

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

К.А. Баркалов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Введение

На факультете ВМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского разработан эффективный подход к минимизации многоэкстремальных функций [1-5]. В рамках данного подхода решение многомерных задач сводится к решению эквивалентных им одномерных. Соответствующая редукция основана на использовании кривых Пеано (называемых также развертками Пеано), однозначно отображающих единичный отрезок вещественной оси на гиперкуб, а также их обобщений (вращаемые развертки), которые можно применять при решении задачи на многопроцессорных системах. В работе приведены результаты расчетов, выполненных при решении задачи оптимизации расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательных аппаратов. Эксперименты выполнены на вычислительном кластере ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Алгоритм глобальной оптимизации

Рассмотрим задачу глобальной оптимизации вида

$$\begin{aligned} \varphi^* = \varphi(y^*) = \min \{ \varphi(y) : y \in D, g_j(y) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}, \\ D = \{ y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N \}, \end{aligned} \quad (1)$$

где целевая функция $\varphi(y)$ (в дальнейшем обозначаемая также $g_{m+1}(y)$) и левые части ограничений $g_j(y), 1 \leq j \leq m$, удовлетворяют условию Липшица с соответствующими константами $L_j, 1 \leq j \leq m+1$, а именно

$$|g_j(y_1) - g_j(y_2)| \leq L_j |y_1 - y_2|, 1 \leq j \leq m+1, y_1, y_2 \in D.$$

Используя кривые типа развертки Пеано $y(x)$, однозначно отображающие отрезок $[0, 1]$ на N -мерный гиперкуб D

$$D = \{ y \in R^N : -2^{-1} \leq y_i \leq 2^{-1}, 1 \leq i \leq N \} = \{ y(x) : 0 \leq x \leq 1 \},$$

исходную задачу можно редуцировать к следующей одномерной задаче:

$$\varphi(y(x^*)) = \min \{ \varphi(y(x)) : x \in [0, 1], g_j(y(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}.$$

Рассматриваемая схема редукции размерности сопоставляет многомерной задаче с липшицевой минимизируемой функцией и липшицевыми ограничениями одномерную задачу, в которой соответствующие функции удовлетворяют равномерному условию Гельдера (см. [1]), т.е.

$$|g_j(y(x')) - g_j(y(x''))| \leq K_j |x' - x''|^{1/N}, x', x'' \in [0, 1], 1 \leq j \leq m+1,$$

где N есть размерность исходной многомерной задачи, а коэффициенты K_j связаны с константами Липшица L_j исходной задачи соотношениями $K_j \leq 4L_j \sqrt{N}$.

Различные варианты индексного алгоритма для решения одномерных задач и соответствующая теория сходимости представлены в работах [3, 5].

Отметим, что при решении задач безусловной глобальной оптимизации (т.е. задач без ограничений, при $m=0$) вычислительная схема индексного алгоритма глобального поиска не меняется.

Использование вращаемых разверток

Редукция многомерных задач к одномерным с помощью разверток имеет такие важные свойства, как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности разностей функций при ограниченности вариации аргумента. Однако при этом происходит потеря части информации о близости точек в многомерном пространстве, так как точка $x \in [0,1]$ имеет лишь левых и правых соседей, а соответствующая ей точка $y(x) \in R^N$ имеет соседей по 2^N направлениям. А при использовании отображений типа кривой Пеано близким в N -мерном пространстве образам y', y'' могут соответствовать достаточно далекие прообразы x', x'' на отрезке $[0,1]$. Как результат, единственной точке глобального минимума в многомерной задаче соответствует несколько (не более 2^N) локальных экстремумов в одномерной задаче, что, естественно, ухудшает свойства одномерной задачи.

Сохранить часть информации о близости точек позволяет использование множества отображений

$$Y_L(x) = \{y^1(x), \dots, y^L(x)\} \quad (2)$$

вместо применения единственной кривой Пеано $y(x)$ (см. [5]). Каждая кривая Пеано $y^i(x)$ из $Y_L(x)$ может быть получена в результате вращения оригинальной развертки вокруг начала координат. При этом найдется отображение $y^i(x)$, сопоставляющее точкам многомерного пространства y', y'' , которым при исходном отображении соответствовали достаточно далекие прообразы на отрезке $[0,1]$, более близкие прообразы x', x'' . Развертки, порождаемые в соответствии с данной схемой, будем называть вращаемыми развертками или В-развертками.

Максимальное число различных поворотов развертки, отображающей N -мерный гиперкуб на одномерный отрезок, составляет 2^N . Использование всех из них является избыточным, требуется выбрать лишь часть из всех возможных вариантов. В предложенной схеме преобразование развертки осуществляется в виде поворота на угол $\pm\pi/2$ в каждой из координатных плоскостей. Число подобных пар поворотов определяется числом координатных плоскостей пространства, которое равно $C_N^2 = N(N-1)/2$, а общее число преобразований будет равно $N(N-1)$. Учитывая исходное отображение, приходим к заключению, что данный способ позволяет строить до $N(N-1)+1$ развертки для отображения N -мерной области на соответствующие одномерные отрезки.

Параллельный алгоритм глобального поиска

Использование множества отображений $Y_L(x) = \{y^1(x), \dots, y^L(x)\}$ приводит к формированию соответствующего множества одномерных многоэкстремальных задач

$$\min \{ \varphi(y^l(x)) : x \in [0,1], g_j(y^l(x)) \leq 0, 1 \leq j \leq m \}, 1 \leq l \leq L.$$

Каждая задача из данного набора может решаться независимо, при этом любое вычисленное значение $z = g_i(y')$, $y' = y^i(x')$ функции $g_i(y)$ в i -й задаче может интерпретироваться как вычисление значения $z = g_s(y'')$, $y' = y^s(x'')$ для любой другой s -й задачи без повторных трудоемких вычислений функции $g_i(y)$.

Подобное информационное единство позволяет решать исходную задачу (1) путем параллельного решения индексным методом L задач вида (3) на наборе отрезков $[0,1]$. Каждая одномерная задача решается на отдельном процессоре. Для организации взаимодействия на каждом процессоре создается L очередей, в которые процессоры помещают информацию о выполненных итерациях. Используемая схема не содержит какого-либо единого управляющего процессора, что увеличивает надежность выполняемых вычислений. Детальное описание правил параллельного алгоритма глобальной оптимизации (обозначаемого в дальнейшем П-АГП) приведено в работе [5].

Описание решаемой задачи

В качестве примера решения практической задачи рассмотрим задачу оптимизации расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательных аппаратов (ЛА). Подробно описание проблемы приведено в [6], в настоящей работе используются уже построенная математическая модель. Дадим ее краткое описание.

Для определения высоты ЛА вблизи взлетно-посадочной полосы (ВВП) располагаются несколько радиомаяков, которые по поступившей команде излучают радиосигналы. На борту ЛА измеряются интервалы ΔT_i между приходами радиосигналов от маяков; предполагается, что указанные интервалы измеряются со случайной ошибкой δ_i . Для моделирования движения ЛА используется линейная модель

$$x_{k+1} = Ax_k + \xi_k.$$

Измерения положения ЛА также моделируются линейно

$$y_{k+1} = G_k x_k + \eta_k.$$

Здесь $x_k = [x_c^k, y_c^k, z_c^k]^T$ – вектор состояния системы (текущее положение ЛА), $y_k = [\Delta T_1^k, \Delta T_2^k, \dots, \Delta T_M^k]^T$ – вектор измерений, а ξ_k , η_k – независимые гауссовские случайные последовательности с известным математическим ожиданием ($M\xi_k = u_k$, вектор поправок к текущим координатам ЛА; $M\eta_k = 0$, систематическая ошибка измерения отсутствует) и известными положительно определенными ковариационными матрицами P и Q . Для обработки зашумленных измерений использовался фильтр Калмана [6].

Моделируется проведение 100 измерений (т.е. $k = \overline{1,100}$), при этом $k = \overline{63,100}$ соответствуют положению ЛА над ВВП. В качестве критерия оптимизации выбирается максимальная погрешность определения высоты ЛА при движении над ВВП

$$\varphi(x) = \max_{k=63,100} P_k^{3,3}(x),$$

где $P_k^{3,3}$ обозначает элемент матрицы ковариаций ошибок оценивания вектора состояния системы с индексами (3,3), т.е. минимизируется дисперсия ошибки оценивания высоты ЛА.

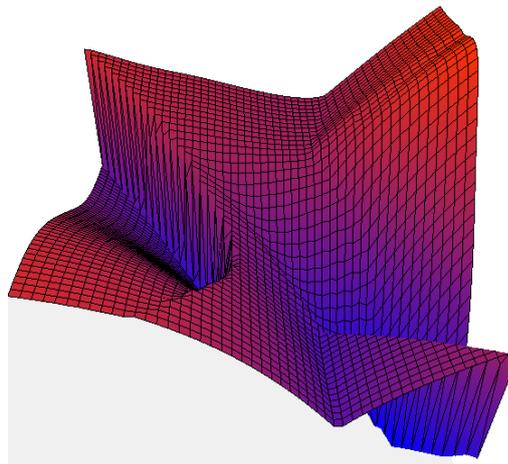


Рис. 1

Рассмотрено решение задачи расположения четырех маяков (варьируются x -координаты расположения у двух из них), пяти (варьируются x - и y -координаты расположения у двух из них) и шести маяков (варьируются x -координаты расположения четырех из них) [8]. Указанные задачи являются многоэкстремальными. На рис. 1 приведено двумерное сечение задачи о расположении пяти радиомаяков.

Автор выражает признательность С.М. Елсакову за предоставленные программные коды, реализующие вычисление целевой функции в рассматриваемых задачах.

Результаты экспериментов

В качестве исходных решений задач использовались координаты решений, найденных в [6, 8] с помощью алгоритма [7]. Следуя за автором работы, будем обозначать данный алгоритм как ОАКР (Однородный Алгоритм глобальной оптимизации с Кубическим сплайном и Расстоянием до точки испытания).

Таблица 1. Результаты, полученные ОАКР

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k
2	1.638	31.5	242.3			1000
4	0.78	148.85	78.96	155.75	94.89	1000
4	0.526	152.97	287.79	3.34	26.05	1000

Здесь N – размерность решаемой задачи, x_i – координаты полученного решения, k – число итераций метода. Сравним решения, полученные ОАКР, с решениями, полученными АГП (запускался последовательный алгоритм, плотность развертки $m=12$, число разверток $L=3$, параметр надежности $r=1.2$). В таблице приведено также время T (в секундах), затраченное на решение задачи.

Таблица 2. Результаты, полученные АГП

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k	T
2	1.638	34.42	242.43			349	0.84
4	0.723	180.72	86.48	172.42	81.01	5425	30.2
4	0.501	14.465	463.56	274.96	260.19	4509	25.7

Сравнение полученных результатов показывает, что АГП нашел более точное решение задачи, по сравнению с ОАКР, лежащее достаточно далеко от исходного.

Приведем теперь результаты работы параллельного алгоритма глобального поиска с вращаемыми развертками. В таблице дополнительно приведено число задействованных процессоров p (оно совпадает с числом разверток) и показатель ускорения S .

Таблица 3. Результаты, полученные П-АГП

N	$\varphi(x)$	x_1	x_2	x_3	x_4	k	p	T	S
2	0.4934	37.84	242.43			248	3	0.53	1,6
4	0,728	176.94	85.8	171.57	81.52	2620	12	13.1	2,3
4	0.5	14.95	479.06	274.84	259.70	1759	12	11.0	2,3

При проведении экспериментов использовался кластер ННГУ на базе Intel Xeon 3.2 GHz; размер оперативной памяти на процессор – 4 Гб, операционная система – Windows Server 2008, система управления – Microsoft HPC Server 2008.

Заключение

В работе представлены результаты решения задачи оптимизации расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательных аппаратов. Задача решена с использованием разработанной на факультете ВМК ННГУ им. Н.И. Лобачевского параллельной системы глобальной оптимизации GlobalExpert.

Работа выполнена при поддержке совета по грантам Президента Российской Федерации (грант № НШ-64729.2010.9), а также РФФИ (гранты №№ 11-01-00682-а, 11-07-97017-р_поволжье_а).

Литература

1. Стронгин Р.Г. Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.
2. Стронгин Р.Г., Баркалов К.А. О сходимости индексного алгоритма в задачах условной оптимизации с ε -резервированными решениями // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1999. С. 273 – 288.
3. Баркалов К.А., Стронгин Р.Г. Метод глобальной оптимизации с адаптивным порядком проверки ограничений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т.42, №9. С. 1338–1350.
4. Баркалов К.А. Ускорение сходимости в задачах условной глобальной оптимизации. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2005.
5. Баркалов К.А., Сидоров С.В., Рябов В.В. Параллельные вычисления в задачах многоэкстремальной оптимизации // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление, Нижний Новгород: изд-во Нижегородского гос. ун-та. 2009. №6(1), С. 171-177.
6. Антонов М.О., Елсаков С.М., Ширяев В.И. Нахождение оптимального расположения радиомаяков в разностно-дальномерной системе посадки летательного аппарата // Авиакосмическое приборостроение. 2005. №11. С.41-45.
7. Елсаков С.М., Ширяев В.И. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. №10. С. 1-14.
8. Елсаков С.М. Однородные алгоритмы многоэкстремальной оптимизации и модели липшицевых целевых функций: автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 // Челябинск, 2011.