

Оценка минимального сечения взвешенного графа

Н.И. Дубровин, А.Ю. Тухтамирзаев

Владимирский государственный университет
ndubrovin@rambler.ru, a.t.yu@mail.ru

Введение

Эффективное моделирование коммуникационной сети, состоящей из большого числа узлов возможно лишь при использовании технологий параллельных вычислений на достаточно мощных кластерах. При работе кластера каждому из параллельных процессов поручается обрабатывать свою совокупность узлов моделируемой сети. Узким местом в организации такого моделирования является сетевой интерфейс, объединяющий отдельные узлы кластера в единую вычислительную систему. Поэтому для того, чтобы обеспечить эффективную работу симулятора требуется распределить узлы моделируемой сети по моделирующим MPI-процессам таким образом, чтобы средняя величина суммарного трафика между узлами моделируемой сети, обрабатываемыми разными MPI-процессами была как можно меньше. Математическим эквивалентом такой задачи является классическая проблема оптимальной декомпозиции взвешенного графа, вершинами которого являются узлы моделируемой сети, а весами рёбер – средний трафик между парами узлов в единицу времени. При этом оптимальной декомпозицией будет такая, для которой суммарный вес связей, по которым прошло сечение, будет минимальным. В дальнейшем для простоты изложения будем считать, что декомпозицию требуется осуществить на две доли, состоящие из равного количества вершин. Сразу же заметим, что полный перебор всех разбиений неосуществим из-за экспоненциального роста объема вычислений. Имеется большое число алгоритмов частичного решения этой задачи, в которых вместо глобального минимума предлагается найти локальный минимум относительно каких-либо преобразований разбиения множества узлов. Примеры таких алгоритмов можно найти в [3] и [4]. Существуют также генетические алгоритмы решения этой задачи (см. [1]). Основное требование, предъявляемое к алгоритмам такого сорта, – хорошая масштабируемость, т.е. не более чем линейный рост объема вычислений. В данной работе решается более скромная задача об оценке (а не отыскании) минимального значения суммарного веса связей сечения.

Постановка задачи

Рассмотрим сеть G , количество узлов которой четно и равно $2n$. Узлы обозначим натуральными числами: $V = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$. Некоторые из узлов соединены связями. Для каждой связи указано положительное число – нагрузка. Нам будет удобнее задать нагрузку как функцию $w: V \times V \rightarrow R^{\geq 0}$ и при этом считать, что

- $w_{ij} = 0$ тогда и только тогда когда узлы i и j не соединены связью;
- $w_{ii} = 0$ для любого узла i ;
- $w_{ij} = w_{ji}$ для любых узлов i и j .

Предположим, что мы случайным образом разбили множество узлов на две равные доли V^+ и V^- , т.е.

$$V^+ \cup V^- = V, \quad V^+ \cap V^- = \emptyset, \quad |V^+| = |V^-| = n \quad (1)$$

Это разбиение задается функцией $\text{sgn}: V \rightarrow \{\pm 1\}$. Считаем, что

$$\text{sgn}(i) = 1 \Leftrightarrow i \in V^+ \text{ и } \text{sgn}(i) = -1 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} i \in V^-.$$

Из соотношений (1) следует, что $\sum_{i \in V} \text{sgn } i = 0$. Разбиению $V = V^+ \cup V^-$ сопоставим суммарную нагрузку по следующему правилу:

$$W(V^+) = \sum_{i \in V^+, j \in V^-} w_{ij} = \sum_{i \in V^+, j \in V^-} w_{ji} = \frac{1}{4} \sum_{i, j \in V} (1 - \text{sgn } i \cdot \text{sgn } j) w_{ij} \quad (2)$$

Третье равенство следует из симметричности функции w .

Рассмотрим множество E , состоящее из всевозможных сечений сети G , как пространство элементарных исходов. Определим на этом пространстве случайную величину $W : E \rightarrow R^{\geq 0}$ – суммарную нагрузку сечения. Пусть $G_{\min}$, $G_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значения этой случайной величины. Если наудачу взять сечение $\beta \in E$, то в идеальном (и практически неосуществимом случае) может оказаться, что $W(\beta) = G_{\min}$. Тогда поставленная выше задача решена. Однако здесь мало «угадать» сечение β , но надо знать наперед этот $G_{\min}$.

Более скромный сценарий таков: мы знаем $G_{\min}$ и за счет случайного выбора сечения β добиваемся того, чтобы разность $W(\beta) - G_{\min}$ была бы меньше чем заданная конкретной ситуацией погрешность. Окончательная постановка задачи, решаемой в данной работе следующая: в предположении, что случайная величина W распределена на отрезке $[G_{\min}, G_{\max}]$ по степенному закону, оценить величину $G_{\min}$ исходя из набора случайных сечений $\beta_1, \dots, \beta_k$ и их нагрузок $w_1, \dots, w_k$.

Итак, за основу берется предположение: оценка $G_{\min}$ должна происходить с привлечением некоторой дополнительной информации общего характера; в противном случае задача просто не имеет удовлетворительного решения. Её источником может быть, например: априорная информация, полученная в результате предыдущих наблюдений; итог анализа выборочного распределения весов, по некоторой выборке разбиений. Её происхождение в данной статье не обсуждается, считается, что она просто есть. Пусть эта информация заключается, например, в том, что значения веса разбиения распределены по степенному закону. Но заметим, что вычисления, проделанные в данной работе для степенного распределения аналогичным образом осуществимы и для других популярных распределений.

Степенной закон распределения

Рассмотрим абстрактную случайную величину X , распределенную на отрезке $[a, b]$ по степенному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{m(x-a)^{m-1}}{(b-a)^m}, \quad x \in [a, b].$$

Здесь m – натуральное число. Формулы для начальных моментов этой случайной величины таковы:

$$v_p = \int_a^b x^p \cdot f(x) dx = \sum_{j=0}^p C_p^j a^{p-j} \int_a^b (x-a)^j f(x) dx = m \sum_{j=0}^p C_p^j \frac{a^{p-j} (b-a)^j}{m+j}$$

Тогда математическое ожидание имеет вид:

$$M = v_1 = m \left(\frac{a}{m} + \frac{b-a}{m+1} \right) = \frac{mb+a}{m+1},$$

а дисперсия находится по формуле:

$$D = v_2 - v_1^2 = \frac{m}{(m+1)^2(m+2)} (b-a)^2.$$

Решим задачу вычисления концов отрезка a и b по заданным M и D . Это приводит к линейной системе 2×2 :

$$\begin{cases} \frac{mb+a}{m+1} = M \\ \frac{b-a}{m+1} = \sqrt{\frac{m+2}{m}} D \end{cases}$$

Складывая первое уравнение со вторым, находим b , а вычитая из первого уравнения второе, умноженное на m , получаем a :

$$a = M - \sqrt{m(m+2)}D, \quad b = M + \sqrt{\frac{m+2}{m}}D \quad (3)$$

Приведем окончательные формулы для левого конца отрезка при малых значениях m :

$$m=1 \rightarrow a = M - \sqrt{3D}, \quad m=2 \rightarrow a = M - 2\sqrt{2D}, \quad m=3 \rightarrow a = M - \sqrt{15D}.$$

Сделаем другое предположение – случайная величина X распределена по степенному закону на отрезке $[a, b]$ с убывающей плотностью

$$f(x) = \frac{m(b-x)^{m-1}}{(b-a)^m}, \quad x \in [a, b].$$

В этом случае вычисления аналогичны. А именно, математическое ожидание будет равно $(b+ma)/(m+1)$, а дисперсия будет такой же, как и в предыдущем случае (что следует из симметрии возрастающего и убывающего степенных законов распределения относительно точки $(a+b)/2$). Это дает нам возможность написать формулы аналогичные (3):

$$a = M - \sqrt{\frac{m+2}{m}}D, \quad b = M + \sqrt{m(m+2)}D \quad (4)$$

Нумерация сечений сети

Фиксируем натуральное число n . Рассмотрим множество L , в состав которого входят все строки $(d_1, \dots, d_n)$ с натуральными компонентами, идущими в возрастающем порядке (т.е. $d_1 < d_2 < \dots < d_n$), и с дополнительным условием $d_n \leq 2n$. Понятно, что это множество L биективно отображается на множество всех подмножеств множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$, состоящих из n элементов. На этом множестве введем лексикографический порядок, считая что $(d_1, \dots, d_n) < (d'_1, \dots, d'_n)$, если найдется такой номер j , что $d_j < d'_j$ и $d_t = d'_t$ при всех возможных $t > j$.

Таким образом, для решения поставленной в этом параграфе задачи, достаточно указать оператор-алгоритм $\tilde{S}$, который по всякой строке $\omega \in L$, кроме последней $(n+1, \dots, 2n)$, строил бы следующую строку в смысле порядка $\prec \bullet$. Сначала опишем такой алгоритм на естественном языке. Пусть $\omega = (d_1, \dots, d_n)$. Найдем наименьший индекс i такой, что d_i отличается от d_{i+1} более чем на единицу. Тогда результат будет следующий

$$\tilde{S}(\omega) = (1, 2, \dots, i-1, d_i+1, d_{i+1}, \dots, d_n).$$

Если же такого индекса нет, то обязательно $d_n < 2n$, ибо $\omega \neq (n+1, \dots, 2n)$. В этом случае результат операции таков: $\tilde{S}(\omega) = (1, \dots, n-1, d_n+1)$.

Из определения алгоритма $\tilde{S}$ вытекает, что $\omega \prec \tilde{S}(\omega)$ для всех допустимых строк ω . Кроме того, не существует строки $\tau \in L$ с условием $\omega \prec \tau \prec \tilde{S}(\omega)$. Действительно, предположим, что такая строка $\tau = (d'_1, \dots, d'_n)$ найдется. Пусть выполнено условие первой альтернативы (т.е. индекс i как и выше существует). Тогда $d'_j = d_i$ при всех $j > i$. Далее $d_i \leq d'_i \leq d_i + 1$. Если $d'_i = d_i + 1$, то получаем противоречие с неравенством $\tau \prec \tilde{S}(\omega)$, ибо начало $(1, 2, \dots, i-1)$ строки $\tilde{S}(\omega)$ есть наименьшее из возможных. Если же $d'_i = d_i$, то найдется индекс $\tau < i$ такой, что $d_\tau < d'_\tau < d'_{\tau+1} = d_{\tau+1}$, так как $\omega \prec \tau$. Но тогда $d'_{\tau+1} - d'_\tau > 1$, что противоречит минимальности индекса i . Аналогично разбирается случай реализации второго «если».

Из доказанных выше двух свойств оператора $\tilde{S}$ вытекает, что его итерации, примененные к наименьшему элементу $(1, 2, \dots, n) \in L$, исчерпывают все множество L . Иными словами, $L = \{\tilde{S}^j(1, 2, \dots, n) \mid j = 0, 1, 2, \dots, C_{2n}^n - 1\}$ есть перечисление элементов множества L .

Выводы (алгоритм действий)

Выделяем подсеть G^* сети G , состоящую из относительно небольшого числа узлов $2n^*$. Методом, изложенным в предыдущем параграфе, осуществляя полный перебор всех сечений подсети G^* , строим распределение случайной величины W для проверки гипотезы степенного распределения. Таких подсетей надо выделить не одну, а несколько, и, если в большинстве случаев гипотеза о степенном распределении подтвердится, то есть основание считать, что степенное распределение случайной величины W с тем же самым показателем m для всей сети G имеет место.

После подтверждения гипотезы, строим наудачу k сечений $\beta_1, \dots, \beta_k$ и для них считаем нагрузки $w_1, \dots, w_k$. По известным точечным оценкам, находим M и D (см., например, [2]). Далее по формулам (3) или (4) оцениваем $G_{\min}$ (с заменой a на $G_{\min}$ в этих формулах). Если минимальное из β_i -ых отличается от $G_{\min}$ не более чем на допустимую величину, то задача решена.

Литература

1. Методические указания по проведению лабораторных работ «Задачи декомпозиции графов» по курсу «Эволюционно-генетические алгоритмы решения оптимизационных задач» для студентов факультета ВМК специальности «Прикладная информатика» / сост.: Д.И.Батищев, Н.В. Старостин. – Н.Новгород.: ННГУ, 2001. – 13 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1977. – 480 с.
3. Шепель А.И. Исследование алгоритмов разбиения графов [Электронный ресурс] / А. И. Шепель // Реферат выпускной работы магистра / ДонНТУ, 2006 <http://www.masters.donntu.edu.ua/2006/fvti/shepel/diss/index.htm>
4. Wu, C. A New k-Graph Partition Algorithm for Distributed P2P Simulation Systems / C. Wu, S. Zhou, L. Wei, J. Luo, Y. Wang, X. Yang // Proceedings of the International Conference on Algorithms and Architectures for Parallel Processing (ICA3PP'07), volume 4494 of Lecture Notes in Computer Science. – Берлин.: Springer, 2007. – С. 391 – 402. – ISBN 978-3-540-72904-4.