3. Исламов Г.Г. Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами // Изв. Ин-та математики и информатики. 1994. Вып. 2. – Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та. – С. 3–24.

4. NVIDIA CUDA Programming Guide Version 3.0. – URL: http://www.nvidia.com.

К.С. Исупов

Вятский государственный университет, г. Киров

СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ «НЕКОРРЕКТНЫХ» МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Используемые в современных CAD-системах и программных комплексах математические методы и их алгоритмически-программные решения разрабатывались для вычислительных систем с ограниченным количеством вычислительных модулей. Адаптация применяемых сегодня методов, алгоритмов и их программных реализаций для решения прикладных задач даже на 1000-ядерные вычислительные системы является весьма сложной и в ряде случаев невыполнимой задачей. В связи с этим решение ряда современных прикладных задач высокой размерности и высокой вычислительной сложности становится невозможным.

В последнее время наиболее важным становится требование максимально быстрого выполнения операций над числами, превышающими максимум типового компьютерного диапазона серийной вычислительной техники. Данные числа также принято называть *большими числами*.

Вычисления с *большими числами* являются одной из областей, в которых хорошо разработанные в настоящее время позиционные методы являются неэффективными. Важные для теории и практики математические задачи, требующие таких вычислений и больших вычислительных ресурсов, лежат в областях прикладной и вычислительной теории чисел [1]. Большинство таких задач содержат вычисления с числовыми величинами, принимающими значения из больших и сверхбольших машинных диапазонов. В настоящее время возникает широкий спектр вычислительных задач [2,3], приводящих к вычислениям, при которых значения числовых данных значительно, в $10^3 \ldots 10^6$ раз, превышают максимум типового компьютерного диапазона серийной вычислительной техники, определяемого длиной аппаратно-поддерживаемого машинного слова, равной в настоящее время 32 или 64 бита.

Ниже приведен ряд задач, часто называемых из-за их сложности вычислительными проблемами [2]:

- тестирование на простоту чисел специального и произвольного вида;
- поиск больших и сверхбольших простых чисел вида $4k+1$;
- поиск псевдопростых чисел и чисел близнецов;
- поиск цепочек простых чисел в арифметических прогрессиях;
- проверка местоположения нулей дзета-функции Римана;
- определение свойств и характера поведения чисел Мерсенна в сверхбольшом компьютерном диапазоне [1];
- обращение и нахождение определителя матриц Гильберта или асимптотически приближающихся к ним матриц;
- решение плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большого порядка.

Данный перечень не является исчерпывающим. Характерной особенностью указанных в нем задач является невозможность их решения только аналитическими или алгебраическими методами, и по этой причине находят широкое использование вычислительные методы при поиске полного или частичного решения.

В большинстве случаев при решении данных задач даже незначительные возмущения коэффициентов приводят к существенным погрешностям, делающим все решение бессмысленным. Поэтому данные задачи также принято называть *некорректно поставленными* (далее «*некорректными*»).

Решения перечисленных задач имеют большое теоретическое значение. На данный момент даже частные решения, полученные вычислительными методами, находят широкое практическое приложение [3].

Задача решения плохо обусловленных СЛАУ. Наибольший интерес из приведенного списка представляют задачи эффективного решения плохо обусловленных СЛАУ большого порядка и обращение матриц Гильберта. Рассмотрим данные задачи более подробно.

Говоря о численном решении СЛАУ, важно затронуть вопрос о точности используемых алгоритмов. Например, в широко известном математическом пакете Mathcad 12 в случае хорошо обусловленных систем точность функций, решающих СЛАУ, очень высока. Ответ обычно верен до 14–15 знака мантиссы, что близко к предельной теоретической точности численных методов на машинах с 64-битовыми числами с плавающей точкой. Однако с увеличением размеров системы точность обычно падает. Также крайне важно, насколько разнородные уравнения образуют систему. Если коэффициенты двух или нескольких уравнений близки, то при малых возмущениях в матрице коэффициентов A или векторе правых частей B произойдут большие изменения в векторе неизвестных $X = A^{-1} \cdot B$. Это означает, что численный метод будет неустойчив и, следовательно, резко повысится вероятность получения ответа, содержащего большую погрешность ξ [4].

Таким образом, возмущение коэффициентов системы линейных уравнений может не просто немного исказить ее решение, а иметь более серьезные последствия. Например, система линейных уравнений

$$\begin{cases} X + 0,99\,Y = 1,01 \\ X + 1,01\,Y = 0,99 \end{cases}$$

имеет единственное решение, но за счет изменения коэффициентов и свободных членов всего лишь на 1% можно получить как противоречивую систему, так и систему, имеющую бесконечно много решений.

Системы, содержащие практически линейно зависимые уравнения, называются *плохо обусловленными*. Количественной мерой обусловленности может являться определитель: чем он ближе к нулю, тем хуже обусловлена система. Однако есть и более объективная характеристика, называемая числом обусловленности (condition number, *CN*). Число обусловленности определяется как произведение нормы матрицы коэффициентов *A* на норму обратной ей матрицы. Чем больше число обусловленности, тем хуже обусловлена система и тем выше вероятность получения ответа со значительной погрешностью ξ.

Классической плохо обусловленной системой линейных уравнений является система, матрица коэффициентов которой является *матрицей Гильберта*. Матрица Гильберта *A* – это матрица, значение элементов которой определяется формулой согласно выражению $A_{ij}=1/(1+i+j)$, где i и j – индексы элемента.

Очевидно, что чем больше будет матрица Гильберта, тем в меньшей степени будут отличаться нижние ряды. Соответственно, тем хуже будет обусловлена матрица, а следовательно, и сама СЛАУ.

В табл. 1 приведена зависимость определителя и числа обусловленности *CN* матрицы Гильберта от ее порядка.

Таблица 1

Зависимость определителя и числа обусловленности *CN* матрицы Гильберта от ее порядка

Порядок матрицы, N	Определитель, $\lvert A(N)\rvert$	Число обусловленности, $CN(A(N))$
2	$8,3\cdot10^{-2}$	19,333
3	$4,63\cdot10^{-4}$	526,159
4	$1,653\cdot10^{-7}$	$1,561\cdot10^{4}$

С помощью пакета Mathcad 12 было произведено решение ряда плохо обусловленных СЛАУ с матрицами Гильберта в качестве коэффициентов. Результаты решения представлены в табл. 2. На основании табл. 1 был построен график зависимости определителя матрицы от ее порядка, представленный на рис. 1.

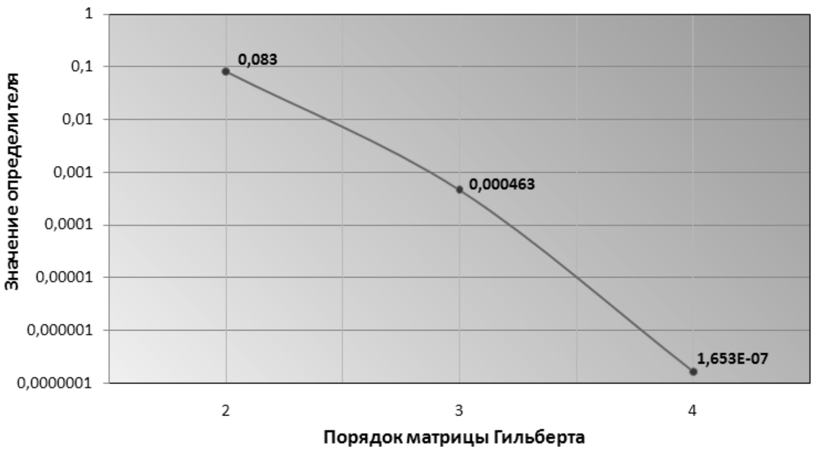

Рис. 1. График зависимости определителя матрицы Гильберта от ее порядка

Таблица 2

Зависимость погрешности ξ и числа обусловленности *CN* от порядка СЛАУ

Порядок матрицы Гильберта, N	Число обусловленности, $CN(A(N))$	Погрешность определения корней, ξ
3	$5{,}3 \cdot 10^{2}$	$2{,}5 \cdot 10^{-13}$
5	$4{,}8 \cdot 10^{5}$	$7{,}2 \cdot 10^{-11}$
7	$4{,}8 \cdot 10^{8}$	$3{,}3 \cdot 10^{-7}$
13	$5{,}7 \cdot 10^{17}$	$7{,}3 \cdot 10^{2}$

Как видно из табл. 2, с увеличением порядка матрицы происходит резкое увеличение числа обусловленности и погрешности работы численного метода пакета Mathcad 12. Погрешность ξ определения корней может составлять сотни и тысячи процентов, тем самым делая результат решения СЛАУ абсолютно бесполезным. В рассмотренном случае это наблюдается, когда порядок СЛАУ достигает 13. Задача решения плохо обусловленных СЛАУ – классическая «*некорректная»* задача.

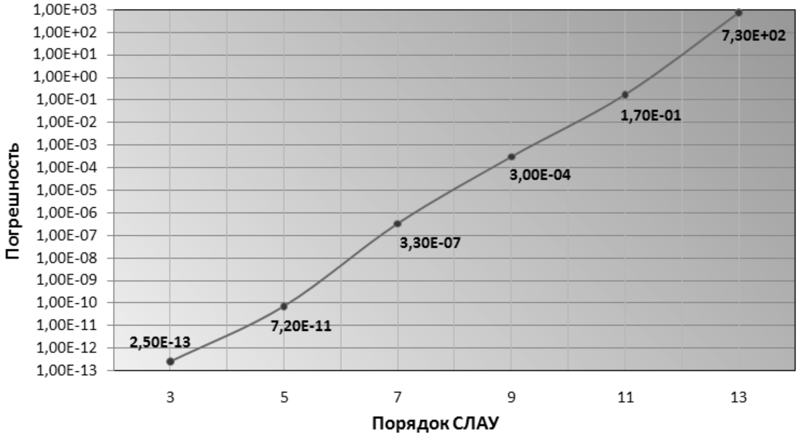

Рис. 2. Зависимость погрешности ξ определения корней СЛАУ от ее порядка

На основании табл. 2 построен график зависимости погрешности ξ определения корней от порядка матрицы Гильберта, наблюдаемой при решении соответствующей данной матрице СЛАУ. График данной зависимости представлен на рис. 2.

Анализируя представленный график можно заметить, что при незначительном увеличении порядка решаемой СЛАУ происходит экспоненциальное уменьшение определителя матрицы ее коэффициентов, а следовательно, такое же увеличение погрешности ξ определения корней (на графике представление зависимости искажено ввиду использования логарифмической шкалы). Это, в свою очередь, позволяет объяснить неэффективную работу в данной области соответствующих методов современных математических пакетов, например Mathcad 12.

Важно подчеркнуть, что матрица Гильберта не определяет однозначно класс плохо обусловленных СЛАУ, который является значительно более объемным. В общем случае, для того чтобы охарактеризовать СЛАУ как плохо обусловленную систему, достаточно асимптотического приближения матрицы ее коэффициентов к матрице Гильберта [5].

Задача обращения матрицы Гильберта. В данном контексте следует также рассмотреть задачу обращения матрицы Гильберта. Точная обратная матрица Гильберта – это матрица с очень большими целочисленными значениями. Данная задача наряду с задачей нахождения корней плохо обусловленных СЛАУ является сложно решаемой современными CAD-системами.

Например, в пакете Matlab функция invhilb(N) возвращает матрицу, обратную матрице Гильберта порядка N (N<15). Для N>15 функция invhilb(N) возвращает приближенную матрицу. Значения обратной матрицы могут быть представлены как числа с плавающей запятой без погрешности округления до тех пор, пока порядок матрицы Гильберта N не превышает 15. Далее, с увеличением порядка матрицы погрешность ξ решения задачи возрастает согласно зависимости, изображенной на рис. 2.

Современный подход к решению «некорректных» задач. Одним из перспективных направлений в решении поставленных задач является внедрение методов вычислений на основе нетрадиционных способов кодирования и соответствующих им вариантов машинной арифметики. Особую роль в развитии указанного направления играют числовые системы с параллельной структурой, и в первую очередь модулярные системы счисления, в которых целые числа представляются наборами остатков от деления на выбранные модули (основания).

Одной из самых известных таких систем является полиномиальная система классов вычетов, также известная как система остаточных классов (СОК). Здесь в отличие от обобщенной позиционной системы счисления образование цифр каждого разряда проводится независимо друг от друга.

Каждый разряд в системе остаточных классов представляет собой наименьший неотрицательный остаток от деления на соответствующее основание самого числа, а не предыдущего частного, как это имеет место в позиционной системе.

Если же касаться задач матричной алгебры, то здесь каждый массив, представленный в позиционной системе, в СОК будет представляться множеством независимых друг от друга массивов, элементы которых представляют собой наименьшие неотрицательные остатки от деления на выбранные основания соответствующих позиционных элементов.

Остаток от деления меньше делителя, поэтому если в качестве оснований СОК выбрать числа, не выходящие за пределы разрядной сетки ЭВМ, то и вычеты, взятые по этим основаниям, не будут выходить за пределы разрядной сетки. К тому же выполнение операций в полиномиальной системе практически ничем не отличается от выполнения операций в традиционных позиционных системах счисления.

Таким образом, становится возможным параллельное решение *«некорректных»* задач без потери точности.

В результате данного обзора справедливо будет сказать, что заложенные в наиболее распространенные современные математические системы позиционные методы для выполнения вычислений над полем больших чисел способны лишь частично решать поставленные перед ними задачи, т.е. выдавать корректное решение при ограниченной, как правило, небольшой размерности входных данных. С учетом богатых возможностей распределения вычислений при решении рассмотренных задач, обуславливаемых свойствами матричных операций, ставится задача разработки эффективных параллельных методов, алгоритмов и средств на их основе, обеспечивающих решение *«некорректных»* задач в более широком диапазоне представления их размерности.

Предложен метод решения рассмотренных задач, основанный на использовании в качестве базиса для расчетов мощного механизма для выполнения высокоточных параллельных вычислений системы остаточных классов.

Список литературы

1. Рибенбойм П. Рекорды простых чисел // Успехи математических наук. 1987. – Т. 42. Вып. 5, 1987. – С. 119–176.

2. Lenstra H.W., Tijdeman R.J. Computational Methods in Number Theory. –Amsterdam: Math. Cent., 1982. –198 p.

3. Инютин С.А. Модулярные вычисления в сверхбольших компьютерных диапазонах // Изв. вузов. Электроника. – 2001. – № 6. – С. 34–39.

4. Гурский Д., Турбина Е. Вычисления в MATHCAD 12. – СПб.: Питер, 2006. – 544 с.

5. Петров И.Б., Лобанов А.И. Введение в вычислительную математику. – URL: http://www.intuit.ru/department/calculate/calcmathbase.

А.В. Карзов

Запорожский национальный технический университет, Украина

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ФРАКТАЛЬНОГО СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Неотъемлемыми атрибутами современной вычислительной техники становятся программно-аппаратные средства цифровой обработки изображений. Высококачественные оцифрованные изображения в несжатом виде представляют собой огромные массивы данных, для хранения которых требуются значительные объёмы памяти ЭВМ. Для уменьшения объёмов хранимых и передаваемых данных используются различные методы их сжатия.

Алгоритм фрактального сжатия изображений является одной из наиболее перспективных альтернатив алгоритмам, использующим дискретное косинусоидальное преобразование (ДКП), таким как JPEG. В силу своих преимуществ именно фрактальное сжатие применяется в ряде узкоспециализированных задач, важнейшей из которых является передача изображений со спутников (в этом случае преимущество достигается за счет лучшего качества изображений, сжатых с коэффициентом компрессии больше 100, по сравнению с ДКП-алгоритмами). Еще одно преимущество – возможность применения к сжатым изображениям фрактального масштабирования.