

Анализ и программная реализация модели Блэка-Литтермана для управления портфелем инвестора

И.Б. Мееров, А.С. Никонов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Введение

В настоящей работе рассматривается одна из актуальных задач финансовой математики – управление портфелем инвестора. Широко применяемая при решении данной задачи модель Марковица [1] имеет ряд недостатков. В частности, в литературе отмечается ее нестабильность, вызванная большими отклонениями результатов расчетов при небольших изменениях входных параметров [2]. Основываясь на модели Марковица, Ф. Блэк и Р. Литтерман в 90-х годах XX века разработали новую модель [3], учитывающую гипотезу рыночной эффективности и модель САРМ, которая позволяет описать взаимосвязь между риском и ожидаемой доходностью актива [8, 9, 10]. Основным плюсом модели Блэка-Литтермана является возможность учета экспертных оценок. Ведущими финансовыми учреждениями модель признается важным инструментом в процессе управления портфелем инвестора [4]. Целью данной работы являлась эффективная реализация основных этапов процесса моделирования (калибровка модели, верификация, решение оптимизационных задач) для расчета на современных многоядерных процессорах.

Модель Марковица

Рассмотрим модель Марковица [1] для решения задачи оптимизации портфеля активов. Инвестор выбирает портфель, состоящий из n рискованных активов. Выбор заключается в определении вектора весов $w = (w_1, \dots, w_n)^T$, где каждый вес w_i представляет долю актива i в портфеле, причем $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Короткие продажи запрещены, следовательно, полагаем $w_i \geq 0$. Предположим, что случайный вектор доходностей $R = (R_1, \dots, R_n)^T$ имеет математическое ожидание $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ и матрицу ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\sigma_{ij} = E((R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j))$. Тогда ожидаемая доходность портфеля $\mu_p = w^T \mu$, а $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$ – мера риска. Сформулируем оптимизационную задачу с целью максимизации ожидаемой доходности и минимизации риска, положив $s = (1, \dots, 1)^T$:

$$\begin{aligned} \min_{w \geq 0} \quad & -\mu^T w + \lambda \cdot w^T \Sigma w \\ & w^T s = 1 \end{aligned}$$

Эта модель позволяет найти компромисс между риском и доходностью, минимизируя функцию полезности, где параметром является коэффициент несклонности к риску (risk aversion) – λ . На практике для заранее выбранного рынка применяется калибровка λ на основе исторических данных [5].

Модель Блэка-Литтермана

Для более адекватной оценки средней доходности активов применяется модель Блэка-Литтермана [3]. Доходность активов оценивается в соответствии с моделью САРМ [5] и отражает уровень капитализации каждого актива:

$$\Pi = \delta \Sigma w,$$

где $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_n)^T$ – доходность, а Σ – матрица ковариаций, $\delta = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M^2}$ – премия за риск, w – рыночный портфель¹, $R_M = \mu^T w$ – доходность рыночного портфеля, σ_M^2 – его дисперсия, R_f – величина безрисковой процентной ставки. Величины μ и Σ имеют тот же смысл, что и в модели Марковица. Величина δ калибруется на основе историче-

¹ Рыночный портфель – портфель, состоящий из всех активов, доступных инвестору. При этом количество каждого из активов пропорционально его рыночной стоимости относительно суммарной рыночной стоимости всех активов портфеля.

ских данных для конкретного рынка. Истинное значение доходности предполагается неизвестным, но принимается следующая оценка [5]:

$$\begin{aligned}\Pi &= \mu + \varepsilon_{\Pi}, \varepsilon_{\Pi} \sim N(0, \tau \Sigma), \tau \ll 1 \\ \mathbf{q} &= P\mu + \varepsilon_{\mathbf{q}}, \varepsilon_{\mathbf{q}} \sim N(0, \Omega), P \in \mathbb{R}^{k \times n}, \Omega \in \mathbb{R}^{k \times k} \\ \hat{\mu}_{BL} &= \Pi + \tau \Sigma P^T [\Omega + \tau P \Sigma P^T]^{-1} [\mathbf{q} - P\Pi]\end{aligned}$$

Здесь τ – эвристический параметр, P – матрица экспертных оценок (взглядов инвестора), $\mathbf{q}$ – ожидаемая доходность, матрица Ω определяет уровень доверия к взглядам инвестора. В соответствии с введенными обозначениями строится следующая оптимизационная задача [6]:

$$\begin{aligned}\min_{w \geq 0} \quad & (-\hat{\mu}_{BL}^T w + \frac{\delta}{2} \cdot w^T \Sigma w) \\ & w^T \mathbf{e} = 1 \\ & Aw \geq b\end{aligned}$$

Матрица A и вектор b задают ограничения на структуру портфеля.

Численная оптимизация

При использовании модели Блэка-Литтермана для решения задачи управления портфелем инвестора необходимо найти минимум функционала, представляющего собой квадратичную функцию. Рассмотрим следующую постановку задачи [6]:

$$\begin{aligned}\min_{x \geq 0} \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ & Ax \geq b\end{aligned}$$

Будем использовать метод внутренней точки [6, 7] для ее решения.

Заметим, что в исходной задаче матрица Q – симметрична (матрица ковариаций). Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \text{diag}(x_1, \dots, x_n).$$

Избавимся от ограничений-неравенств за счет введения дополнительных переменных, переходя к следующей задаче:

$$\begin{aligned}\min_{x, w} \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x - \mu \sum_j \log x_j - \mu \sum_i \log w_i \\ & Ax - w = b\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию Лагранжа:

$$f(x, w, y) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x - \mu \sum_j \log x_j - \mu \sum_i \log w_i + y^T (b - Ax + w)$$

Запишем условия оптимальности первого порядка для функции Лагранжа, и сделаем замену $z = \mu X^{-1} \mathbf{e}$. После всех преобразований получим редуцированную систему Каруша-Куна-Такера (Reduced KKT System) [6, 7] для нахождения шага метода:

$$\begin{pmatrix} -(X^{-1}Z + Q) & A^T \\ A & Y^{-1}W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y - \mu X^{-1} \mathbf{e} + Qx \\ b - Ax + \mu Y^{-1} \mathbf{e} \end{pmatrix}$$

Вычислительная схема

Для выполнения эксперимента необходима историческая информация (цены закрытия и рыночная капитализация активов за выбранный промежуток времени $[0, T]$, где T – момент формирования портфеля). Эксперимент включает в себя следующие действия:

1. Выбор активов, которые следует включить в портфель. Производится исходя из опыта инвестора.
2. Вычисление средней доходности выбранных активов μ и матрицы ковариаций Σ по историческим данным на промежутке времени $[0, T]$.

3. Задание экспертных оценок и ограничений на структуру портфеля. Вычисление параметров модели Блэка-Литтермана $\hat{\mu}_{BL}$, δ .

4. Решение оптимизационной задачи для нахождения оптимального в некотором смысле портфеля.

Результатом решения задачи является вектор весов $\hat{w}$, в соответствии с которым формируется портфель.

Верификация (в данном случае оценка результатов моделирования) производится следующим образом:

1. Выбор периода $[0, T + \Delta T]$, на котором известны котировки выбранных активов и их рыночная капитализация.

2. Реализация описанной выше вычислительной схемы на интервале времени $[0, T]$.

3. Вычисление доходности рассчитанного портфеля на основе имеющейся исторической информации на интервале времени $[T, T + \Delta T]$.

4. Сравнение доходностей рыночного портфеля, рассчитанного портфеля и индекса ММВБ.

Метод Монте-Карло для повышения «надежности» выбора портфеля

Модель Блэка-Литтермана оперирует реальными историческими данными, поэтому при оценивании входной информации с неизбежностью возникают статистические ошибки. С целью уменьшения этих ошибок в отношении задачи управления портфелем инвестора используются различные техники [5]. Рассмотрим, в частности, метод Монте-Карло.

В соответствии с описанной выше вычислительной схемой определяется оптимальный в некотором смысле портфель $\hat{w}^0$. Далее применяется метод Монте-Карло:

1. Моделирование K значений ожидаемой доходности активов по многомерной функции распределения $N(0, \tau \hat{\Sigma})$, $\tau \ll 1$, и получение нового вектора усредненных доходностей $\hat{\mu}^i = \hat{\mu} + \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \sim N(0, \tau \hat{\Sigma})$, $\tau \ll 1$, $i = 1..K$.

2. Пересчет входных параметров модели Блэка-Литтермана на основе $\hat{\mu}^i$, полученного на предыдущем шаге, и $\hat{\Sigma}$.

3. Решение K оптимизационных задач с целью нахождения множества оптимальных в некотором смысле портфелей $\hat{w}^i$, $i = 1..K$.

4. Нахождение усредненного портфеля:

$$\hat{w} = \frac{1}{K+1} \sum_{i=0}^K \hat{w}^i$$

Параллельная реализация в системах с общей памятью

Программная реализация выполнена на языке C++ с использованием математической библиотеки Intel MKL 10.0 и компилятора Intel C/C++ Compiler for Windows 11.0. Использование метода Монте-Карло обусловило применение «внешней» схемы распараллеливания – решаемые оптимизационные задачи запускаются на отдельных ядрах по мере их освобождения. Эксперименты на вычислительной системе, содержащей 8 ядер (2x Intel Xeon E5520 – 4 ядра, 2,27 ГГц), показали масштабируемость, близкую к линейной.

Результаты экспериментов

Первый эксперимент проводился с использованием реальных исторических данных о котировках акций, торгуемых на ММВБ¹. Для составления портфеля были выбраны акции 10 компаний: Газпром (GAZP), Лукойл (LKOH), Сургутнефтегаз (SNGS), Норникель (GMKN), Ростелеком (RTKM), Татнефть (TATN), Роснефть (ROSN), Сбербанк (SBER), Новатэк (NOTK), Полюс Золото (PLZL). С использованием дневных котировок акций этих

¹ <http://www.finam.ru/analysis/export/default.asp>

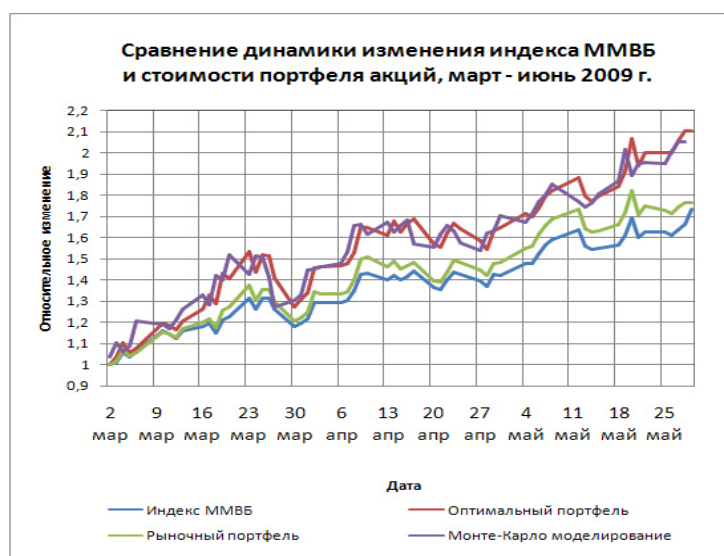
компаний и объемов торгов за период с мая 2008г. по начало марта 2009г. был проведен статистический анализ данных для определения входных параметров модели. Далее, при использовании открытой информации¹ о предполагаемом поведении цен акций в течение последующих 3 месяцев, получена входная информация для модели Блэка-Литтермана.



В результате решения оптимизационной задачи состав портфелей определен следующим образом:

	Рыночный портфель	Оптимальный портфель	Оптимальный портфель + метод Монте-Карло	Индекс ММВБ
GAZP	37,8%	12,3%	2,3%	
LKOH	16,3%	4,8%	10,2%	
SNGS	3,7%	0%	3%	
GMKN	12,7%	0%	4,1%	
RTKM	0,9%	0%	0%	
TATN	0,7%	0%	1,5%	
ROSN	7,2%	35,8%	34,8%	
SBER	18,9%	46,1%	40,1%	
NOTK	0,2%	1%	4%	
PLZL	1,6%	0%	0%	
Мера риска	0,57	0,93	0,74	
Изменение за 3 месяца	+76,7%	+110,4%	+105,1%	+75%

Как видно из таблицы, оптимальный портфель обгоняет рыночный портфель и индекс ММВБ. Процедура Монте-Карло моделирования улучшает диверсификацию портфеля, тем самым снижая его риск. Динамика изменения индекса ММВБ и стоимости портфелей представлена на следующем графике:

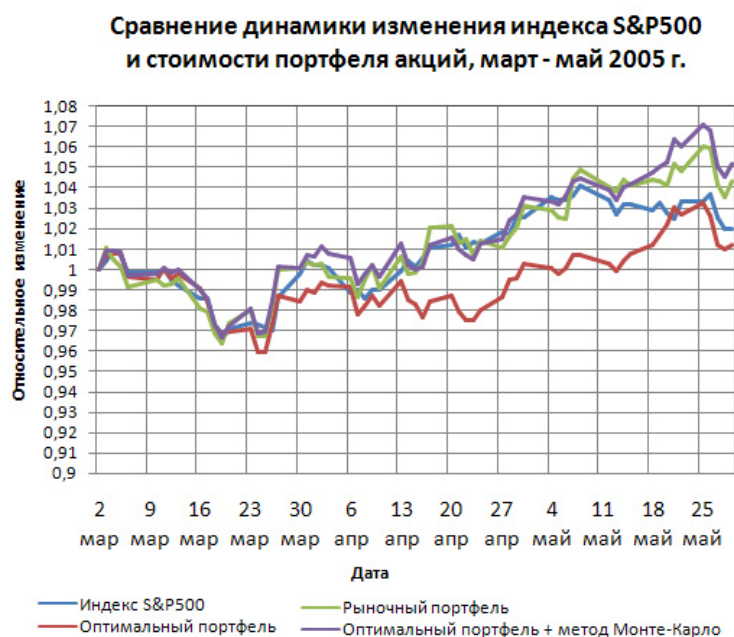


¹ <http://consensus.rbc.ru/shares>

Проведем аналогичный эксперимент на рынке, где отсутствует ярко выраженный растущий тренд. Для этого рассмотрим период времени с 1 июня 2004 г. по 1 июня 2005 года и будем формировать портфель из активов, торгуемых на фондовой бирже NYSE. Поместим в портфель акции следующих компаний¹: Exxon Mobil (XOM), Citigroup (C), Pfizer (PFE), General Electric (GE), American Int'l Group (AIG), Wal-Mart Stores (WMT), International Business Machines (IBM), Johnson & Johnson (JNJ), Goldman Sachs Group (GS), Texas Instruments (TXN). Будем формировать оптимальный портфель на основе анализа исторических данных в интервале с 1 июня 2004 г. по 1 марта 2005 г. На интервале с 1 марта 2005 г. по 1 июня 2005 г. оценим доходность сформированного портфеля и сравним ее с доходностью от возможного вложения средств в индекс S&P500.

	Рыночный портфель	Оптимальный портфель	Оптимальный портфель + метод Монте-Карло	Индекс S&P500
GE	14,5%	6,7%	4,5%	
XOM	13,3%	10,8%	8,5%	
C	11,7%	8,5%	5,8%	
PFG	25,9%	4,8%	3%	
AIG	0,5%	2,3%	5,8%	
WMT	9,6%	14,7%	19,2%	
IBM	4,8%	12,2%	14,6%	
JNJ	5,4%	12,4%	10,8%	
GS	3,1%	22,4%	21,6%	
TXN	11,2%	5,2%	6,2%	
Мера риска	0,74	0,58	0,42	
Изменение за 3 месяца	+4,2%	+3,3%	+5,1%	+2%

Как и в предыдущем эксперименте, мы наблюдаем снижение меры риска портфеля, полученного с помощью процедуры Монте-Карло моделирования по сравнению с оптимальным портфелем. Также, даже в отсутствие выраженного тренда, оптимальный портфель показывает лучшую доходность, чем рынок в целом, представленный индексом S&P500. Динамика изменения доходностей различных портфелей приведена ниже:



¹ <http://finance.yahoo.com/>

Выводы

Разработанное программное обеспечение решает задачу квадратичного программирования для определения оптимального портфеля на основе имеющейся исторической информации и экспертных оценок о дальнейшем поведении рынка. Результаты полученных экспериментов не исключают возможности применения программы в практических целях. Использование Монте-Карло моделирования позволяет нивелировать статистические погрешности при обработке входной информации, а также снизить меру риска портфеля за счет лучшей диверсификации. При этом существенно повышается трудоемкость расчетов, но эффективная программная реализация для архитектур с общей памятью позволяет получить близкое к линейному ускорение времени выполнения в зависимости от количества доступных вычислительных устройств.

Литература

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection // *Journal of Finance* 7, no. 1, March 1952, pp. 77-91.
2. Black F. and Litterman R. Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium // *Goldman, Sachs & Co., Fixed Income Research*, September 1990.
3. Black F. and Litterman R. Global Portfolio Optimization // *Financial Analysts Journal*, September 1992, pp. 28-43.
4. Mankert C. The Black-Litterman Model // *Royal Institute of Technology, Sweden*, 2007.
5. Fabozzi F. J., Kolm P. N., Pachamanova D. A., Focardi S. M. Robust Portfolio Optimization and Management // *John Wiley & Sons, Inc.*, 2007.
6. Vanderbei R. J. Linear Programming: Foundation and Extension // *Princeton University*, 2001.
7. Haws J. C. and Meyer C. D. Preconditioning KKT Systems // *Numerical Linear Algebra with Applications* J, 2001.
8. Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market // *Econometrica* 34, no. 4, October 1966, pp. 768-783.
9. Linter J. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolio and Capital Budgets // *Review of economics and Statistics* 47, February 1965, pp. 13-37.
10. Campbell J.Y., Lettau M., Malkiel B.G., Xu Y. Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk // *Journal of Finance* 56, no. 1, February 2001, pp. 1-43.
11. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации // *Киев: Вища школа*, 1983. – 512 с.
12. Ковалев М.М. Современная финансовая теория и финансовое образование // *Сборник научных статей под общей редакцией Ковалева М.М.*, Минск: БГУ, 2003. – 359с.