[1]Р.А. Степанов, [1,2]А.В. Чупин, [1]П.Г. Фрик

[1]Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь
[2]Пермский государственный университет

ГЛОБАЛЬНАЯ ДИНАМО-ВОЛНА В ТОЛСТОМ ТОРЕ

Одним из возможных кандидатов на лабораторное получение эффекта генерации магнитного поля потоками проводящей жидкости является нестационарное динамо в тороидальном канале [2]. Порог генерации зависит от геометрии канала и свойств потока. Так, условия генерации в прямом круговом цилиндре были подробно изучены Пономаренко в 1968 году [1], а в работах, изучающих генерацию в криволинейном канале, отмечались некоторое повышение порога [3, 4] и немонотонная зависимость его от кривизны канала [3, 4].

Рассмотрим тор с конечной магнитной диффузией η, находящийся в бесконечной среде с такими же свойствами. Тор характеризуется радиусом r_c – расстоянием от оси тора z до центральной окружности и R – радиусом кругового сечения канала.

При выборе внутреннего радиуса тора R в качестве единицы длины, некоторой единицы скорости U, а диффузионного времени R^2/η в качестве единицы времени безразмерное уравнение для вектора магнитной индукции выглядит так:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{Rm}\nabla\left(\vec{V}\times\vec{B}\right) - \nabla\left(\nabla\times\vec{B}\right), \tag{1}$$

где $\mathrm{Rm} = UR/\eta$ – магнитное число Рейнольдса.

Магнитное поле должно быть соленоидальным, т.е. удовлетворять условию $\nabla\vec{B} = 0$, что создаёт значительные сложности при численном решении уравнения (1). В данной работе эта проблема обходится переходом к векторному магнитному потенциалу, определяемому формулой

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \mathrm{Rm}\vec{V}\left(\nabla \times \vec{A}\right) + \Delta\vec{A} - \nabla\nabla \times \vec{A} + \nabla\Phi \,, \qquad (3)$$

где Φ – электрический потенциал. Поскольку $\vec{A}$ определяется с точностью до произвольного потенциального векторного поля, то можно использовать калибровку $\nabla \cdot \vec{A} = \Phi$, что взаимно уничтожает последние два слагаемых в уравнении (3). Введение векторного потенциала позволяет решить также проблему разрыва поля скорости на границе тора. При решении уравнения (3) не возникает необходимости вычисления пространственных производных от поля скорости. Решение для $\vec{A}$ получается гладким, а для $\vec{B}$ – непрерывным. В качестве приближения к граничным условиям для магнитного поля на бесконечности используется условие непротекания электрического тока, которое формулируется в виде

$$A_{\perp} = 0, \ \frac{\partial A_{||}}{\partial n} = 0 \,.$$

Конфигурация поля скорости является решающим фактором для возможности динамо-эффекта. Двумерные и осесимметричные поля скорости вообще не могут поддерживать генерацию [4], поэтому в динамо-задачах скорость $\vec{v}$ проводящей жидкости обладает ненулевой спиральностью $H = \vec{v} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}$. В данной работе рассматривается кинематическая постановка задачи, когда поле скорости считается фиксированным и не возмущается магнитным полем. Такой подход оправдан для определения порога генерации, когда магнитное поле лишь формируется и по амплитуде мало́. Классическим для динамо полем скорости является винтовое поле [1], которое в случае криволинейного канала может задаваться по следующей формуле:

$$\vec{V} = \left\{ 0, \frac{U\rho\lambda}{(\lambda - \rho\cos\varphi)\sqrt{1+\chi^2}}, \frac{U\chi}{\sqrt{1+\chi^2}} \right\}, \qquad (4)$$

где $\lambda = r_c / R$ – безразмерный параметр кривизны, а χ – параметр, характеризующий степень закрученности поля скорости.

Множитель $\sqrt{1+\chi^2}$ нормирует поле скорости так, чтобы скорость на границе канала $(\rho = 1)$ была порядка U (после обезразмеривания – 1) в предельном случае малой кривизны (λ>>1). Уравнение (1) записано в координатах $\{\rho,\varphi,\zeta\}$, где $\{\rho,\varphi\}$ – полярные координаты в сечении, а ζ – линейная координата вдоль канала.

Винтовое динамо представляет собой гармоническую волну

$$\vec{B}(\rho,\varphi)\exp\left(k\zeta + (\gamma + i\omega)t\right), \tag{5}$$

бегущую вдоль канала и вращающуюся вокруг него. Динамо-волна характеризуется волновым числом вдоль канала k, инкрементом роста γ и фазовой скоростью ω / k. В нашем случае γ является функцией Rm, λ и χ; минимальное значение магнитного числа Рейнольдса, при котором будет существовать незатухающее возмущение, т.е. $\gamma \geq 0$, и называется порогом генерации Rm^*. Начальное распределение должно содержать весь спектр возмущений, поэтому в качестве начального условия можно взять случайное распределение магнитного поля, из которого со временем выделяется волна с наибольшим инкрементом роста. В качестве оценки зависимость $\mathrm{Rm}^*(\lambda)$ можно аналитически вычислить, рассматривая динамо в цилиндре с наложенными ограничениями на спектр волновых чисел (рис. 2).

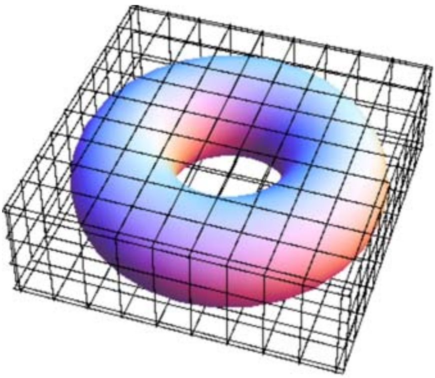


Рис. 1. Схема конечно-разностной сетки

При заданных управляющих параметрах задачи Rm, λ и χ уравнение (2) решалось численно сеточным методом. Для этого тор погружался в прямоугольную сеточную область со сторонами $L \times L \times H$ (рис.1). Размер области выбирался из тех соображений, что граница не должна оказывать влияния на полученное решение. Это достигалось выбором $L = 2(\lambda + 4)$ и $H = 8$.

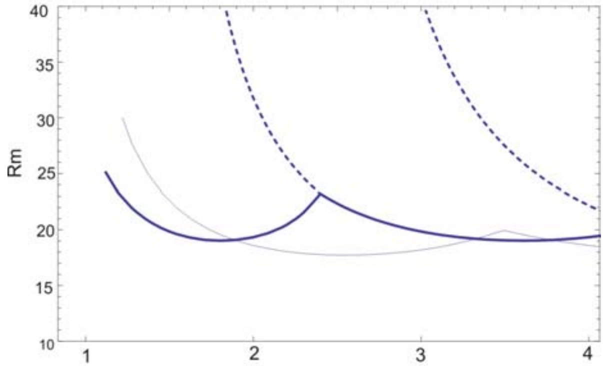
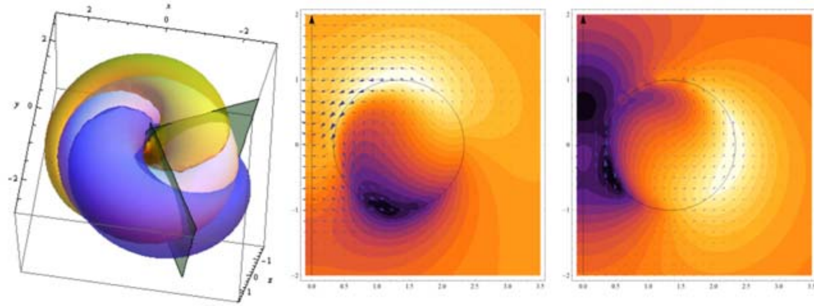


Рис. 2. Зависимость Rm*(λ) для цилиндра при χ = 1 (толстая и пунктирные линии) и χ = 1,3 (тонкая линия)

Интегрирование по времени выполнялось с использованием явной схемы Рунге-Кутта 6-го порядка с адаптивным выбором шага. Пространственные производные аппроксимированы центральными разностями 7-го порядка точности. При постановке граничных условий применялись фиктивные узлы. В расчётах использовались сетки с разрешением до $320 \times 320 \times 160$ узлов. Задача решалась на установление, т.е. до тех пор, пока из начального случайного распределения не выделится мода, амплитуда которой будет меняться по закону [5]; ожидается, что она имеет максимальное γ. В зависимости от параметров задачи расчёт длится от 10 до 20 единиц времени. Многопроцессорные вычислительные комплексы являются очень эффективным инструментом для решения задач подобного масштаба. Численная схема была адаптирована для выполнения параллельных вычислений с использованием библиотеки MPI. Тестирование алгоритма проводилось на 16-процессорном кластере Института механики сплошных сред УрО РАН, а основные расчёты были выполнены на 1664-процессорном кластере Института математики и механики УрО РАН. При запуске задачи на 32 вычислительных ядрах эффективность использования кластера составляла порядка 75 %, что соответствует ускорению в 25 раз по сравнению со временем вычисления на одном процессоре.



а *б*

Рис. 3. Пространственная конфигурация глобальной динамо-волны (*а*), изолинии магнитного поля в сечениях (*б*)

В работе [4] было показано, что в достаточно толстом торе ($\lambda < 2$) критическим является магнитное поле, имеющее одну гармоническую волну вдоль канала. Как и для динамо в цилиндре, максимум поля наблюдается на границе тора, где сдвиг скорости максимален. Однако в толстом торе появляется горизонтальное магнитное поле, не затухающее при приближении к его внешней оси и имеющее достаточно высокую напряжённость (рис. 3). Если для тонкого тора, как и для цилиндра, характерным масштабом магнитного поля является диаметр сечения, то для моды $n = 1$ в толстом торе масштаб поля становится порядка максимального геометрического размера тора ($\sim 2r_c$). Крупномасштабное поле возникает в результате того, что диаметрально противоположные части тора генерируют магнитные поля, согласованные по пространственной структуре. Отметим, что такая перемычка может наблюдаться только для $n = 1$, так как из соображений симметрии для всех прочих значений n, включая $n = 0$ (осесимметричный случай), горизонтальная компонента поля на оси должна быть равна нулю.

Данный вид динамо-волны обладает тем свойством, что её порог генерации остаётся практически постоянным при изменении кривизны тора в пределах $1<\lambda<1,8$ (рис. 4). В то время как увеличение кривизны канала от $\lambda = 3$ до $\lambda = 2$ (когда генерируется волна с $n = 2$) приводит к увеличению разницы между реальным порогом и значением, определяемым из цилиндрического приближения, дальнейшее изменение толщины тора не ухудшает генерацию – критическое магнитное число Рейнольдса, наоборот, стремится к теоретическому значению. Это можно объяснить следующим образом. В случае описанного обезразмеривания максимальный скачок скорости, который и оказывает главное влияние на эффект динамо, находится в точке поверхности канала, определяемой координатами $\varphi = \pi$, $\rho = R$. Поэтому характеристический масштаб, влияющий на генерацию, порядка $r_c - R$, что убывает при увеличении толщины тора как λ–1. Это уменьшение компенсируется множителем $(\lambda - 1)^{-1}$ в азимутальной компоненте скорости (4), необходимым для обеспечения соленоидальности поля скорости. Таким образом, порог генерации Re, зависящий от их произведения, практически постоянен.

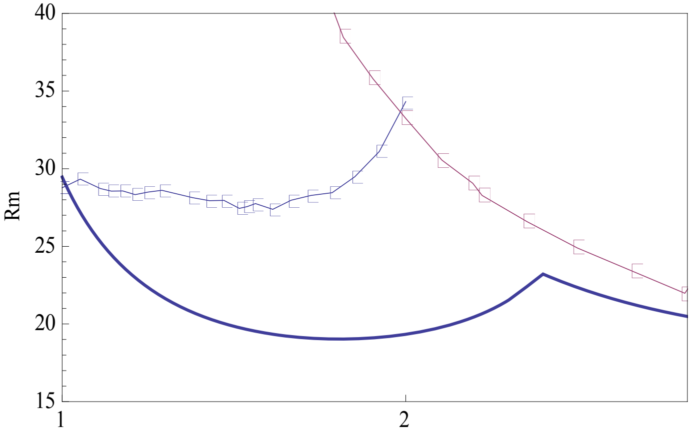


Рис. 4. Пороги итерации при χ = 1, полученные с помощью прямого численного моделирования

Заметим, однако, что это свойство зависит от выбора характерных величин, входящих в безразмерный комплекс Rm. Есть несколько вариантов выбора единицы для скорости. Кроме используемой в данной работе это могут быть: среднеквадратическая по каналу скорость, максимальный модуль вектора скорости, скорость вдоль канала. Если первый и третий вариант практически не отличаются от рассмотренного, то второй вариант обезразмеривания приводит к неограниченному росту порога генерации при приближении к λ=1, так как на внутренней кромке канала скорость соответственно растёт.

Представляет интерес зависимость порога генерации от χ, поскольку это единственный параметр, который можно менять при проведении лабораторного эксперимента. Теоретическая зависимость, полученная для цилиндра с периодическими граничными условиями, указывает на возможность снижения порога при заданной геометрии канала путём варьирования данного параметра.

Поскольку именно глобальная динамо-волна обладает более низким порогом генерации, чем магнитные поля с большим количеством волн вдоль канала для толстого тора, имеет смысл определить, в каких пределах кривизны канала она имеет место. Так, при $\chi = 1$ смена мод происходит при $\lambda \approx 2$. Эта граница зависит в первую очередь от закрученности потока χ. Численные эксперименты показывают, что χ=1 не является экстремумом данной зависимости, поэтому, изменяя этот параметр, можно добиться появления низкопороговой глобальной волны и при достаточно тонком торе.

Список литературы

1. Пономаренко Ю.Б. К теории гидродинамического динамо // ПМТФ. – 1973. – № 6. – С. 47–51.

2. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment / P. Frick [et al.] // Magnetohydrodynamics. – 2002. – Vol. 38, No. 1–2. – P. 136–155.

3. Dobler W., Frick P., Stepanov R. The screw dynamo in a time-dependent pipe flow // Physical Review E. – 2003. – Vol. 67. – 056309.

4. Степанов Р.А., Фрик П.Г., Чупин А.В. Винтовое динамо в торе // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – № 1. – С. 109–117.