ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОБЛАСТИ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СРЕДЕ

А.А. Колмаков

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

E-mail: flash321@mail.ru

Введение

Решение проблемы распараллеливания последовательных алгоритмов для расчетов физических задач зачастую очень трудоемко. Известные методы декомпозиции областей, например, классический метод Шварца [1] или вариации использования потоков метода Годунова [2], применимы к частным случаям, как правило, требуют существенных трудозатрат именно для этого частного случая и не всегда дают достаточную эффективность. В работе предлагается подход, облегчающий декомпозицию, который основывается лишь на одном условии. Предполагается, что скорость распространения возмущений в физической среде конечна.

Описание метода. Декомпозиция на две подобласти

Опишем метод на простом примере. Пусть имеется область D, на которой задана функция $u(x, 0)$ и система уравнений для $u(x, t)$ с граничными условиями первого рода, описывающая некоторый физический процесс во времени. Будем считать, что скорость распространения возмущений в среде ограничена константой P, то есть если поставить в точке A источник, то через время t его влияние достигнет всех точек B, расстояние до которых меньше Pt: $\rho(A, B) \leq Pt$.

Пусть имеется алгоритм численного решения заданных уравнений с дискретизацией по времени и пространству, использующий на входе значения $u(x, t\ )$ и граничные условия, а на выходе дающий решение $u(x, t + \Delta t)$. Как правило, сами уравнения не обладают свойством, описанным в предыдущем абзаце: влияние источника сразу же достигнет всех точек, однако оно быстро спадает (например, по экспоненте) и мы будем считать, что численный метод обладает этим свойством. Это предположение не искажает результатов счета: на практике ошибка нефизичного влияния источника меньше погрешности разностных схем, используемых для расчета. Важное значение имеет шаг по времени Δt, если его увеличивать, то увеличивается зона влияния источника $P\Delta t$, а в дискретном случае может расти ошибка влияния, однако при этом падает точность алгоритма.

Если использовать декомпозицию области и разбить D на подобласти D_1 и D_2, то считать их отдельно на разных процессорах не получится, так как на границе G между ними неизвестны граничные условия. На каждом временном шаге они меняются и заранее известны только для начального момента времени, в который задана u_0. Однако, если мы возьмем их с предыдущего шага, то можно считать, что на G мы поставили источники, влияние которых сосредоточено в области L, состоящей из точек x: $\rho(x, G) \leq P\Delta t$. Таким образом, зная значения u на момент t_0 можно применить последовательный алгоритм к каждой из подобластей и получить правильное решение в областях $D_1 \backslash L$ и $D_2 \backslash L$, даже не зная граничных условий на G.

Граничная подобласть

Рассмотрим теперь область $K \subset D$, такую что: $L \subset K$, $\partial K \cap \bar{L} = \emptyset$.

Область K, которую мы назовем граничной областью, включает в себя область неправильных значений, но в тоже время его граница лежит в области правильных значений. Непосредственно при расчете, с дискретными координатами, точки, по которым проходит ∂K, нужно выбирать максимально близко к G и L, то есть минимизировать $\bar{K} \setminus \bar{L}$. Это необходимо для убыстрения счета. Применив к K последовательный алгоритм, взяв $u(t\ )$ и граничные условия из области правильных значений $u(x, t + \Delta t)$, получим правильные значения для $L \subset K$ и, таким образом, для всей области D, после чего можно переходить к следующему шагу по времени.

Расчет граничной области K может производиться либо на одном из процессоров, с последующей передачей данных, либо на обоих одновременно. При большем количестве подобластей $D_1, \ldots D_n$ в двумерном и трехмерном случаях K может стать очень большой для расчета на одном процессоре. В таком случае ее можно разделить на подобласти и применить к ней тот же метод. Например, в двумерном случае при делении квадратной D на одинаковые подобласти-квадраты, K будет представлять собой решетку с узлами в углах квадратов, которую можно разделить на подобласти-кресты, для которых граничными подобластями будут небольшие прямоугольники.

Контроль ширины граничной подобласти

При реализации параллельного алгоритма основную сложность составляет выбор области K, а также оптимизация счета и обмена данных. Второй пункт – чисто технический, его реализация может несколько меняться в зависимости от конкретной задачи. Размер граничной области зависит от P, но это число заранее неизвестно и его нахождение может быть достаточно трудоемко. В то же время для алгоритмов, основанных на разностных схемах, имеется возможность проверки полученного решения на корректность, после которой можно расширить либо сузить K. Рассмотрим точку, принадлежащую ∂K. Разностная схема в ней будет затрагивать как точки из K, так и из подобластей D. Будем считать, что размер граничной области достаточен, если $\nexists\, x: x \in \partial K, x \in L$. Пусть на каком-то шаге K стала слишком мала (в том числе, возможно, что $K \subset L$) и ее требуется расширить. Для того чтобы это определить, проведем расчет граничной области и подставим в разностную схему в точках, принадлежащих ∂K, с одной стороны значения $u(x, t + \Delta t), x \in D \setminus K$, а с другой – $u(x, t + \Delta t), x \in K$ и посмотрим на ошибку. То есть, по сути, проверим, удовлетворяет ли полученное решение разностной схеме на границе K. Если ошибка близка к нулю, то решение удовлетворяет уравнениям в D, а также граничным условиям, и значит граничная область достаточно большая, в ином случае ее необходимо расширить. Для определения возможности сужения, необходимо проверить точки $x \in K$, ближайшие к ∂K.

Заключение

Описанный алгоритм протестирован на одномерном уравнении теплопроводности (линейном и нелинейном) и показал хорошие результаты: коэффициент распараллеливания превышал 80%. В том числе был проверен критерий расширения граничной полосы. В данный момент дописывается программная реализация двумерного случая, а также разрабатывается универсальная схема хранения подобластей и передачи данных для автоматического разбиения области на подобласти.

Литература

1. Barry F. Smith, Petter E. Bjørstad, William Gropp. Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations - Cambridge University Press, 2004, P. 1-18.
2. Nguen Tat Thang, Nguen The Hung. Application of a Godunov type numerical scheme and a domain decomposition technique to the parallel computation of tidal propagation. VNU Journal of Science, Earth Science 25 (2009), P. 104-115.