МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЧНЫХ ИГР

А.В. Баркалов, Е.С. Гвоздева

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Матричные игры

Игрой называется математическая модель конфликтной ситуации между двумя (или более) заинтересованными сторонами – игроками. Игроки принимают решения из некоторого множества возможных решений. Это множество называют *множеством стратегий*, а выбираемые игроками решения называют *стратегиями*. Действия игроков приводят к некоторому *исходу игры*, который зависит от выбранных стратегий.

В случае конечного числа стратегий двух участников конфликта и противоположности их интересов, игра описывается матрицей (*матричная игра*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

в которой строки ($1\le i \le m$) – стратегии первого игрока, столбцы ($1\le j \le n$) – стратегии второго игрока, а элементы матрицы a_{ij} – выигрыши первого игрока (проигрыши второго) при соответствующих стратегиях.

Решением матричной игры называется *седловая точка* матрицы, т.е. пара стратегий (i^0, j^0), удовлетворяющая неравенствам

$$\left(\forall i = \overline{1,m};\ \forall j = \overline{1,n}\right)\ a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}.$$

Если в матрице есть седловая точка, то величина $\nu = a_{i^0 j^0}$ называется *ценой игры,* и говорят, что матричная игра имеет решение в чистых стратегиях [1].

В общем случае седловая точка матричной игры существует в смешанных стратегиях – распределениях вероятностей на множествах исходных (чистых) стратегий.

Пара стратегий (P^0,Q^0), где $P^0 = (p_1^0, \dots, p_m^0), Q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, называется седловой точкой смешанного расширения матричной игры, если

$$(\forall P, Q)\ \ E(P, Q^0) \le E(P^0, Q^0) \le E(P^0, Q),$$

$$E(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Итеративный метод Брауна

Одним из наиболее известных итеративных методов отыскания седловой точки в матричных играх является *метод Брауна* [2]. Сущность метода состоит в многократном фиктивном разыгрывании игры и определенном правиле выбора чистых стратегий в повторениях игры. В каждой партии игроки выбирают такие чистые стратегии, которые обеспечивают первому максимальный средний выигрыш, а второму – минимальный средний проигрыш с учетом частот выбора чистых стратегий партнером:

$$i(k+1) := Arg \max_{0 \le i \le m} \Big(E\big(i, Q(k)\big)\Big), \tag{1}$$

$$j(k+1) \coloneqq Arg \min_{0\le j\le n}\big(E(P(k),j)\big).$$

При этом справедливы верхняя и нижняя *оценки для цены игры* на шаге ***k***:

$$\begin{gathered}\max_{0\le i\le m}\Big(E\big(i,Q(k)\big)\Big) = \nu_1(k),\\ \min_{0\le j\le n}\big(E(P(k),j)\big) = \nu_2(k).\end{gathered} \qquad (2)$$

С использованием (2) в качестве приближенного значения цены игры можно принять среднее арифметическое верхней и нижней цен игры на данном шаге:

$$\nu(k) = \frac{\nu_1(k)+\nu_2(k)}{2}.$$

Смешанные стратегии игроков в методе Брауна на следующей итерации имеют вид

$$\begin{gathered}P(k+1) = (P(k)k + P_{i(k+1)})/(k+1),\\ Q(k+1) = (Q(k)k + Q_{j(k+1)})/(k+1),\\ k = 1,2,3,\ldots,\end{gathered} \qquad (3)$$

где P_i, Q_j – смешанные стратегии, соответствующие чистым стратегиям i, j из (1).

Итерации обычно прекращаются при достижении точности $\boldsymbol{\varepsilon}$, с которой найдена цена игры, т.е. при выполнении условия

$$\nu_1(k) - \nu_2(k) \le \varepsilon.$$

Выбор такого правила обусловлен тем, что в методе Брауна $\lim\limits_{k\to\infty}\nu_1(k) = \lim\limits_{k\to\infty}\nu_2(k) = \nu$, а любые предельные точки p^0 и q^0 последовательностей $\{P(k)\}$, $\{Q(k)\}$ являются оптимальными смешанными стратегиями игроков. [1].

Метод Брауна для симметричной игры

Антагонистические игры, в которых игроки равноправно участвуют в игре, называются *симметричными*.

Рассмотрим динамику изменения оценок цены игры в методе Брауна на примере 5x5 симметричной матричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 9 & -7\\ -10 & 0 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 5 & 0 & -2 & -1\\ -9 & -7 & 2 & 0 & -3\\ 7 & -3 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

сгенерированной случайным образом (рис. 1).

Проведя 2000 шагов стандартным методом Брауна, получили цену игры ν = 0,0375 с точностью ε = 0,154; за 4000 шагов – цена игры ν = 0,0115 с точностью ε =0,108.

Эксперименты показали, что метод Брауна медленно сходится к цене игры.

Модификация метода Брауна

В симметричной матричной игре оптимальные стратегии сторон совпадают и цена игры $\nu = 0$ [2]. Для таких игр в работе [3] предложена следующая модификация итеративного метода. После проведения фиксированного числа шагов (параметр метода) стандартным методом, выясняется, какая из оценок цены игры, верхняя или нижняя, ближе к цене игры.

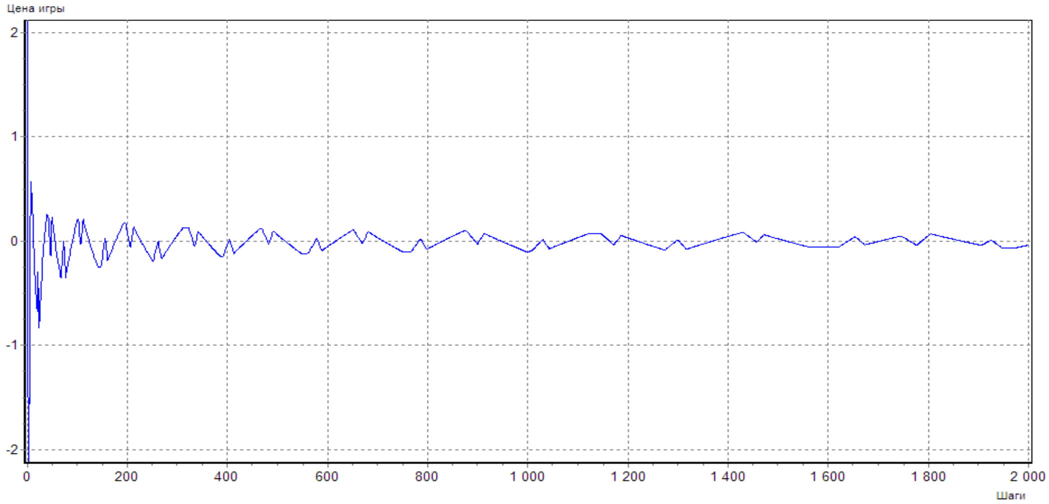

Рис. 1. Сходимость последовательности оценок цены игры по методу Брауна

- Если $|v_1(k)|< |v_2(k)|$, то стратегия первого лучше стратегии второго, и второму игроку целесообразно взять стратегию первого: $Q(k) = P(k)$;
- если $|v_1(k)|>|v_2(k)|$, то аналогично $P(k) = Q(k)$.

Момент времени, в который сравниваются оценки цены игры, назовем моментом переключения.

На рис. 2 приведены графики, иллюстрирующие работу стандартного и модифицированного методов на рассматриваемом примере (2).

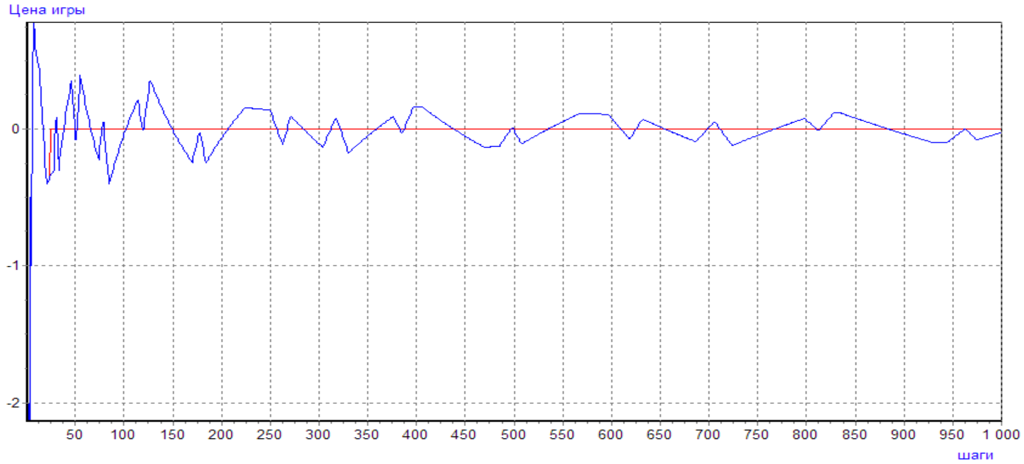

Рис. 2. График изменения оценок цены игры (1000 шагов)

- *метод Брауна*
- *модифицированный метод с параметром K = 25*

Вычисленные погрешности $\varepsilon(k) = |v_1(k) - v_2(k)|$ методов сведены в табл. 1.

Таблица 1. Погрешности методов

Метод Брауна	Количество шагов		
	1000	2000	4000
стандарт.	0,214	0,154	0,108
K = 25	0,14	0,103	0,0725
K = 32	0,15	0,105	0,075
K = 33	0,178	0,121	0,0845

Эксперименты, проведенные для различных матричных игр, показали, что модификация метода Брауна с помощью переключений дает существенное ускорение при нахождении цены игры по сравнению со стандартным методом.

Однако подобрать оптимальное значение параметра переключения метода в общем случае не удается. Из табл. 1 видно, что даже незначительное изменение параметра K может приводить к увеличению погрешности.

Чтобы избавиться от проблемы выбора значения параметра, введем динамическое правило переключения:

- если $|v_1(k+1)| <= |v_1(k)|$, то продолжаем метод Брауна;
- если $|v_1(k+1)| > |v_1(k)|$, то выполняем процедуру сравнения верхней и нижней оценок игры.

Такую модификацию назовем модификацией по верхней цене игры. Аналогично можно рассматривать модификацию по нижней цене игры, и по цене игры, проверяя неравенство $|v_1(k+1)+ v_2(k+1)| < |v_1(k)+ v_2(k)|$.

На рис. 3 и в табл. 2 приведены результаты сравнения модификаций для примера 5x5 игры (2).

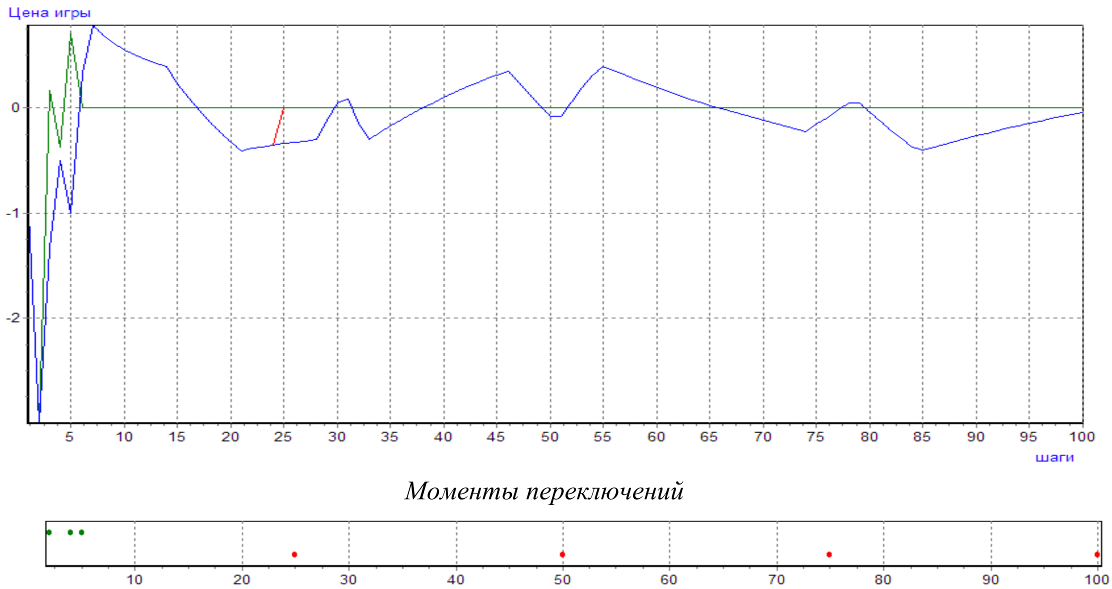

Рис. 3. График изменения оценок цены игры (100 шагов):

- *стандартный метод Брауна*
- *модификация с помощью переключений с фиксированным параметром K =25*
- *модификация с помощью динамического правила переключения по цене игры*

Таблица 2. Погрешности методов

Метод	Количество шагов					
	100	1000	2000	4000	10000	100000
Стандартный	0,64	0,214	0,154	0,108	0,0738	0,02219
модификация с параметром K =25	0,38	0,14	0,103	0,0725	0,047	0,0146
модификация по нижней цене игры	0,5	0,146	0,109	0,0725	0,047	0,0146
модификация по цене игры	0,34	0,136	0,103	0,074	0,0462	0,01466

Из рис. 3 видно, что модификация, использующая динамическое правило переключения, приводит к существенно меньшему числу переключений. Такого же типа динамика наблюдается и в других экспериментах независимо от размера матрицы. Модификации с динамическим правилом переключения обеспечивают скорость сходимости к цене игры, не уступающей скорости сходимости метода из [3].

Вычислительный эксперимент показал, что все предложенные динамические модификации дают примерно одинаковую погрешность. Однако модификация с помощью решающего правила по цене игры сходится быстрее и использует минимальное количество переключений. При этом не требуется задание значения параметра *K*, что делает данную модификацию наиболее предпочтительной.

Литература

1. Стронгин Р.Г. Исследование операций. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 2002. – 244 с.
2. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. – М.: МАКС пресс, 2005. – 272 с.
3. Saul I. Gass, Pablo M.R. Zafra. Modified fictitious play for solving matrix games and linear-programming problems. – GB: 1995. – 893-903pp.