

Распараллеливание методов решения уравнения Пуассона

А.В. Евсеев, Ф.Н. Ясинский

Ивановский государственный энергетический университет

Решение уравнения Пуассона, представляющего собой эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, не является тривиальной задачей. В то же время это уравнение является одним из краеугольных камней электростатики, где оно используется для расчета электростатических полей. Уравнение Пуассона также играет важную роль в аэрогидродинамических расчетах полей давления и потенциала скорости, в задачах магнитостатики. Существует несколько различных способов решения уравнения Пуассона, обладающих различной скоростью работы и получаемой точностью. Скорость работы алгоритма является одним из важных факторов при решении, поскольку во многих задачах до 90% машинного времени тратится на интегрирование уравнения Пуассона.

Целью настоящего исследования является изучение существующих методов численных решения уравнения Пуассона, сравнение их характеристик и эффективности, а также анализ возможностей получения их параллельных реализаций.

В работе рассматриваются два вида методов решения: итерационные и быстрые алгоритмы. Были исследованы следующие итерационные алгоритмы: метод верхней релаксации, попеременно-треугольный метод, метод Ричардсона и метод Дугласа-Писмана-Рекфорда. Необходимо отметить, что последние два метода являются эволюционными с переменным набором шагов, но используют различные схемы (явную и переменных направлений), что влияет на их характеристики. Были сравнены скорости сходимости, точность, эффективность, устойчивость методов. Из быстрых алгоритмов был рассмотрен наиболее быстрый метод FACR. Эти алгоритмы предполагают быстрое решение уравнения Пуассона, но накладывают дополнительные ограничения на решаемую область. Метод FACR основан на алгоритме циклической редукции и алгоритме Быстрого Преобразования Фурье (БПФ). Распараллеливание осуществлялось на многопроцессорной вычислительной системе МВС-100 с интерфейсом параллельного программирования Router, а также с использованием интерфейса программирования MPI.

Поскольку все указанные методы численного решения уравнения Пуассона основаны на методе сеток, то естественным было использование геометрического параллелизма при разбиении области решения между процессорами в качестве основы при построении параллельных алгоритмов методов. С учётом специфики решения уравнения Пуассона, выражающимся в необходимости указания граничных условий, при геометрическом параллелизме одна общая задача сводится к подобной задаче более мелкого масштаба, назначаемой каждому процессору.

В результате проведённых исследований были получены параллельные версии указанных методов. Получить параллельные схемы для методов верхней релаксации и Ричардсона было достаточно легко, поскольку их базовый алгоритм имеет последовательный пробег по всем узлам сетки в одном направлении. При построении параллельных алгоритмов методов Дугласа-Писмана-Рекфорда и FACR была встречена трудность, связанная с тем, что в этих алгоритмах используется прогонка в направлениях, не согласующихся с разбиением задачи по процессорам. Это выражается в существенных задержках при выполнении данной части алгоритма. В связи с этим был разработан оригинальный способ, основанный на конвейерном параллелизме для минимизации задержек в работе алгоритма прогонки в направлении перпендикулярном направлению разбиения задачи на области.