ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ИНДЕКСНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Т.А. Сысоева, А.В. Сысоев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Постановка задачи многомерной глобальной оптимизации

Рассмотрим многомерную задачу глобальной оптимизации:

$$\varphi(y^*) = \min\{\varphi(y): y \in D, g_j(y) \leq 0, 1 \leq j \leq m\},$$
$$D = \{y \in R^N: a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}.$$

Пусть $y(x)$, $x \in [0,1]$ есть развертка Пеано, однозначно отображающая отрезок $[0,1]$ на единичный N-мерный гиперкуб P, т.е.

$$P = \{y \in R^N: -2^{-1} \leq y_i \leq 2^{-1}, 1 \leq i \leq N\} = \{y(x): 0 \leq x \leq 1\}. \quad (1)$$

Используя отображение $y(x)$, многомерная задача может быть сведена к одномерной

$$\varphi(y(x^*)) = \min\{\varphi(y(x)): x \in [0,1], g_j(y(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m\}. \quad (2)$$

Введя области

$$q_1 = [0,1], q_{j+1} = \{x \in q_j: g_j(y(x)) \leq 0\}, 1 \leq j \leq m,$$

и положив

$$1 \leq M = \max\{v(y(x)): x \in [0,1]\} \leq m + 1,$$

получим следующее представление задачи (1)-(2):

$$g_M^* = g_M(x_M^*) = \min\{g_M(x): x \in Q_M\} = \min\{g_M(y(x)): x \in q_m\}.$$

При этом испытание в любой точке $x^k \in [0,1]$ позволяет определить пару

$$z^k = g_v\left(y(x^k)\right), v = v\left(y(x^k)\right).$$

Если $\varphi(y)$ удовлетворяет условию Липшица, то $\varphi(y(x))$ удовлетворяет равномерному условию Гельдера

$$\left|\varphi(y(x_1)) - \varphi(y(x_2))\right| \leq 4L\sqrt{N}(|x_1 - x_2|)^{1/N}. \quad (3)$$

Рассмотренная схема сведения многомерной многоэкстремальной задачи условной оптимизации к эквивалентной ей одномерной задаче позволяет применить для ее решения индексный метод [1, 2].

Улучшение работы с оценками констант Липшица в программной реализации индексного метода

В работе [3] высказано предположение относительно реализации индексного метода для многомерных задач, что оценки констант Липшица μ_v являются неубывающими. Это утверждение верно только для одномерного случая.

В многомерном случае оценки констант Липшица могут убывать, поскольку в процессе редукции размерности условие Липшица трансформируется в условие Гельдера, в котором модуль разности $|x_1 - x_2|$ входит в степени $1/N$. Нетрудно показать, что при делении интервала (x_i, x_j) новой точкой испытания x^* оценки констант Липшица для двух новых интервалов (x_i, x^*) и (x^*, x_j) могут привести к уменьшению общего максимума по всем интервалам, а, значит, и уменьшить оценку μ_v.

Была выполнена реализация индексного метода, учитывающая возможность того, что оценки констант Липшица μ_v могут уменьшаться в процессе выполнения очередной итерации. В первоначальной версии это потребовало введения схемы пересчета оценок по всем интервала. Можно предположить, что более точное оценивание констант Липшица даст улучшение в характере сходимости, то есть позволит либо уменьшить число итераций метода поиска, либо находить лучшие оценки глобального оптимума.

Проведены эксперименты на 100 функциях Гришагина для сравнения реализации, построенной на предположении из работы [3], и новой, в которой учтено возможное уменьшение оценок констант Липшица. Результаты сравнения представлены в табл. 1.

Таблица 1.

	Количество итераций		
Значение функционала	Меньше	Такое же	Больше
Лучше	10	-	8
Такое же	42	31	6
Хуже	-	-	3

Как видим, на 18 функциях (первая строка) получено лучшее значение критерия, еще на 42 функциях найдена та же оценка глобального оптимума, что и в исходной версии, но за меньшее число итераций и на 31 функции результат не изменился.

Использование очередей для оценок констант Липшица

В индексном методе оценки констант Липшица строятся для каждого функционала задачи. Необходимость пересчета оценок ведет к замедлению выполнения каждой итерации, а значит, и всего индексного метода. Для ускорения работы была применена следующая идея: лучшие оценки констант Липшица запоминаются в очередях. Число очередей равно числу функционалов. При выполнении текущей итерации из соответствующей очереди удаляется оценка для интервала, в котором поставлена точка текущего испытания, вычисляются необходимые новые оценки и добавляются в очереди, если это возможно (оценку можно добавить в очередь, если она больше наименьшей из оценок, уже имеющихся в очереди). Таким образом, полный пересчет оценки константы Липшица по всем интервалам требуется только в случае, когда очередь соответствующего функционала опустела.

Выполнена реализация индексного метода с очередями для оценок констант Липшица. В табл. 2 представлены результаты сравнения времени работы метода с очередями и без очередей на некоторых функциях Гришагина (время в секундах).

Таблица 2.

№ функции	Реализация с очередями для констант Липшица	Реализация без очередей для констант Липшица
0	0,05853	0,1939
66	25,607	32,284
69	20,6606	26,0449
73	23,3715	29,0687
98	0,0716	0,1418

Таким образом, в среднем время работы метода уменьшилось на 30%.

Литература

1. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. М.: Наука, 1978.
2. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
3. Баркалов К.А. Разработка и исследование методов ускорения сходимости алгоритмов глобальной условной оптимизации // Дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. 2006.