

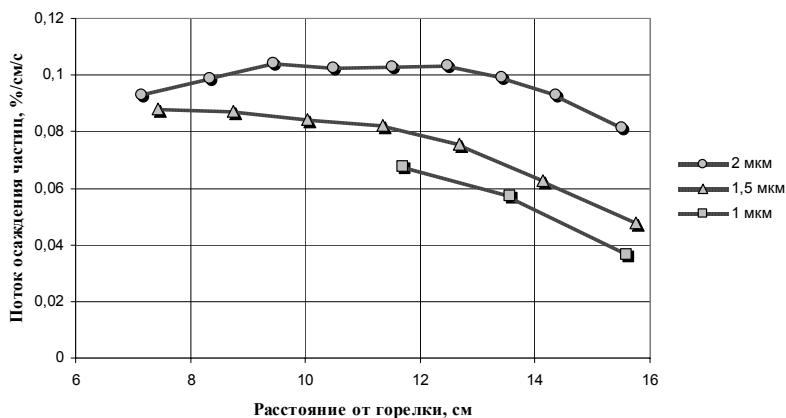


Рис. 5. Распределение частиц по длине зоны осаждения

В результате применения специально разработанной процедуры обработки картины траекторий осаждающихся частиц различных размеров определяются расходные характеристики процесса в виде погонной плотности массового потока осаждения в долях от концентрации частиц в зоне размещения инжекторов (рис. 5).

Применение этой процедуры для частиц каждого оксида, участвующего в легировании, в сочетании с интегрированием по спектру размеров частиц позволяет оценить общую толщину и покомпонентный состав осажденного на поверхности опорной трубки слоя.

**А.В. Гергель**

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

## **ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С АДАПТИВНЫМИ РЕШАЮЩИМИ ПРАВИЛАМИ**

Многоэкстремальные задачи, методы решения которых рассматриваются в данной статье, широко встречаются в приложениях. Усложнение математических моделей для более адекватного описания изучаемых объектов, явлений и систем приводит

к резкому увеличению трудоемкости анализа их математических моделей. Это повышение сложности приводит к необходимости целенаправленного выбора вариантов в процессе поиска оптимального решения и построения неравномерных покрытий области поиска, являющихся плотными только в окрестности искомого глобального оптимума [1–6]. Возможность построения неравномерных покрытий обычно обеспечивается предположением о выполнимости условия Липшица. При этом поведение функционалов задачи многоэкстремальной оптимизации часто является неоднородным в разных подобластях области поиска. В некоторых подобластях значения функционалов модели может изменяться достаточно быстро (что будет соответствовать большим значениям константы Липшица в таких подобластях), в других подобластях – например, в окрестности точек экстремумов функций – значения функционалов могут изменяться более плавно. Как результат, построение интегральных (единых) оценок характеристик оптимизируемых функций для всей области поиска может не соответствовать полностью параметрам функционалов в разных подобластях области поиска.

**Задачи многоэкстремальной оптимизации и адаптивная оценка констант Липшица.** Рассматривается одномерная безусловная задача многоэкстремальной оптимизации

$$\varphi(x^*) = \min \{ \varphi(x) : x \in [a, b] \}, \quad (1)$$

для которой минимизируемая функция  $\varphi(x)$  и ее первая производная удовлетворяют условию Липшица с константами  $L$  и  $L_1$  соответственно. Одним из способов учета разнородного поведения оптимизируемых функций в разных областях поиска состоит в построении отдельных оценок констант Липшица оптимизируемых функций для разных подобластей области поиска. Целесообразность такого направления работ достаточно очевидна – так, в окрестности точек экстремумов гладкой оптимизируемой функции значения производных должны быть близки к нулю, определяя тем самым невысокое значение константы Липшица в таких подобластях.

Проведение исследований в данном направлении были инициированы в работе [1]; предложенный в работе подход рассматривается в п. 2. В пп. 3–5 предлагаются новые способы построения отдельных оценок констант Липшица оптимизируемых функций для разных подобластей области поиска.

### **Локальная настройка оценок константы Липшица.**

Суть предложенного в [1] подхода состоит в следующем. Для построения решающих правил алгоритмов глобального поиска предлагается использовать не единую для всей области поиска оценку константы Липшица, а строить такие оценки для каждого поискового интервала в отдельности. Поскольку получение таких оценок может происходить с достаточно большими погрешностями, то при нахождении локальных (интервальных) оценок должна учитываться и общая (глобальная) оценка константы Липшица.

Приведем в соответствии с [2] точное алгоритмическое описание предлагаемого подхода.

**Вычислительная схема оценки локальных констант Липшица.** Предположим, что алгоритм глобального поиска, в котором используются оценки константы Липшица, выполнил  $k \geq 1$  итераций поиска и получена поисковая информация

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_k = b$$

(нижний индекс соответствует упорядоченному представлению точек испытаний).

Оценка константы Липшица  $M_i$  интервала  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , вычисляется в соответствии со следующими выражениями:

$$m_i = rM_i, M_i = \max \{ \mu'_i, \mu''_i, \mu_0 \}, \quad (2)$$

где

$$\mu'_i = \max \{ |z_j - z_{j-1}| / (x_j - x_{j-1}) : j = i-1, i, i+1 \}, \quad (3)$$

$$\mu''_i = M(x_i - x_{i-1}) / d \max, \quad (4)$$

$$M = \max_{1 \leq i \leq k} \frac{|z_i - z_{i-1}|}{x_i - x_{i-1}}, \quad (5)$$

$$d \max = \max_{1 \leq i \leq k} (x_i - x_{i-1}). \quad (6)$$

Когда  $i = 1$  или  $i = k$ , для вычисления  $\mu'_i$  из (3) используются только  $j = i, i+1$  или  $j = i-1, i$  соответственно.

Поясним приведенные соотношения. Величина  $M$  является оценкой глобальной константы Липшица  $L$  на всем интервале поиска  $[a, b]$ . Величины  $M_i, 1 \leq i \leq k$ , являются оценками локальных констант Липшица  $L_i$  на интервалах  $(x_{i-1}, x_i), 1 \leq i \leq k$ . Каждая такая оценка строится на основе трех величин:  $\mu'_i$ , которая отвечает за локальные свойства функции  $\varphi(x)$  на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$ ;  $\mu''_i$ , которая следит за глобальными свойствами функции  $\varphi(x)$  на всем интервале поиска  $[a, b]$ ; и параметра  $\mu_0$ . Когда интервал  $[x_{i-1}, x_i]$  велик, роль глобальной информации повышается, так как в этом случае локальная информация может быть ненадежной. Когда интервал  $[x_{i-1}, x_i]$  мал, роль глобальной информации понижается, так как в этом случае большее значение имеет локальная информация, а влияние глобальной информации ослабляется. Наличие параметра  $\mu_0$  отражает предположение о том, что функция  $\varphi(x)$  не является константой на интервале  $[a, b]$ . Параметр  $\mu_0$  также контролирует чувствительность алгоритма. В случае, когда  $L \leq \mu_0$ , алгоритм теряет чувствительность к изменениям локальной информации и функционирует как метод полного перебора.

Представленная схема локальной настройки сохраняет свойства сходимости алгоритма глобального поиска, к которому она применяется [2].

Для демонстрации эффективности рассмотренного подхода приведем результаты вычислительного эксперимента [2], в котором в качестве контрольного множества оптимизационных задач использован широко применяемый в научной литературе набор тестовых многоэкстремальных функций. При прове-

дении эксперимента использовались следующие алгоритмы: Галперина (АГ), алгоритм Пиявского (АП) и алгоритм глобального поиска Стронгина (АГП). Сравнение выполнялось двумя методами, использующими локальную настройку – это метод ломаных (МЛ-ЛН), построенный на основе метода Пиявского, алгоритм глобального поиска Стронгина с локальной настройкой (АГМ-ЛН). Алгоритм глобального поиска Стронгина с локальной настройкой в соответствии с новой предложенной аддитивной схемой свертки обозначен в таблице как АГП-ЛНА

**Результаты вычислительных экспериментов  
для одномерных методов глобальной оптимизации,  
использующих схему локальной настройки  
(МЛ-ЛН и АГП-ЛН, АГП-ЛНА)**

| Задача    | Методы глобального поиска |       |        |       |        |         |
|-----------|---------------------------|-------|--------|-------|--------|---------|
|           | АГ                        | АП    | АГП    | МЛ-ЛН | АГП-ЛН | АГП-ЛНА |
| 1         | 377                       | 149   | 127    | 37    | 35     | 29      |
| 2         | 308                       | 155   | 135    | 36    | 36     | 27      |
| 3         | 581                       | 195   | 224    | 145   | 136    | 42      |
| 4         | 923                       | 413   | 379    | 45    | 41     | 37      |
| 5         | 326                       | 151   | 126    | 46    | 45     | 31      |
| 6         | 263                       | 129   | 112    | 84    | 54     | 36      |
| 7         | 383                       | 153   | 115    | 41    | 39     | 27      |
| 8         | 530                       | 185   | 188    | 126   | 132    | 42      |
| 9         | 314                       | 119   | 125    | 44    | 42     | 33      |
| 10        | 416                       | 203   | 157    | 43    | 40     | 29      |
| 11        | 779                       | 373   | 405    | 74    | 72     | 56      |
| 12        | 746                       | 327   | 271    | 71    | 66     | 51      |
| 13        | 1829                      | 993   | 472    | 73    | 45     | 40      |
| 14        | 290                       | 145   | 108    | 43    | 50     | 27      |
| 15        | 1613                      | 629   | 471    | 62    | 63     | 40      |
| 16        | 992                       | 497   | 557    | 79    | 53     | 45      |
| 17        | 1412                      | 549   | 470    | 100   | 101    | 81      |
| 18        | 620                       | 303   | 243    | 44    | 41     | 34      |
| 19        | 302                       | 131   | 117    | 39    | 34     | 26      |
| 20        | 1412                      | 493   | 81     | 70    | 42     | 29      |
| В среднем | 720,8                     | 314,6 | 244,15 | 65,1  | 58,35  | 38,05   |

Результаты экспериментов сведены в таблицу. По каждому методу в таблице приведено количество испытаний, выполняемое алгоритмом до выполнения условия останова. В последней строке таблицы содержится среднее число испытаний по всему набору тестовых задач для каждого метода в отдельности.

Точность поиска в расчетов принималась  $\epsilon=10^{-6}(b-a)$ . Для алгоритмов Галперина и Пиявского использовалась точная оценка константы Липшица. Параметры остальных алгоритмов были равны 2 (для АГП и АГП-ЛН) и 1,1 для МЛ-ЛН. Для методов МЛ-ЛН и АГП-ЛН параметр  $\mu_0$  устанавливался равным  $10^{-6}$ .

Следует подчеркнуть, что схема локальной настройки может быть применена для построения самых разных одномерных и многомерных алгоритмов решения задач липшицевой глобальной оптимизации. Она может быть также обобщена, например, на случай задачи с целевой функцией, удовлетворяющей условию Гельдера или на случай решения задачи глобальной оптимизации с многоэкстремальными липшицевыми ограничениями [2].

**Локальная настройка с аддитивной сверткой оценок константы Липшица.** Внимательно проанализировав схему локальной настройки, можно сделать важных замечания.

**Замечание 1.** Характер зависимости (4) влияния оценки глобальной константы Липшица для интервала  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , позволяет сделать вывод, что при построении данного соотношения явно или неявно делалось предположение о квадратичном поведении оптимизируемой функции в окрестности глобального минимума. На самом деле, производная для квадратичной функции имеет вид линейной зависимости и для определения значения производной на одном интервале при известном ее значении на другом интервале необходимо разделить известное значение производной на длину интервала, на котором задано значение, и умножить на длину искомого интервала. Или аналитически – пусть минимизируемая функция имеет вид

$$\varphi(x)=ax^2.$$

Тогда производная этой функции имеет вид

$$\varphi'(x) = 2ax.$$

Оценка константы Липшица для интервалов  $(x_1=0, x_2)$  и  $(x'=0, x'')$ ,  $x'' < x_2$  имеет вид

$$M_1 = \frac{|z_2 - z_1|}{x_2 - x_1} = ax_2, \quad M' = \frac{|z'' - z'|}{x'' - x'} = ax''$$

соответственно. Но тогда оценку  $M'$  можно получить через значение оценки  $M_1$ , т.е.

$$M' = [M_1 / (x_2 - x_1)](x'' - x') = (M_1 / x_2) x'',$$

что и соответствует правилу (4), схеме локальной настройки. Отсюда следует два возможных вывода:

1) схема локальной настройки наиболее эффективно будет действовать для многоэкстремальных оптимизационных задач, в которых поведение минимизируемых функций в окрестности глобального минимума является квадратичным;

2) схема локальной настройки может быть построена и для многоэкстремальных оптимизационных задач, в которых поведение минимизируемых функций в окрестности глобального минимума не является квадратичным, заменив для этого только соотношение (4) – так, для кубического поведения функций в окрестности глобального минимума соотношение должно иметь вид

$$\mu_i'' = M(x_i - x_{i-1})^2 / (d \max)^2.$$

**Замечание 2.** Локальная (3) и глобальная (4) составляющие интервальной оценки константы Липшица могут рассматриваться как два разных противоречивых критерия при оценке некоторого компромиссного значения константы Липшица. Предпочтение одного критерия (например, локальной составляющей) приводит к более быстрому завершению работы алгоритма глобального поиска, однако здесь возможна потеря решения из-за оценки константы Липшица с недостатком. Предпочтение другого критерия (глобальной составляющей) может привести к более продолжительной работе алгоритма глобаль-

ного поиска из-за оценки константы Липшица с избытком. Как результат, для получения некоторого компромиссного (промежуточного) значения константы Липшица необходима та или иная свертка данных критериев. Так, в схеме локальной настройки данная свертка близка к широко известной минимаксной свертке критериев. Возможны и иные способы свертки.

**Локальная настройка с аддитивной сверткой оценок константы Липшица.** В предлагаемой новой схеме локальной настройки оценка интервальных оценок константы Липшица осуществляется в соответствии с аддитивной сверткой

$$m_i = rM_i, M_i = \max \{ \mu'_i + \mu''_i, \mu_0 \}, \quad (7)$$

где величины  $\mu'_i, \mu''_i, \mu_0$  определяются соотношениями (3)–(6).

Результаты вычислительных экспериментов с использованием локальной настройки с аддитивной сверткой оценок константы Липшица представлены в таблице (столбец АГП-ЛНА).

Кроме аддитивной свертки (7) разработаны еще несколько дополнительных схем построения оценок констант Липшица оптимизируемых функций для разных подобластей области поиска:

локальная настройка с интервальной схемой построения оценок константы Липшица;

локальная настройка с выделением подобластей с близкими значениями константы Липшица.

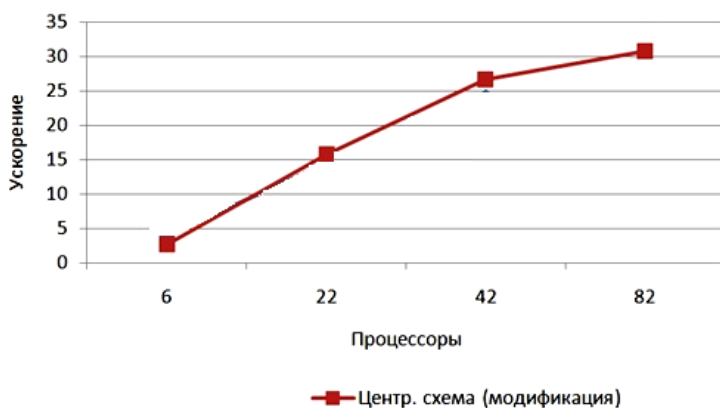


Рис. Результаты вычислительного эксперимента

Для организации параллельных вычислений использовалась централизованная схема. На рисунке представлены результаты вычислительного эксперимента параллельного метода многоэкстремальной оптимизации с адаптивными решающими правилами.

### **Список литературы**

1. Сергеев Я.Д. Одномерный детерминированный алгоритм глобального поиска // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1995. – Т. 35, № 5. – С. 705–717.
2. Сергеев Я.Д., Квасов Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. – М.: Физматлит, 2008.
3. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. – М.: Наука, 1978.
4. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global Optimization with non-convex constraints: Sequential and parallel algorithms. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
5. Городецкий С.Ю., Гришагин В.А. Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007.
6. Гергель В.П. Об одном способе учета значений производных при минимизации многоэкстремальных функций // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1996. – Т. 36, № 6. – С. 51–67.

**А.В. Гергель, Д.В. Гнатюк**

Нижегородский государственный университет им Н.И. Лобачевского

### **СРАВНЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

Сложность решения многомерных многоэкстремальных задач оптимизации обусловлена несколькими причинами. В первую очередь стоит отметить экспоненциальный рост объема вычислений при увеличении размерности (числа варьируе-