносителя.

Состояния равновесия данной системы являются стационарными точками соответствующей функции Ляпунова [5]. Для рассматриваемой СЦТ задача нахождения устойчивых состояний равновесия в шестимерном фазовом пространстве сводится к поиску минимумов этой функции.

Минимизируемая функция для данной схемы имеет вид [4]

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 S_i(x_i) + S_5(x), \text{ здесь}$$

$$S_i(x_i) = \begin{cases} \frac{a_{1i}x_i^3}{3} - \frac{b_i\omega_i x_i}{2} - c_i\omega_i^2 x_i, & x_i \geq 0; \\ -\frac{a_{2i}x_i^3}{3} - \frac{b_i\omega_i x_i}{2} - c_i\omega_i^2 x_i, & x_i < 0; \end{cases}, \quad i = \overline{1,4}, \quad S_5(x) = \begin{cases} \frac{d_1}{3} \left( \sum_{j=1}^4 x_j \right)^3, & \sum_{j=1}^4 x_j \geq 0; \\ -\frac{d_2}{3} \left( \sum_{j=1}^4 x_j \right)^3, & \sum_{j=1}^4 x_j < 0; \end{cases}$$

где  $x_i$  – расход теплоносителя в  $i$ -й петле,  $i = \overline{1,4}$ ; функции  $S_i(x_i)$ ,  $i = \overline{1,4}$ , представляют собой интегралы от гидравлических характеристик участков с теплообменниками,  $S_5(x)$  – интеграл от гидравлической характеристики участка активной зоны;  $a_{1i}$ ,  $a_{2i}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  – положительные коэффициенты, величины которых зависят от гидравлических сопротивлений участков и гидравлических характеристик насосов;  $\omega_i$  – угловая скорость вращения ГЦН в  $i$ -й петле.

Расчеты проводились при следующих заданных параметрах:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_4^0 = 1,0; a_{1i} = 2; a_{2i} = -4; b_i = 3; c_i = 6; d_1 = -d_2 = 0,4.$$

Поиск минимумов 6-мерной функции  $f(x)$  был проведен в системе **PSoDI** с использованием параллельного алгоритма с обобщенной характеристикой в рамках многошаговой схемы редукции размерности на восьми ядрах (2 четырёхъядерных процессора *Intel(R) Xeon(R) CPU E5504 @ 2.0GHz.*) Были найдены следующие устойчивые состояния, совпадающие с экстремумами:

$f_{\min 1,2,3,4} = -19.14$ ;  $x_1 = -0.72$ ,  $x_2 = 1.52$ ,  $x_3 = 1.52$ ,  $x_4 = 1.52$  (остальные 3 точки – перестановка элементов вектора  $X$ );

$f_{\min 5} = -18.85$ ;  $x_1 = 1.04$ ,  $x_2 = 1.04$ ,  $x_3 = 1.04$ ,  $x_4 = 1.04$ .

На следующем рисунке представлена расчетная схема СЦТ, соответствующая установке ВВЭР-440 и содержащая 6 параллельных подключенных к реактору петель циркуляции.

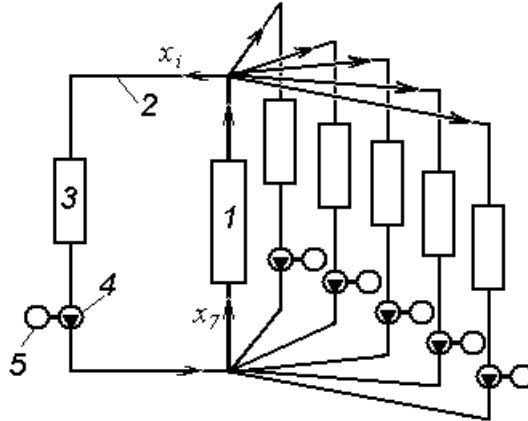


Рис. 2

Нарушение нормальной работы СЦТ недопустимо с точки зрения безопасности реактора.

Минимизируемая функция для данной схемы имеет вид [7]

$f(x) = \sum_{i=1}^6 S_i(x_i) + S_7(x)$ , здесь

$$S_i(x_i) = \begin{cases} \frac{a_{1i}x_i^3}{3} - \frac{b_i\omega_i x_i}{2} - c_i\omega_i^2 x_i, & x_i \geq 0; \\ -\frac{a_{2i}x_i^3}{3} - \frac{b_i\omega_i x_i}{2} - c_i\omega_i^2 x_i, & x_i < 0; \end{cases}, \quad i = \overline{1,6}, \quad S_7(x) = \begin{cases} \frac{d_1}{3} \left( \sum_{j=1}^6 x_j \right)^3, & \sum_{j=1}^6 x_j \geq 0; \\ -\frac{d_2}{3} \left( \sum_{j=1}^6 x_j \right)^3, & \sum_{j=1}^6 x_j < 0. \end{cases}$$

Расчеты проводились при следующих заданных параметрах:

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 1$ ;  $a_{1i} = 1.4$ ;

$a_{2i} = 4$ ;  $b_i = 4$ ;  $c_i = 6$ ;  $d_1 = d_2 = 0.03$ ;  $i = \overline{1,6}$ .

Были найдены следующие устойчивые состояния:

$f_{\min 1-6} = -84.30$ ;  $x_1 = -0.90$ ;  $x_2 = 2.93$ ;  $x_3 = 2.93$ ;  $x_4 = 2.93$ ;  $x_5 = 2.93$ ;  $x_6 = 2.93$

(остальные 5 минимумов получаются перестановкой вектора  $X$ );

$f_{\min 7} = -87.58$ .  $x_1 = 2.55$ ;  $x_2 = 2.55$ ;  $x_3 = 2.55$ ;  $x_4 = 2.55$ ;  $x_5 = 2.55$ ;  $x_6 = 2.55$ .

Глобальный минимум этой функции соответствует равносному режиму циркуляции. Наличие других режимов работы, соответствующих остальным минимумам функции  $f(x)$ , недопустимо с точки зрения безопасности работы, и задача конструктора состоит в выборе гидравлических характеристик, при которых состояние равновесия минимально и устойчиво «в целом». Проверка полученных решений, основанных на результатах работ [4], показала их правильность.

### Заключение

В настоящей работе предложен параллельный алгоритм глобального поиска, основанный на характеристической структуре решающего правила, в котором используются обобщенные характеристики квадратичного типа, и показаны примеры решений при-

кладных задач о нахождении равновесных режимов работы систем циркуляции теплоносителя ядерных энергетических установок.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00682-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант № НШ-1960.2012.9), Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное соглашение о предоставлении гранта № 14.В37.21.0878).

### **Литература**

1. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация: Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 489 с.
2. Sergeyev Ya.D., Grishagin V.A. Parallel asynchronous global search and the nested optimization scheme // *Journal of Computational Analysis & Applications*. 3(2), 2001. P. 123–145.
3. Добряев Д.Н., Гришагин В.А. Программная система конструирования и исследования характеристических методов многоэкстремальной оптимизации // *Материалы конференции «Технологии Microsoft в теории и практике программирования»*, Н.Новгород, 3-4 апреля, 2007. С. 68-71.
4. Смирнов Л.В., Данилова Н.В. Основы прикладной аналитической гидромеханики напорного течения несжимаемой жидкости: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2009. – 65 с.
5. Смирнов Л.В., Гришагин В.А., Добряев Д.Н., Данилова Н.В. Применение прикладной аналитической гидромеханики и методов принятия оптимальных решений в задаче нахождения потокораспределения в гидросистемах // *Вестник ННГУ*. 2010, №2(1). С. 144–154.
6. Добряев Д.Н., Данилова Н.В. Исследование алгоритмов глобального поиска с обобщённой характеристикой квадратичного типа // *Вестник ННГУ*. 2011, №3(2). С. 25–32.
7. Данилова Н.В., Добряев Д.Н. Применение прикладной аналитической гидромеханики и методов принятия оптимальных решений в задаче нахождения устойчивых равновесных режимов гидросистем // *Материалы X конференции ВСФПТПМ*, 24-30 августа 2011 г., г. Н.Новгород.