

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**
Программа повышение конкурентоспособности ННГУ им. Н.И. Лобачевского
Стратегическая инициатива 7 «Достижение лидирующих позиций в области
суперкомпьютерных технологий и высокопроизводительных вычислений»

«Статистически оптимальное оценивание и управление»

Пособие предназначено для студентов V-го курса радиофизического факультета ННГУ им. Н.И. Лобачевского, обучающихся по специальности 010801 «Радиофизика и электроника», специализация «Статистическая радиофизика».

Раздел: Системы статистически оптимального оценивания и высокопроизводительные алгоритмы их реализации

Лекция № 1. Алгоритмы определения апостериорной плотности вероятности сообщения. Уравнение Стратоновича

Введение. Общая постановка задач оценивания и управления. Вектор состояния процесса («сообщения») и его модель

В настоящее время в научно-технических приложениях имеются две актуальные задачи, которые решаются с использованием методов теории статистически оптимальных систем оценивания и управления.

Задача оценивания заключается в аппроксимации эволюции наблюдаемого стохастического процесса по результатам обработки измерений его выходных переменных. Тогда как, задача управления состоит в определении входных воздействий на процесс с целью желаемого его развития. Эти задачи близки как по физическому смыслу (при управлении используются результаты оценивания состояния стохастического процесса), так и общности математических методов их решения. Для линейных динамических систем задачи статистически оптимального оценивания и управления строго – дуальны.

Следует подчеркнуть, что объектами приложения теории статистически оптимального оценивания и управления могут быть процессы, имеющие самую различную природу, что и определяет востребованность методов этой теории в самых различных областях радиофизики (радиолокации, радиосвязи, радионавигации), механики (отслеживание траектории движения космических аппаратов, систем автоматического управления

полетом самолетов, экранопланов, ракет и т.п.), экономики (анализ и прогнозирование поведения цен на бирже акций и валют).

В общем виде задачи статистически оптимального оценивания и управления формализуются при следующих предположениях.

1. Исследуемый объект (источник сигнала, процесса, сообщения) моделируется векторным стохастическим дифференциальным уравнением в форме Коши. В случае непрерывного времени оно имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), U(t), \xi(t), t) \quad (1)$$

где

$X(t)$ - вектор состояния объекта или вектор сообщения,

$U(t)$ - вектор управления,

$\xi(t)$ - вектор случайного воздействия на объект,

t - непрерывное время.

2. Сообщение наблюдается системой измерения, модель которой представляет собой вектор-функцию от полезного сигнала $S_0(X, t)$ и шума $\zeta(t)$

$$Y(t) = H(S_0(X(t), t), \zeta(t), t). \quad (2)$$

3. Априори заданы: вид функций правых частей уравнений (1), (2), начальные условия уравнения (1), вероятностные меры (плотности вероятностей) возмущений $\xi(t)$, $\zeta(t)$, критерии качества оценивания J_x и управления J_u .

Тогда, при сделанных предположениях задача статистически оптимального оценивания формулируется следующим образом. Необходимо синтезировать алгоритм обработки наблюдаемой реализации сигнала системы измерений (Y_0^t), зарегистрированной на интервале времени $[0, t]$, позволяющий получить оптимальную (в смысле заданного критерия J_x) оценку вектора сообщения $X(t)$ в некоторый момент времени t_1 . Эту оценку, зависящую от длительности интервала наблюдения t и момента времени t_1 мы будем обозначать $\hat{X}(t_1/t)$. Оценивание вектора сообщения называется фильтрацией, если $t_1 = t$; прогнозированием (экстраполяцией), если $t_1 > t$; интерполяцией (сглаживанием), если $t_1 < t$.

Задачу статистически оптимального управления можно сформулировать как определение метода нахождения внешнего воздействия на объект (функции) $U(t)$, позволяющего в условиях зашумленности измерений вектора состояния $X(t)$ и случайных возмущений, действующих на объект управления, получить решение уравнения (1), имеющее статистические характеристики, оптимальные в смысле заданного критерия J_u .

Естественно, что такая постановка задач оценивания и управления является очень общей и для получения результатов, имеющих практическую ценность, требуется конкретизация моделей исследуемого объекта и системы наблюдения (измерения) его состояния (сообщения). С некоторыми из этих моделей, которые являются базовыми при решении прикладных научно-технических задач, мы познакомимся в дальнейшем. При этом в данном пособии основной акцент будет сделан на задачи оптимальной фильтрации сигналов, как наиболее близкие к радиофизической тематике.

В ходе изложения последующего материала мы не будем делать различия в обозначениях скалярных, векторных и матричных величин, в необходимых случаях оговаривая их математический смысл. Все матрицы и вектора, используемые в вычислениях, полагаются согласованными по размерностям. Надстрочный знак ‘ T ’ обозначает операцию транспонирования, обозначение $\text{inv}(\cdot)$ - обращение содержащегося в скобках матричного выражения, $(\cdot)'_x$ - символ частной производной по переменной X , угловые скобки $\langle \cdot \rangle$ - усреднение по статистическому ансамблю.

С целью упрощения записи формул переменные функций, определенные ранее, могут опускаться и круглые скобки отсутствовать. Полагается также, что все начальные условия для используемых дифференциальных и разностных уравнений считаются корректно заданными, а интегрирование подынтегральной функции выполняется по всей области определения ее переменных, если области интегрирования не заданы явно.

1. Наблюдаемость динамического процесса. Абсолютно точное оценивание

Прежде чем перейти к изложению методов статистически оптимального наблюдения стохастического процесса рассмотрим задачу абсолютно точного оценивания его вектора состояния $X(t)$. По определению, процесс (1) называется полностью наблюдаемым, если абсолютно точное измерение сигнала (2) на сколь угодно малом промежутке времени, содержащем момент t , позволяет абсолютно точно определить вектор состояния $X(t)$ [2]. Более строго понятие полной наблюдаемости определяется ниже.

Предположим, что возмущения наблюдаемого объекта и шумы в системе измерений отсутствуют, то есть в уравнениях (1), (2) $V(t) \equiv 0$, $W(t) \equiv 0$. Для нахождения $X(t)$ продифференцируем по времени функцию измерений $Y(t)$ $n - 1$ раз, где n – размерность вектора состояния $X(t)$, заменяя каждый раз $\frac{dX(t)}{dt}$ на $f(X(t), U(t), t)$. Полагается, что априори заданные функции $Y(t)$, $f(t)$, $U(t)$ такое дифференцирование допускают. В результате получим следующую систему алгебраических уравнений в момент времени t :

$$H(X) = Y(t),$$

$$DH(X) = \frac{dY(t)}{dt},$$

...

(1.1)

$$D^{(n-1)}H(X) = \frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}},$$

где $DY = Y'_x f + Y'_U \frac{dU}{dt} + Y'_t$ оператор полной производной по времени.

Если полученная система в общем случае нелинейных уравнений имеет единственное решение относительно $X(t)$, то процесс (1) с применением системы измерений (2) будет полностью наблюдаемым и вектор состояния процесса оценивается абсолютно точно.

Если при решении системы нелинейных уравнений (1.1) используются методы линеаризации, то очевидно, что **локальное достаточное** условие наблюдаемости процесса (1) заключается в равенстве ранга блочной матрицы размерности вектора состояния $X(t)$:

$$\text{rank} \left\{ \left[H'_x \right]^T \left[(DH)'_x \right]^T \dots \left[(D^{n-1}H)'_x \right]^T \right\} = n. \quad (1.2)$$

Условие (1.2) гарантирует единственность решения системы (1.1) в окрестности точки $X(t)$, но не гарантирует наличие (отсутствие) других решений в области определения переменной $X(t)$.

Для наиболее важного с точки зрения практических приложений случая, когда модель изменения исследуемого процесса описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и система измерений (наблюдения) также является линейной:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU,$$

$$Y = HX, \quad A, B, H = \text{const},$$

условие локальной наблюдаемости (1.2) вектора состояния $X(t)$ примет вид

$$\text{rank} \left\{ H^T \ A^T H^T \dots \left(A^T \right)^{n-1} H^T \right\} = n. \quad (1.3)$$

И это условие будет достаточным условием для полной наблюдаемости линейного процесса $X(t)$.

Следует подчеркнуть, что рассмотренный случай абсолютно точного оценивания вектора состояния системы указывает на принципиальную возможность оценивания всех компонент вектора состояния $X(t)$ по результатам измерений (наблюдения) сигнала $Y(t)$, имеющего меньшую размерность и содержащего лишь отдельные компоненты этого вектора. На практике возможен даже случай, когда сигнал измерения $Y(t)$ является

скалярной величиной (например, может содержать лишь одну компоненту вектора состояния).

Однако, если даже условия локальной или полной наблюдаемости (1.2), (1.3) выполняются, «детерминистские» соотношения (1.1) не находят широкого практического применения для нахождения вектора состояния $X(t)$ по двум причинам. Во-первых, с точки зрения высокой сложности вычислительной процедуры (в каждый момент времени приходится решать нелинейную в общем случае систему уравнений высокого порядка), и, во-вторых, из-за наличия шумов измерений, которые принципиально присутствуют во всех измерительных системах и значительно увеличиваются при многократном дифференцировании наблюдаемого сигнала $Y(t)$ в правой части уравнения (1.1).

Поэтому при решении прикладных задач, связанных с оптимальным оцениванием состояния различных динамических объектов и процессов, применяются методы статистически оптимального оценивания, учитывающие наличие помех в измерительной системе и позволяющие получить оптимальные алгоритмы обработки сигналов как в аналоговой, так и в цифровой форме. Однако следует отметить, что применение этих методов позволяет получать оценки вектора состояния с высокой точностью, только при условии выполнения сформулированных выше «детерминистских» требований полной наблюдаемости исследуемого процесса.

2. Статистически оптимальное оценивание и его критерии. Условная (апостериорная) плотность вероятности сообщения. Байесовские оценки.

Поскольку вектор состояния системы (исследуемый процесс) $X(t)$ и наблюдаемый процесс на выходе системы измерения $Y(t)$ носят стохастический характер, то оценивание вектора состояния всегда выполняется с некоторой ошибкой. При условии, что наблюдения сигнала $Y(t)$ проводились на интервале времени $[0, t]$, ошибка оценивания $\tilde{X}(t_1)$ представляет собой разницу между оценкой вектора состояния в момент времени t_1 и его истинным значением в этот же момент времени:

$$\tilde{X}(t_1) = \hat{X}(t_1 | t) - X(t_1).$$

Для того чтобы охарактеризовать точность оценивания вводят понятие функции стоимости или функции потерь (штрафов), которая представляет собой скалярную функцию от вектора ошибки $\tilde{X}(t_1)$. Исходя из практических соображений, эта функция должна обладать следующими свойствами: быть симметричной $C(\tilde{X}) = C(-\tilde{X})$, принимать нулевое значение при нулевом векторе ошибки $C(0) = 0$ и не убывать при увеличении вектора ошибки. Физически это означает, что чем дальше ошибка оценивания находится от нулевой точки начала координат евклидова пространства, тем больше она

штрафуется, единственное значение ошибки, которое не имеет штрафа это нулевой вектор.

Функции стоимости, обладающие указанными свойствами, образуют некоторый класс допустимых функций. Типичными примерами таких функций являются:

$$C_1 = a|\tilde{X}|^{2p},$$

$$C_2 = a(1 - \exp(-b|\tilde{X}|^2)),$$

$$C_3 = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{X}| < c, \\ d, & \text{если } |\tilde{X}| > c, \end{cases}$$

где скалярные величины $a, b, c, d > 0$ определяют конкретные штрафы.

Отметим, что функция стоимости $C_1(\tilde{X}(t))$ при $a = p = 1$ представляет собой след (Sp) матрицы ($\tilde{X}\tilde{X}^T$) и называется квадратичной функцией потерь

$$C_k = Sp(\tilde{X}\tilde{X}^T) \quad (2.0)$$

Выбор конкретной функции потерь осуществляется конструктором оптимального фильтра, исходя из практических требований к системе оптимального оценивания, а часто и эвристических соображений. После выбора функции стоимости проектируемая система оценивания будет уже строго оптимальной в смысле выбранного критерия (то есть, понятие оптимальности «вообще» не имеет смысла).

Поскольку ошибка оценивания \tilde{X} является случайным вектором, то значения скалярной функции потерь являются случайной величиной. Поэтому в качестве меры качества (точности) оценивания используют среднее значение функции потерь по статистическому ансамблю вектора состояния X и наблюдаемых реализаций Y_0^t . При этом статистическое усреднение следует проводить по совместной плотности вероятности вектора состояний и наблюдаемых реализаций $P(X, Y_0^t)$:

$$J_1 = \int C \cdot P(X, Y_0^t) dXdY. \quad (2.1)$$

Функционал (2.1) называется безусловным риском.

Используя правило умножения вероятностей $P(X(t), Y_0^t) = P(Y_0^t)P(X(t) | Y_0^t)$ безусловный риск можно представить в виде следующего выражения:

$$J_1 = \int J_2 P(Y_0^t) dY_0^t, \quad (2.1')$$

где

$$J_2 = \int C \cdot P(X(t) | Y_0^t) dX. \quad (2.2)$$

Здесь $P(Y_0^t)$ – безусловная плотность вероятности наблюдаемых реализаций системы измерений $Y(t)$, $P(X | Y_0^t)$ условная или **апостериорная** плотность вероятности сообщения

X при условии, что на отрезке времени $[0, t]$ получена реализация Y_0^t . Функционал (2.2) принято называть условным риском.

Поскольку функционал (2.1) всегда положителен, то для его минимизации достаточно минимизировать функционал (2.2) для каждой наблюдаемой реализации Y_0^t . Таким образом, оптимальное правило обработки сигнала $Y(t)$ для каждой фиксированной реализации Y_0^t приводит к оптимальному правилу (минимизации безусловного риска J_1) для всего ансамбля измерений. Оценка вектора состояния X , найденная по критерию минимума условного риска J_2 или (что эквивалентно) безусловного риска J_1 называется байесовской.

Таким образом, апостериорная плотность вероятности $P(X | Y_0^t)$ содержит всю информацию о векторе состояния, которую можно получить на основании наблюдаемой реализации Y_0^t , и позволяет в принципе найти его оптимальную оценку для любой из допустимых функций потерь. Другими словами, общую задачу оптимальной обработки сигналов можно определить как задачу нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния для известной наблюдаемой реализации.

Для определения этой апостериорной плотности воспользуемся формулой Байеса, которая следует из известного правила представления совместной плотности вероятностей:

$$P(X, Y) = P(X)P(Y | X) = P(Y)P(X | Y). \quad (2.3)$$

Из выражения (2.3) получим, что формула Байеса для апостериорной плотности вероятности вектора состояния имеет вид

$$W(X, t) = P(X | Y_0^t) = \frac{P(X)P(Y_0^t | X)}{P(Y_0^t)}, \quad (2.4)$$

где $P(X)$ – безусловная плотность вероятности вектора состояния,

$P(Y_0^t)$ – безусловная плотность вероятности наблюдаемых реализации,

$P(Y_0^t | X)$ – условная плотность (функция правдоподобия) наблюдаемой реализации при фиксированном (известном) векторе состояния.

Формула Байеса (2.4) играет фундаментальную роль в теории статистического оптимального оценивания и является базовой для получения разнообразных прикладных алгоритмов обработки сигналов.

Следует отметить и другой фундаментальный результат, который следует из общей постановки задачи байесовского оценивания состояния системы. Используем в функционале (2.2) квадратичную функцию потерь (2.0). В этом случае необходимое условие экстремума функционала условного риска имеет вид:

$$(J_k)_{\hat{X}} = \int_{-\infty}^{+\infty} Sp((\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T)_{\hat{X}} W(X, t) dX = 0.$$

Здесь операция дифференцирования по вектору оценки \hat{X} внесена под знак интеграла, поскольку интегрирование ведется по вектору состояния X . Выполнив операции матричного дифференцирования функции стоимости (2.0) (см. Приложение А) можно получить следующее выражение для оптимальной в среднеквадратичном смысле оценки вектора состояния

$$\hat{X} = \int XW(X, t) dX. \quad (2.6)$$

Таким образом, оптимальная оценка вектора состояния \hat{X} по квадратичному критерию (2.0) является условным средним вектора состояния X по его апостериорной плотности вероятности $W(X, t)$.

Можно строго доказать (см. например, Дж.Медич, 1973) что, если апостериорная плотность вероятности вектора состояния $W(X, t)$ симметрична относительно его среднего (в частности, это справедливо для гауссовского распределения), то условное среднее вектора состояния (2.6) будет его оптимальной оценкой для любых допустимых функций потерь $C(\tilde{X})$.

3. Алгоритмы определения апостериорной плотности вероятности. Уравнение Стратоновича

При решении прикладных задач оптимальной фильтрации удобно иметь алгоритмы, позволяющие получать оценки вектора сообщения по мере поступления сигналов выхода системы измерения на вход оптимального фильтра. В настоящее время такие алгоритмы получены для моделей сообщений и их измерений, в которых зашумленность указанных систем задается аддитивными гауссовыми белыми процессами. В этом случае уравнения (1), (2) в непрерывном времени примут такой вид:

$$\frac{dX}{dt} = f(X(t), U(t), t) + G(X(t), t)V(t) \quad (3.1)$$

$$Y(t) = S_0(X, t) + w(t), \quad (3.2)$$

В дальнейшем без потери общности будем полагать, что белые шумы $V(t)$, $w(t)$ имеют нулевые ансамблевые средние и симметричные положительно определенные матрицы интенсивностей $Q(t)$ и $R(t)$ соответственно. Отметим также, что матрица интенсивностей шума правой части уравнения (3.1) $G(X(t), t) \cdot V(t)$ равна:

$$Q^*(t) = GQG^T \quad (3.3)$$

Аналогичные уравнениям (3.1), (3.2) уравнения модели сообщения и измерений в дискретном времени запишем в следующем виде

$$X(i+1) = f_d(X(i), U(i), i) + G_d(X(i), i)V_d(i), \quad (3.4)$$

$$Y(i+1) = S_0(X(i+1), i+1) + w_d(i+1). \quad (3.5)$$

Здесь шумы $V_d(i)$, $w_d(i+1)$ представляют собой нормальные белые дискретные последовательности с нулевыми средними и корреляционными матрицами $Q_d(i)$ $R_d(i+1)$ соответственно, а корреляционная матрица шума $G_d V_d(i)$ аналогично (3.3) будет равна:

$$Q_d^* = G_d Q_d G_d^T \quad (3.6)$$

В дальнейшем мы будем полагать, что шумы моделей процесса и его наблюдения некоррелированы, т.е. статистически независимы.

Отметим также следующие особенности дискретной модели объекта наблюдения (3.4) и измерений (3.5):

1. Сигнал измерения вектора сообщения $X(i)$ фиксируется в $(i+1)$ момент времени, то есть первое измерение вектора выполняется на втором шаге интегрирования уравнения (3.4). Соответственно корреляционные матрицы дискретных шумов объекта и измерений сдвинуты на один такт в рекуррентной процедуре (3.4), (3.5).

2. Стохастический процесс (3.4) – марковский, поскольку при известных (фиксированных) переменных функции $f_d(X(i), U(i), i)$ вектор $X(i+1)$ представляет собой нормальную белую последовательность с вектором среднего $\langle X \rangle = f_d$ и корреляционной матрицей $P = Q_d^*$ (3.6). Условная плотность вероятности переходов $P(X(i+1) | X(i))$ имеет вид экспоненты:

$$P(X(i+1) | X(i)) = C \exp(F(X, \langle X \rangle, P_x)), \quad (3.7)$$

где

$$F(X, \langle X \rangle, P) = -\frac{1}{2}(X - \langle X \rangle)^T P_x^{-1}(X - \langle X \rangle) \quad (3.8)$$

показатель гауссовой плотности вероятности случайного вектора X , имеющей ансамблевые средние $\langle X \rangle$, корреляционную матрицу P и нормировочный множитель:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi |P_x|}} \quad (3.9)$$

Обозначениями (3.7)-(3.9) мы будем пользоваться в дальнейшем.

3. Условная плотность вероятности (3.7) не зависит от реализации сигнала, полученной в предыдущих измерениях на момент времени i (обозначим ее через Y^i), поскольку при известном значении $X(i)$ измерения Y^i неинформативны.

4. Вектор измерений $Y(i+1)$ при фиксированном значении вектора сообщения $X(i+1)$ представляет собой нормальную белую последовательность и также не зависит от предыдущих измерений Y^i .

Показатель нормальной плотности вероятности этой последовательности (3.8) будет таким:

$$F(Y(i+1), S_d(i+1), R_d(i+1)). \quad (3.10)$$

Указанные особенности марковости модели системы «сообщение - его измерение» будут использованы далее при выводе рекуррентного алгоритма вычисления апостериорной плотности вероятности сообщения.

Предположим, что по результатам обработки реализации сигнала на момент времени i получена функция апостериорной плотности вероятности $W(i)=P(X(i) | Y^i)$. Выполним следующий замер сигнала, то есть увеличим реализацию Y^i на одно значение $Y(i+1)$. Поставим задачу определить апостериорную плотность вероятности $W(i+1)$ в момент времени $i+1$.

Для этого распишем $W(i+1)=P(X(i+1) | Y^{i+1})$ по формуле Байеса (2.4):

$$W(i+1) = C \cdot P(X(i+1) | Y^i) \cdot P(Y(i+1) | X(i+1), Y^i) \quad (3.11)$$

Сомножитель $P_1=P(X(i+1) | Y^i)$ представляет собой плотность вероятности прогноза вектора сообщения на шаг вперед при условии, что в предыдущие моменты времени зарегистрирована реализация сигнала Y^i . Эту плотность вероятности можно определить путем интегрирования по $X(i)$ совместной плотности вероятности векторов сообщений в соседние моменты времени:

$$P_1 = \int P(X(i), X(i+1) | Y^i) dX(i)$$

В свою очередь, совместная плотность вероятности $P(X(i), X(i+1) | Y^i)$ по правилу умножения (2.3) равна:

$$P = W(i)P(X(i+1) | X(i), Y^i).$$

Здесь апостериорная плотность вероятности $W(i)$ по условию определена ранее, а второй сомножитель $P(X(i+1) | X(i), Y^i)$ представляет собой плотность вероятности переходов вектора сообщения и, как отмечено выше, не зависит от реализации сигнала Y^i . Условная плотность вероятности $P(X(i+1)|X(i))$ нормальна с показателем распределения (3.8).

Сомножитель $P(Y(i+1) | X(i+1), Y^i)$ в формуле (3.11) представляет собой функцию правдоподобия сигнала в $i+1$ момент времени при фиксированном (известном) значении вектора сообщения в этот момент времени. Эта функция также не зависит от предыдущих Y^i измерений и имеет гауссову форму с показателем распределения (3.10). Сомножитель C представляет собой коэффициент нормировки плотности вероятности $W(i+1)$.

В итоге рекуррентный алгоритм определения апостериорной плотности вероятности вектора сообщения в дискретном времени примет следующий вид интегрально – разностной процедуры:

$$P(X(i+1) | Y^i) = \int W(i)P(X(i+1) | X(i))dX(i),$$

$$W(i+1) = C \cdot P(X(i+1) | Y^i) \cdot P(Y(i+1) | X(i+1)), \quad (3.12)$$

при начальных условиях $W(0), X(0)$.

На базе полученного рекуррентного алгоритма (3.12) можно определить его аналог и в непрерывном времени.

Для этого сначала найдем интегральное уравнение для априорной плотности вероятности сообщения $X(k)$. Оно следует из уравнений (3.12), если предположить, что начиная с k -го момента времени измерения вектора состояния X не производятся. То есть для всех $i \geq k$ измеряемый сигнал достоверно равен нулю. В этом случае условная и безусловная вероятности сигнала равны единице, т.е. $C=1, P(Y(i+1)=0 | X(i+1))=1$. Тогда из уравнений (3.12) следует, что

$$W(i+1) = P(i+1),$$

$$P(i+1) = \int P(i) * P(X(i+1) | X(i))dX(i). \quad (3.13)$$

$$P(i) = W(k-1),$$

где $W(k-1)$ апостериорная плотность вероятности сообщения $X(k-1)$, если до момента времени $k-1$ его измерения проводились.

Как известно (см., например, А.Н.Малахов, 1968), дифференциальным аналогом уравнения (3.13) является кинетическое уравнение, которое во втором приближение есть уравнение Эйнштейна-Фокера-Планка (ЭФП):

$$\frac{dP(t)}{dt} = L(P(t)), \quad (3.14)$$

где $L(\cdot)$ – оператор уравнения ЭФП. Его вид определяется правой частью уравнения модели стохастического процесса (3.1). Начальные условия уравнения (3.14) полагаются заданными $P(t_0)=P_0$.

Если в качестве начального условия уравнения (3.14) принять апостериорную плотность вероятности, полученную на момент времени дискретного i (или на момент непрерывного времени t), то из (3.14) следует, что прогноз апостериорной плотности вероятности на малый шаг вперед Δt приближенно равен:

$$W(i+1 | i) = W(i) + \Delta t \cdot L(W(i)) = P(X(i+1) | Y^i). \quad (3.15)$$

Известно, что интенсивность белого непрерывного шума системы измерений (3.2) $R(t)$ связана с корреляционной матрицей дискретного шума $R_d(i+1)$ соотношением:

$$R_d(i+1) = \frac{R(t)}{\Delta t}. \quad (3.16)$$

То есть при малых шагах дискретизации Δt экспонента функции правдоподобия алгоритма (3.12) приближенно равна:

$$e^{F(S_0, R_d)} = 1 - \Delta t \cdot F(S_0(i+1), R(t)) \quad (3.17)$$

Подставляя (3.15), (3.17) в уравнения (3.12) и учитывая малость Δt , т.е. пренебрегая слагаемыми, содержащие множитель Δt выше второго порядка, имеем следующее приближенное уравнение для апостериорной плотности вероятности в непрерывном времени:

$$W(t + \Delta t) = C \cdot [W(t) - \Delta t \cdot W(t) \cdot F(S_0(t), R(t)) + L(W(t))]. \quad (3.18)$$

Далее определим коэффициент нормировки C из условия $\int W(x, t) dx = 1$. Из последнего тождества следует, что $\int L(W) dX = 0$. Учитывая это и проинтегрировав уравнение (3.18) по всем возможным векторам сообщения X следует, что коэффициент C при малых Δt приближенно равен $C \approx 1 + \Delta t \cdot \langle F \rangle$, где

$$\langle F \rangle = \int F(Y(t), S_0(X(t)), R(t)) \cdot W(t) dX. \quad (3.19)$$

Окончательно, с учетом полученных результатов уравнение (3.18) при $\Delta t \rightarrow 0$ можно записать в непрерывном времени в виде так называемого уравнения Стратоновича

$$\frac{dW(t)}{dt} = L(W(t)) + (F(Y(t), S_0(X(t)), R) - \langle F \rangle) \cdot W(t) \quad (3.20)$$

с заданными начальными условиями $W(0) = W_0$.

С учетом (3.19) уравнение Стратоновича (3.20) представляет собой сложное интегро-дифференциальное уравнение, которое, к сожалению, не имеет общего решения. Однако в случае линейных моделей сообщения и измерения уравнение Стратоновича решается точно и имеет вид нормальной условной плотности вероятности.

Лекция 2. Алгоритмы классического фильтра Калмана

4. Линейные модели сообщения и измерения. Алгоритмы классического фильтра Калмана-Бьюси.

4.1. Дискретное время

Рассмотрим модели сообщения и его измерения, в которых правые части их уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) линейны. В начале получим уравнения оптимального фильтра в дискретном времени.

В этом случае уравнения модели сообщения и измерения (3.4), (3.5) примут вид:

$$X(i+1) = F_d(i+1|i)X(i) + B_d(i)U(i) + G_d(i)V_d(i), \quad (4.1)$$

$$Y(i+1) = H(i+1)X(i+1) + w_d(i+1), \quad (4.2)$$

где F_d, B_d, G_d, H – прямоугольные матрицы, согласованной размерности с векторами X, Y, V_d, w_d .

Шумы V_d, w_d полагаются некоррелированными и имеют те же статистические характеристики, что и в модели (3.4), (3.5).

При сделанных предположениях решение системы уравнений (3.12) ищем в виде гауссовой плотности вероятности:

$$W(t) = C \cdot \exp\{F(X(t), \hat{X}(t), \tilde{P}(t))\}, \quad (4.3)$$

где $X(t)$ вектор состояния, $\hat{X}(t)$ его условное (апостериорное) среднее, т.е. - оптимальная оценка, $\tilde{P}(t)$ условная (апостериорная) корреляционной матрицы ошибки фильтрации $\tilde{X}(t)$ в момент времени t .

Поскольку нормальная плотность вероятности случайного вектора полностью определяется его вектором среднего и корреляционной матрицей, то алгоритм (3.12), как и следовало ожидать, разбивается на два блока: блок апостериорного среднего и блок апостериорной корреляционной матрицы. Уравнения, входящие в эти блоки, находятся путем подстановки в интегрально-разностный алгоритм (3.12) гауссовых плотностей вероятности (4.3), переходов (3.8) и правдоподобия (3.10) с функционалами $F(X, \hat{X}, \tilde{P})$, $F(X(i+1), F_d X(i) + B_d U(i), G_d(i)Q_d(i)G_d^T(i))$, и $F(Y(i+1), H(i+1)X(i+1), R_d(i+1))$ соответственно.

В результате не тривиальных и трудоемких матричных операций получают следующие рекуррентные выражения.

Блок апостериорного среднего

1. На основании имеющейся оценки вектора сообщения $\hat{X}(i)$ выполняется его прогноз на шаг вперед

$$\hat{X}(i+1|i) = F_d \hat{X}(i) + B_d(i)U(i). \quad (4.4.1)$$

2. Вычисляется одношаговый прогноз будущего измерения сигнала:

$$\hat{Y}(i+1|i) = H(i+1)\hat{X}(i+1|i). \quad (4.4.2)$$

3. Выполняется фактический замер сигнал:

$$Y(i+1) = H(i+1)X(i+1) + w_d(i+1) = H \cdot (F_d X(i) + B_d(i)U(i) + G_d V_d(i)) + w_d(i+1) \quad (4.4.3)$$

4. Вычисляется **невязка измерения** т.е. **разница** между фактическим замером и его прогнозом:

$$\begin{aligned} Nev(i+1) &= Y(i+1) - \hat{Y}(i+1|i) = Y(i+1) - H \cdot (F\hat{X}(i) + BU(i)) = \\ &= -HF\tilde{X}(i) + HGV(i) + w(i+1) \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\tilde{X}(i) = \hat{X}(i) - X(i).$$

5. Работает блок апостериорной корреляционной матрицы ошибки фильтрации (см. ниже), в котором вычисляется матричный коэффициент усиления фильтра $K(i+1)$.

6. Вектор невязки сигнала усиливается с коэффициентом $K(i+1)$:

$$Kor(i+1) = K(i+1) \cdot Nev(i+1).$$

7. Выполняется коррекция вектора прогностической оценки сообщения и вычисляется его оценка в момент времени $(i+1)$:

$$\hat{X}(i+1) = \hat{X}(i+1/i) + Kor(i+1).$$

Цикл вычислений повторяется.

Компактно изложенный алгоритм вычисления апостериорного среднего можно представить в виде следующих разностных уравнений относительно вектора оценки:

$$(4.4.5)$$

$$\hat{X}(i+1) = (I - KH) \cdot F\hat{X}(i) + B_d U(i) + Y(i).$$

или (подставив выражения (4.4.1) - (4.4.4) в (4.4.5)) относительно вектора ошибки фильтрации:

$$\tilde{X}(i+1) = (I - KH) \cdot F\tilde{X}(i) - (I - KH) \cdot GV(i) + Kw(i+1). \quad (4.4.6)$$

Как видно из полученного уравнения (4.4.6) оно не зависит от вектора измерений $Y(i+1)$ и замкнуто относительно ошибки фильтрации.

Блок апостериорной корреляционной матрицы ошибки фильтрации

1. При заданной корреляционной матрице ошибки фильтрации в момент времени $\tilde{P}(i)$ вычисляется корреляционная матрица ошибки прогнозирования вектора сообщения на шаг вперед:

$$P(i+1|i) = FP(i)F^T + G_d(i)Q_d(i)G_d^T(i)$$

2. Определяется коэффициент усиления фильтра $K(i+1)$ для п.5 блока апостериорного среднего:

$$K(i+1) = P(i+1|i)H^T(i+1) \cdot (H \cdot F \cdot P(i+1|i) \cdot F^T \cdot H^T + R_d(i+1))^{-1}.$$

3. Вычисляется корреляционная матрица ошибки фильтрации для следующего шага:

$$P(i+1) = (I - K(i+1)H(i+1)) \cdot P(i+1|i). \quad (4.5)$$

Цикл вычислений повторяется.

Начальные условия алгоритма задаются вектором оценки $\hat{X}(0)$ и корреляционной матрицей ошибки фильтрации $P(0)$.

Таким образом, на основании общей постановки задачи фильтрации, конкретизированной для линейных марковских моделей сообщения и его измерений получены рекуррентные алгоритмы, которые представляют собой классический дискретный фильтр Калмана-Бьюси, названный так в честь его авторов. Сразу же следует отметить его прикладную привлекательность. Фильтр в общем случае многомерный, нестационарный и весьма компактный в векторно-матричной форме записи, что обуславливает легкую реализуемость его алгоритмов на ЭВМ.

Отметим и другой не менее важный прикладной результат, следующий из вывода алгоритма фильтра Калмана-Бьюси. А именно, здесь была получена **СТРУКТУРА** функциональной системы, позволяющей прогнозировать эволюцию стохастического процесса по его модели с использованием сигнала невязки между ожидаемым и фактически наблюдаемым развитием этого процесса. Следовательно, использование априори этой структуры в задачах оценивания сообщений является теоретически обоснованным.

Следует особо подчеркнуть очень важное свойство классического фильтра Калмана - это автономность блока апостериорной корреляционной матрицы ошибки фильтрации. Как видно из уравнений (4.4.6) и (4.5) ошибка фильтрации и ее корреляционная матрица полностью определяются априорными характеристиками моделей сообщения и измерения. Другими словами, расчет корреляционной матрицы фильтра и его коэффициента усиления может быть выполнен заранее без проведения имитационного моделирования блока апостериорного среднего.

В заключение описания классического фильтра Калмана-Бьюси укажем полезные для приложений свойства корреляционных матриц его переменных:

- векторы сообщения и его оптимальной оценки статистически независимы:

$$\langle X(i)\hat{X}^T(i) \rangle = 0;$$

- как следствие предыдущего, взаимная корреляционная матрица ошибки фильтрации и сообщения равна корреляционной матрице ошибки фильтрации с обратным знаком:

$$\langle X(i)\tilde{X}^T(i) \rangle = -P(i);$$

- взаимная корреляционная матрицы ошибки прогноза на шаг вперед и корреляционная матрица ошибки фильтрации связаны выражением вида:

$$P(i+1/i) = -P(i)F_d^T(i+1/i).$$

Прежде чем перейти к изложению последующего материала рассмотрим связь между вычислением априорных и апостериорных статистических характеристик линейных динамических систем, моделируемых стохастическими разностными уравнениями.

Для дискретной модели уравнения для априорных вектора среднего и корреляционной матрицы стохастического процесса (4.1) вытекают из соответствующих им апостериорных (4.4), (4.5) путем приравнивания коэффициента усиления фильтра к нулю ($K(i+1)=0$). То есть полагается, что измерения сообщения не выполняются. Конкретно эти уравнения будут иметь такой вид:

$$\langle X(i+1) \rangle = F_d(i+1/i) \cdot \langle X(i) \rangle + B_d(i)U(i), \quad (4.6)$$

$$P(i+1) = F_d P(i) F_d^T + G_d Q_d(i) G_d^T. \quad (4.7)$$

Если в качестве начальных условий уравнений принять апостериорные средние и корреляционные матрицы, полученные на момент времени $i=k$, т.е. положить $\langle X(i) \rangle = \hat{X}(i)$, $P(i) = \tilde{P}(i)$, то говорят, что фильтр Калмана с момента времени $i+1$ работает как оптимальная прогнозирующая система оценки вектора сообщения.

Если же полагать, что система измерения до i -го момента не функционировала, а в качестве начального условия в нулевой момент времени принять произвольные значения вектора среднего $\langle X(0) \rangle$ и корреляционной матрицы вектора сообщения $P(0)$, то с момента времени $i=1$ имеет место чисто априорное развитие стохастического процесса (4.1). Уравнение (4.7) называется уравнением Ляпунова, и наличие его стационарного решения является достаточным признаком устойчивости стохастической системы (4.7).

Следует особо подчеркнуть, что для линейного динамического нестационарного процесса, возбуждаемого нестационарным гауссовым белым шумом уравнения (4.6), (4.7) полностью описывают его статистические характеристики. Для этого докажем, что недостающую для описания функцию корреляции процесса нетрудно выразить через уравнение его динамики (4.1) и уравнения (4.6), (4.7). Действительно, по определению функции корреляции она равна:

$$F(t_2, t_1) = \langle (X(t_2) - \langle X(t_2) \rangle) \cdot (X(t_1) - \langle X(t_1) \rangle)^T \rangle, \quad (4.8)$$

где $t_2 = t_1 + \Delta t$, t_1, t_2 – произвольные моменты времени.

При $t_2 = t_1 = t$ функция корреляции переходит в корреляционную функцию $P(t, t) = P(t)$.

Полагая, что дискретный момент времени i соответствует непрерывному моменту t_1 , а момент $i+1 \sim t_2$ и подставив (4.6), (4.7) в формулу (4.8) получим, что

$$F(t_2, t_1) = F_d(t_2, t_1) P(t_1) \quad (4.9)$$

что и требовалось доказать.

4.2 Непрерывные модели сообщения и их дискретные аналоги

Линейная модель сообщения в непрерывном времени описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t) + G(t)V(t), \quad (4.10)$$

а модель системы измерений алгебраическим:

$$Y(t) = H(t)X(t) + W(t). \quad (4.11)$$

Шумы $V(t)$, $W(t)$ полагаются непрерывными гауссовыми с нулевыми средними матрицами интенсивностей $Q(t)$, $R(t)$ соответственно.

В общем случае дискретные и непрерывные модели автономны, т.е. они могут описывать разные по своей физической природе объекты, и алгоритмы фильтрации будут строго оптимальны именно для этих систем. Однако на практике часто встречается ситуация когда для непрерывных моделей привлекаются численные методы решения их уравнений. В этом случае можно говорить об аналогии моделей. Например, использовать дискретный аналог модели непрерывного процесса и наоборот. В этом случае полученные результаты будут строгими для выбранной модели и приближенными для ее аналога. Так, уравнения блоков апостериорного среднего и корреляционной матрицы непрерывного фильтра можно получить из уравнений дискретного путем предельного перехода шага дискретизации к нулевому значению полагая, что последние являются дискретными аналогами непрерывных уравнений (4.10), (4.11). Это один из наиболее распространенных способов вывода непрерывных алгоритмов оптимальной фильтрации.

Связь между матричными параметрами моделей линейного динамического процесса в непрерывном и дискретном времени следует из общего решения линейного дифференциального уравнения (4.10)

$$X(t) = F(t_0, t)X(t_0) + \int_{t_0}^t F(b, t)(B(b)U(b) + G(b)q(b))db \quad (4.12)$$

где t_0 – начальный, t – текущий моменты времени, $F(t_0, t)$ – переходная матрица, которая находится из решения дифференциального уравнения:

$$\frac{dF(t_0, t)}{dt} = A(t)F(t_0, t) \quad (4.13)$$

при начальном условии $F(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ (единичная матрица).

Полагая, что интегрирование уравнения (4.10) выполняется тактами длительности d , внутри которых ($t_0 < b < t_0 + d$) входные функции $U(b)$, $q(b)$ уравнения (4.12) полагаются постоянными, а начальным условием для последующего такта является решение предыдущего, нетрудно получить следующие соотношения между параметрами непрерывной и дискретизированной моделями динамического процесса (4.10):

$F_d(i+1/i) = F(t, t+d)$ – решение уравнения (4.13) с первым аргументом $t_0=i$ и вторым $t=i+1$

$$B_d(i) = \int_0^d F(t, t+b)B(b)db,$$

$$G_d(i) = \int_0^d F()G(b)db,$$

$$H(i) = H(t).$$

Корреляционные матрицы дискретных белых шумов и соответствующие им интенсивности непрерывных шумов связаны соотношениями (см., например [4]):

$$Q_d(i) = \frac{Q(t)}{d}$$

$$R_d(i) = \frac{R(t)}{d} \tag{4.14}$$

при конечном пределе $\frac{Q(t)}{d}$ при $d \rightarrow 0$.

Если матрицы A , B , G уравнения модели сообщения стационарны, то соответствующие им дискретные аналоги не зависят от времени, а лишь от временного сдвига d . В этом случае решение уравнения (4.13) имеет вид матричной экспоненты:

$$F_d(i+1/i) = F(d) = e^{A \cdot d} = I + A \cdot d + \frac{(A \cdot d)^2}{2!} + \frac{(A \cdot d)^3}{3!} + \dots$$

При малых d можно считать, что

$$I \approx t,$$

$$F_d(i+1/i) \sim I + A(t) \cdot d,$$

$$B_d(i) \sim B(t) \cdot d, \tag{4.15}$$

$$G_d(i) \sim G(t) \cdot d.$$

Выражения (4.14), (4.15) будут использованы в дальнейшем при выводе алгоритмов фильтра Калмана-Бьюси в непрерывном времени.

4.3. Уравнения Риккати и Ляпунова.

Для того чтобы перейти к фильтрации в непрерывном времени в рамках линейной формализации моделей сообщения и измерения достаточно подставить выражения (4.14), (4.15) в уравнения дискретного фильтра и выполнить предельный переход для такта дискретизации, стремящемся к нулю и использовать классическое определение производной.

В итоге получим следующие непрерывные аналоги уравнений дискретного фильтра:

Блок апостериорного среднего

$$\frac{d \langle X(t) \rangle}{dt} = A(t) \langle X(t) \rangle + B(t)U(t) + K(t) \cdot (Y(t) - H(t) \langle X(t) \rangle), \quad (4.16)$$

$$\langle X(t_0) \rangle = X_0.$$

Отметим, что уравнение ошибки фильтрации, вытекающее из уравнений (4.10), (4.16) будет так же, как и в дискретном времени не зависеть от измерений сигнала:

$$\frac{d\tilde{X}(t)}{dt} = (A(t) - K(t)H(t))\tilde{X}(t) + K(t)w(t) - G(t)V(t) \quad (4.17)$$

Блок апостериорной корреляционной матрицы ошибки фильтрации

$$\frac{dP(t)}{dt} = AP + PA^T - PH^T R^{-1}HP + GQG^T \quad (4.18)$$

$$P(t_0) = P_0,$$

$$K = PHR^{-1} \quad (4.19)$$

Нелинейное уравнение (4.17) называется уравнением **Риккати**. Подчеркнем, что решение этого уравнения является основополагающим в прикладных задачах непрерывной линейной фильтрации. При $K=0$ непрерывный фильтр Калмана работает как оптимальная прогностическая система с начальными условиями, полученными по результатам обработки реализации сигнала в предыдущие моменты времени. При этом нелинейное уравнение Риккати переходит в линейное уравнение **Ляпунова**:

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t). \quad (4.20)$$

Лекция 3. Модификации классического фильтра Калмана

5. Модификации классического фильтра Калмана

5.1. Коррелированные белые шумы моделей сообщения и измерений

Изложенные алгоритмы классического фильтра Калмана-Бьюси получили развитие в многочисленных приложениях, потребовавших его модификации. Это в первую очередь связано с возможной коррелированностью задающего белых шумов моделей сообщения и системы измерения. Это объясняется тем, что их источник может иметь одну и ту же физическую природу. При выводе модифицированных алгоритмов калмановской фильтрации можно воспользоваться приемом нахождения минимума следа корреляционной матрицы ошибки оценивания вектора сообщения с использованием операций матричного дифференцирования скалярной функции от матричного аргумента (в частности по коэффициенту усиления линейного фильтра).

Дискретное время

При выводе алгоритмов фильтра, изложенных в главе 4 использовалась модель измерения «на шаг вперед», т.е. невязка измерения образовывалась как разница прогнозируемого и фактического измерения на следующем такте вычислительной процедуры. При этом шумы моделей сообщения и измерений были сдвинуты на один такт и полагались независимыми. Поэтому для учета коррелированности вышеуказанных шумов рекомендуется использовать другую модель формирования невязки фильтра, а именно она образуется как разница прогнозируемого измерения и его фактического значения в один и тот же момент времени i :

$$Nev(i) = Y(i) - H(i)\hat{X}(i)$$

В этом случае блок вычисления апостериорного среднего фильтра примет такой вид

$$\hat{X}(i+1) = F_d(i+1|i)\hat{X}(i) + K(i) \cdot Nev(i),$$

И соответственно уравнение для вычисления ошибки фильтрации будет таким

$$\tilde{X}(i+1) = (F_d(i+1|i) - K(i) \cdot H(i)) \cdot \tilde{X}(i) + [blok\{-G_d(i) K(i)\}] \cdot [blok\{V_d^T(i) \quad w_d^T(i)\}]^T \quad (5.1)$$

где расширенный вектор шума уравнения имеет корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} Q_d(i) & V_{d12}(i) \\ V_{d21}(i) & R_d(i) \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы ковариации шумов отличны от нуля и симметричны:

$$V_{d12}(i) = V_{d21}^T(i).$$

Находя корреляционную матрицу вектора ошибки (5.1) с использование уравнения Ляпунова и минимизируя ее след по коэффициенту усиления фильтра получим, что оптимальное значения коэффициента будет определяться выражением вида:

$$K = (F_d P H^T + G_d V_{d12}) \cdot (H P H^T + R)^{-1}. \quad (5.2)$$

При коэффициенте усиления фильтра (5.2) корреляционная матрица ошибки фильтрации будет такой:

$$P = (F_d - K H) \cdot P F_d^T + G_d Q_d G^T - K V_{d21} G_d^T. \quad (5.3)$$

Непрерывное время

Алгоритмы модифицированного фильтра Калмана для непрерывного времени можно получить как путем предельного перехода дискретных (при такте дискретизации, стремящемся к нулю), так и путем минимизации корреляционной матрицы ошибки фильтрации по коэффициенту усиления фильтра при условии, что матрица интенсивностей интегрального шума модели фильтра имеет вид:

$$\begin{pmatrix} Q(i) & V_{12}(i) \\ V_{21}(i) & R(i) \end{pmatrix}$$

$$V_{12}(i) = V_{21}^T(i)$$

В итоге уравнения непрерывного оптимального фильтра Калмана в условия коррелированности шумов моделей сообщения и измерений будут иметь такой же вид, как и для классического (4.16) - (4.19) при модифицированных матрицах его модели:

$$A^* = A - GV_{12}R^{-1}H, \quad (5.4)$$

$$Q^* = Q - V_{12}R^{-1}V_{21}.$$

5.2. Коррелированный («цветной») шум системы измерения.

Во многих прикладных задачах предположение о дельта-коррелированном шуме измерения вектора сообщения физически не оправдано. Достаточно, например, рассмотреть задачу получения оценок двух (или более) сообщений, если измеряется их аддитивная смесь с близкими спектрами, когда применение полосовых фильтров является неэффективным. В этом случае целесообразно применить модифицированные алгоритмы оптимального фильтра Калмана-Бьюси.

5.2.1 Метод расширения вектора состояния (сообщения)

Предположим, что шумы измерения в уравнениях (4.2), (4.11) моделируются стохастическими дискретными и непрерывными динамиками вида:

$$W(i+1) = D_d(i+1|i)W(i) + w_d(i), \quad (5.5)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = D(t)W(t) + w(t), \quad (5.6)$$

где матрицы динамики D_d, D заданы априори.

Задающие шумы уравнений (5.5) полагаются белыми гауссовыми с нулевыми средними и корреляционной матрицей R_d и матрицей интенсивности R соответственно.

Введем для систем уравнений (4.1), (4.2), (5.6) и (4.10), (4.11), (5.6) **расширенные** вектора:

состояния объекта наблюдения $X^* = \text{col}(X, W)$,

измерения $Y^* = H^*X^* + e$, (где e – гауссовый белый шум с нулевым средним матрицей интенсивности R_e) задающих шумов объекта $V^* = \text{col}(V, w)$,

а так же **расширенные** матрицы:

объекта $A^* = \text{blok diag}(A, D)$

$G^* = \text{blok col}(G, \mathbf{1})$

системы измерения $H^* = \text{col blok}(H, 0)$.

Матрица интенсивности задающего шума находится по определению:

$$Q^* = \langle V^* V^{*T} \rangle.$$

Отметим, что в общем случае она может содержать симметричные внедиагональные элементы.

Для перехода в дискретное время следует воспользоваться методами, изложенными в разделе 4.2.1. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к классическим (или модифицированным для случая коррелированных белых шумов) алгоритмам оптимальной фильтрации. К недостатку этого метода следует отнести то, что при отсутствии белого шума в системе измерения e классический фильтр является вырожденным, т.к. в его вычислительной процедуре появляется операция деления на ноль при обращении нулевой матрицы интенсивности белого шума измерений ($R_e=0$). Не строго в этом случае шум e можно считать виртуальным малой интенсивности, и считать полученные результаты квазиоптимальными в практических приложениях.

5.2.2 Метод введения нового вектора измерения

От вышеуказанного недостатка метода расширения вектора состояния свободен способ оценивания сообщения в условиях коррелированной помехи измерения, допускающий обойтись без введения расширенного вектора состояния наблюдаемого процесса. Суть этого метода состоит во введении **нового** вектора измерения. В непрерывном времени он имеет вид:

$$Y^* = \frac{dY}{dt} - DY. \quad (5.7)$$

Дифференцирование вектора измерений Y возможно, т.к. шум, входящий в уравнение (4.11) является «цветным» и имеет производную заданную дифференциальным уравнением (5.6). Полагая для простоты коэффициент усиления системы измерения $H=const$, уравнение (5.7) может быть представлено в классической форме измерения вектора сообщения:

$$Y^* = H^* X + w^*, \quad (5.8)$$

где

$$H^* = HA - DH, \quad (5.9)$$

$$w^* = HGV + w$$

То есть, здесь имеет место рассмотренный ранее случай коррелированных белых шумов моделей объекта V и измерений w^* .

Уравнения (5.8) - (5.9) в дискретном времени для варианта невязки (4.4.4) имеют вид следующих выражений

$$H_d^* = HF_d(i+1|i) - D_d(i+1|i)H, \quad (5.10)$$

$$w_d^*(i+1) = HGV_d(i) + w_d(i+1).$$

Отметим, что оценка цветного шума может быть найдена (если она интересует пользователя) по известной оценке вектора сообщения из уравнений модели измерений (4.2), (4.12).

5.3 Оценивание сигнала, действующего на входе динамической системы

Широкий класс задач оптимальной фильтрации связан с задачами оценивания априори неизвестного сигнала имеющего вид коррелированного шума. К ним можно отнести, например, фильтрацию вектора сообщения, прошедшего через измерительный шумящий канал измерительной системы; оценивание возмущения, действующего на динамический объект с целью последующей компенсации этой помехи, например, парирование случайного порыва ветра при взлете и посадке летательного аппарата, и др. В общем случае для решения этих задач необходимо применить метод расширения вектора состояния.

Допустим, что на входе модели непрерывного динамического процесса (4.10) возмущение $V(t)$ представляет собой не белый, а коррелированный шум, динамика которого описывается векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dV(t)}{dt} = D(t)V + p(t) \quad (5.11)$$

с задающим белым шумом $p(t)$ интенсивности $Q_p(t)$.

Как и прежде измерению доступны только отдельные компоненты вектора состояния $X(t)$ в соответствии с уравнением (4.11). По результатам обработки реализации сигнала $Y(t)$ необходимо получить оптимальные оценки вектора $V(t)$. В соответствии с методом расширения вектора состояния представим систему уравнений (4.10), (4.11), (5.11) в компактной матричной форме записи

$$\frac{dX_p(t)}{dt} = A_p X_p + B_p U + G_p V_p, \quad (5.12)$$

$$Y_p = H_p X_p + W,$$

где $X_p = \text{col}(X, V)$ – расширенный вектор состояния,

$A = \text{blok}(A, G; 0, D)$ - расширенная матрица динамики,

$B_p = \text{blok}(B, 0)^T$ - расширенная матрица управления,

$G_p = \text{blok diag}(G, \mathbf{1})$ - расширенная матрица зашумления объекта,

$H_p = \text{blok}(H, 0)$ - расширенная матрица наблюдения,

$V_p = \text{col}(V, p)$ - расширенная матрица задающих шумов.

Таким образом, задача свелась к классическому случаю оптимального фильтра. Аналогичный подход справедлив и для применения метода расширения вектора состояния и в дискретном времени.

6. Оценивание вектора состояния нелинейного процесса

Алгоритмы линейного фильтра Калмана-Бьюси могут быть использованы и в задачах оценивания вектора состояния нелинейного объекта. В этом случае уравнение для апостериорного среднего (оптимальной оценки) имеет структуру линейного фильтра, содержащего в правой части его уравнения аддитивную усиленную с коэффициентом K невязку между прогнозируемым $\hat{Y} = H(\hat{X}, t)$ и фактически измеренным $Y = H(X, W, t)$ сигналами системы индикации:

$$\frac{d\hat{X}(t)}{dt} = f(\hat{X}, U, t) + K(t)(Y(t) - \hat{Y}(t)). \quad (6.1)$$

Здесь полагается, что динамический нелинейный процесс представлен моделью (1), (2) в непрерывном времени. Основная сложность применения нелинейного фильтра (6.1) состоит в определении его коэффициента усиления K . Здесь возможно применение адаптивных (поисковых) алгоритмов настройки коэффициента по критерию минимума следа корреляционной матрицы невязки или алгоритмов расчета коэффициента усиления по методу линейного фильтра. В последнем случае в вычислительных процедурах как непрерывного, так и дискретного фильтров, представленных в главе 4, используются функции Якоби от правых частей уравнений (1), (2) при нулевых значениях шумов $V \equiv 0$, $W \equiv 0$.

$$\tilde{A} = \{f\}'_X, \quad \tilde{H} = \{H\}'_X, \quad (6.2)$$

$$X = \hat{X}. \quad (6.3)$$

Тогда уравнение Риккати для корреляционной матрицы ошибки оценивания (4.18) в окрестности точки линеаризации (6.3) примет следующий вид:

$$\frac{dP}{dt} = \tilde{A}P + P\tilde{A}^T - P\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H}P + Q$$

или

$$\frac{dP}{dt} + P\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H}P = \tilde{A}P + P\tilde{A}^T + Q \quad (6.4)$$

при начальном условии $P(0)$.

Следуя работе [4] положим, что шум наблюдения мал, т.е. след обратной матрицы интенсивности шума наблюдения R^{-1} очень велик, а задающими шумами процесса (1) V можно пренебречь, и, приравнявая правую часть уравнения (6.4) к нулю, получим следующее уравнение Риккати для малых ошибок фильтрации (т.е. точного оценивания):

$$\frac{dP}{dt} = -P\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H}P, \quad (6.5)$$

$$K(t) = P\tilde{H}^T R^{-1} \quad (6.6)$$

Уравнение (6.5) имеет частное решение $P=0$. Это решение локально устойчиво поскольку при малых отклонениях P и условии

$$\tilde{H}P \neq 0 \quad (6.7)$$

Производная $\frac{dP}{dt}$ отрицательна для всех элементов корреляционной матрицы ошибки фильтрации. Это следует из того, что при выполнении условия (6.7) квадратичная форма в правой части уравнения (6.5) всегда положительно определена. Таким образом, при достаточно малых элементах начальной корреляционной матрицы ошибки фильтрации $P(0)$ ее текущее значение $P(t)$ стремится к нулю при любом конечном значении $t>0$, если уравнение (6.5) физически обосновано и условие (6.6) выполняется. То есть в этом случае алгоритм нелинейной фильтрации Калмана-Бьюси (6.1) - (6.6) удовлетворяет условиям точного оценивания.

В работе [4] показано, что условие (6.7) эквивалентно условию равенства размерности вектора состояния ранга блочной матрицы $\tilde{H}\tilde{H}^T$:

$$\tilde{H}\tilde{H}^T = \left(\tilde{H}^T; \frac{d\tilde{H}^T}{dt}; \dots; \frac{d^{n-1}\tilde{H}^T}{dt^{n-1}} \right)$$

$$\text{Rank}(\tilde{H}\tilde{H}^T) = n.$$

Если использовать дискретный вариант фильтра Калмана-Бьюси, то необходимо выполнить переход непрерывных моделей объекта и системы измерений в дискретную форму, как это указано в параграфе 4.2.1. Отметим, что калмановский подход к формированию алгоритма нелинейной фильтрации не является единственным. Строгим и общим методом следует считать решение уравнение Стратоновича для апостериорной плотности вероятности сообщения (3.20). А в случае затруднений – использовать гауссово приближение этого уравнения (см., например, [5]). Однако при малых шумах измерительной системы эти два подхода практически эквивалентны.

7. Оценивание параметров модели динамического процесса. Обратный и обобщенный фильтры типа Калмана-Бьюси

В предыдущих разделах рассматривалась задача оценивания вектора состояния динамического процесса, в предположении, что детерминированные составляющие правых частей уравнений (1), (3.4) заданы априори. Однако на практике уравнения моделей динамического процесса содержат неизвестные параметры, которые вообще

говоря не стационарны. Возникает обратная задача – по данным измерения вектора состояния объекта X и известном векторе управления U выполнить в известном смысле оптимальную оценку параметров модели динамического процесса. Как будет показано ниже на базе классического фильтра Калмана–Бьюси возможно сформировать вычислительную рекуррентную процедуру (называемую нами **обратным** фильтром), позволяющую решить задачу идентификации параметров модели.

Вначале рассмотрим процесс моделируемый уравнением (4.1). Это уравнение можно представить в виде следующей компактной формы записи:

$$X^T = H_F \cdot Z + V^* \quad (7.1)$$

где

$$H_F = \text{blok}(X^T(i), U^T(i)), \quad (7.1^*)$$

$$Z^T = \text{blok}(F_d^T, B_d^T), \quad (7.1^{**})$$

V_d^* - задающий белый шум с корреляционной матрицей (3.6). Полагаем, что эта матрица диагональная с элементами $V_J(i)$, $J = \overline{1:n}$.

Выделим J -е скалярные элементы левой и правой части уравнения (7.1):

$$Y_J(i+1) = X_J(i+1) = H_F \cdot Z_J(i) + V_{dJ}(i) \quad (7.2)$$

где

$Z_J^T(i) = (F_J, B_J)$ - J -я строка матрицы Z^T (соответственно Z_J - вектор столбец),

V_{dJ}^* - скалярный белый шум с дисперсией V_J .

Таким образом, мы получили линейное уравнение измерения вектора параметров Z_J . Для того чтобы применить алгоритмы линейного оптимального фильтра для обработки измерения (7.2) необходимо задать модель динамики вектора Z_J . Выбор модели в значительной мере произвольный, он зависит от уровня не стационарности изменения параметров модели. Самый простой случай – это когда параметры постоянны. Второй случай – они могут медленно изменяться по закону диффузии, то есть их динамика моделируется стохастическим уравнением вида:

$$Z_J(i+1) = Z_J(i) + q_J(i) \quad (7.3)$$

где q_J – гауссовый дискретный шум с корреляционной матрицей q_{dJ} .

Задающий шум в уравнении (7.3), вообще говоря, виртуален и его введением учитывается возможность изменения параметров модели с увеличением корреляционной матрицы вектора параметров в соответствии с уравнением Ляпунова:

$$P_{ZJ}(i+1) = P_{ZJ}(i) + q_{dJ}(i)$$

Здесь и в дальнейшем начальные условия разностных уравнений полагаются заданными.

Модель изменения параметров (7.3) привлекательна с прикладной точки зрения как первое приближения моделирования нестационарных параметров динамического процесса.

Таким образом, выполненная формализация процесса измерения вектора параметров линейных моделей динамического процесса (7.1)-(7.3) позволяет применить рекуррентный алгоритм классического фильтра Калмана-Бьюси, который в данном случае примет такой вид.

Блок апостериорной корреляционной матрицы ошибки оценивания

$$\begin{aligned} P_J(i+1|i) &= P_J(i) + q_{dJ}, \\ \rho_J &= H_F P_J(i+1|i) H_F^T + V_J, \\ K_J &= \frac{P_J(i+1|i) H_F^T}{\rho_J}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$P_J(i+1) = (I - K_J(i+1) \cdot H_F) \cdot P_J(i+1|i).$$

Блок апостериорного среднего (оптимальной оценки) параметров модели

$$\hat{Z}_J(i+1) = \hat{Z}_J(i) + K_J(i+1) \cdot (Y_J(i+1) - H_F \cdot \hat{Z}_J(i)), \quad J = \overline{1:n}. \quad (7.5)$$

Как видно из полученного результата, оценивание матрицы параметров (7.1**) разбивается на n независимых блоков (по количеству строк матрицы (7.1**)). Если же корреляционные матрицы q_{dJ} и дисперсии V_J задающих шумов модели (7.1) - (7.3) одинаковы для всех ее составляющих, то уравнение (7.5) можно записать компактно для всей матрицы \hat{Z}

$$\hat{Z}(i+1) = \hat{Z}(i) + (Y(i+1) - H_F \hat{Z}(i)) \cdot K^T(i+1) \quad (7.6)$$

где

Y – n -мерный вектор, составленный из элементов (7.2) в предположении, что все шумы его компонент V_{dJ}^* имеют одинаковые дисперсии $V_J = V$, $J = \overline{1:n}$.

K – коэффициент усиления фильтры вычисленный по формуле (7.5), в которой в качестве корреляционной матрицы задающего шума в уравнении (7.3) принято значение $q_{dJ} = q_d$, одинаковое для всех $J = \overline{1:n}$.

Интересно отметить, что при $V=1$ и $q_d=0$ алгоритм (7.6) переходит в известный рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов. Принципиальное отличие полученного обратного фильтра состоит в присутствии в модели динамики параметров (7.3) задающих возмущений типа белого шума.

Как отмечалось выше начальные условия вычислительных процедур (7.4) - (7.5) полагались заданными. В практических приложениях как правило начальные значения оценок параметров полагаются нулевыми, а начальное значение корреляционной матрицы ошибки оценивания имеет вид диагональной матрицы с большими ($\gg 1$) значениями ее элементов.

К недостатку обратного фильтра типа Калмана-Бьюси следует отнести необходимость формирования матрицы (7.1*). Если входящий в неё вектор управления известен по определению, то вектор состояния может быть и неизвестен полностью, а возможна лишь его косвенная оценка по результатам обработки зашумленных сигналов измерительной системы. Но для выполнения оптимального оценивания необходимо точное знание параметров модели динамического процесса, а они в свою очередь в рассматриваемой задаче неизвестны. Здесь возможен подход, базирующийся на понятии **обобщенного фильтра** (см. например, [5]). Этот метод заключается в расширении вектора состояния стохастического динамического процесса, в который наряду с его переменными (фазовыми координатами) включаются и неизвестные параметры модели процесса. Естественно модель динамики такого расширенного вектора состояния значительно усложняется, и даже для исходного линейного объекта она становится **нелинейной**.

Здесь может быть рекомендовано применение методов нелинейной фильтрации, в частности – изложенных в главе 6 алгоритмов нелинейного фильтра типа Калмана-Бьюси. Но следует подчеркнуть, что это направление обобщенной фильтрации стохастических сигналов еще мало изучено.

Лекция 4. Статистически оптимальное управление

8. Статистически оптимальное управление.

До сих пор мы рассматривали алгоритмы получения оценок вектора состояния динамического объекта в предположении, что вектор управления $U(t)$, входящий в правую часть уравнения модели объекта известен (в общем случае произволен), и не вносит элемент случайности в эволюцию динамического процесса. Однако при решении задач управления необходимо иметь методы, позволяющие сформировать входное воздействие, которое бы удовлетворяло поставленной задаче. Конечно, если возможна физическая реализуемость такого воздействия. То есть объект должен быть **УПРАВЛЯЕМЫМ**.

Строго, детерминированный динамический объект называется управляемым в момент времени t_0 , при значении вектора состояния в этот момент $X(t_0)$, если существует кусочно-непрерывная функция $U(t)$, зависящая от $X(t_0)$ и определенная на некотором конечном интервале времени $[t_0, t_1]$, такая, что в момент времени t_1 вектор состояния принимает

заданное значение $X(t_1)$. Переносим начало координат в точку $X(t_1)$, без потери общности можно считать $X(t_1)=0$. Если это справедливо для любых $X(t_0)$, то динамический объект называется полностью управляемым. При определенном критерий качества управления, управление, удовлетворяющее этому критерию, называется оптимальным.

Отметим, что на интервале $[t_0, t_1]$ вектор состояния объекта $X(t)$ имеет физический смысл отклонения от номинального значения $X(t_1)=0$, то есть представляет собой ошибку управления. Физически ясно, что если динамический процесс имеет стохастический характер, то ошибка управления будет случайной и управление может быть оптимизировано только в статистическом смысле. При заданном критерии оно будет статистически оптимальным.

Для линейных динамических объектов мощным средством аналитического конструирования статистически оптимального управления является теорема разделения, согласно которой статистически оптимальное управление формируется из условия минимума квадратичного критерия качества вида:

$$J_u = \left\langle \int_{t_0}^{t_1} X^T(t) \Gamma(t) X(t) + U(t) L(t) U(t) dt + X^T(t_1) \Lambda X(t_1) \right\rangle$$

и имеет вид

$$U_{opt}(t) = J_{opt}(t) \cdot \hat{X}(t)$$

Здесь

Γ, Λ – неотрицательно определенные матрицы,

L – положительно определенная матрица,

\hat{X} – статистически оптимальная оценка вектора состояния объекта,

J_{opt} – коэффициент усиления канала управления,

Слагаемые функционала критерия качества имеют смысл: первое - суммарного штрафа за ошибку управления внутри интервала времени $[t_0, t_1]$, второе – штрафа за отклонение управления от нулевого значения на этом интервале, третье – штраф за конечную ошибку управления. То есть такой критерий отражает противоречивые требования к минимальности среднеквадратичной ошибки управления при одновременном ограничении его мощности.

Оптимальное значение коэффициента усиления определяется по формуле

$$J_{opt} = -L^{-1} \cdot B^T \cdot W(t),$$

где квадратная матрица W находится из решения уравнения Риккати, дуального по отношению к таковому для корреляционной матрицы ошибки фильтрации,

$$\frac{dW}{dt} = -A^T W - WA + WBL^{-1}B^T W - \Gamma.$$

Данное уравнение решается в обратном времени $t^*=t_0+t_1-t$ при конечном (граничном) условии $W(t_1)=\Lambda$, $(t=t_0)$.

Соотношения дуальности для матриц уравнений представлены ниже.

Задача оптимального наблюдения (ЗОН)	Задача оптимального регулирования (ЗОР)
A	A^T
H	B^T
Q	Γ
R	L
P	W
$P(t_0)$	$W(t_1)$
K	$-J^T$

Для линейных стационарных систем условие полной управляемости также дуально по условию полной наблюдаемости, т.е.

$$\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n.$$

Отметим некоторые особенности изложенных результатов статистически оптимального управления.

1. Управление выполняется по типу обратной связи с коэффициентом усиления J_{opt} и в законе управления присутствуют оценки **всех** компонент вектора состояния.

2. Коэффициент усиления должен быть определен **заранее** на интервале времени $[t_0, t_1]$, так как расчет коэффициента идет от конечного момента времени t_1 .

3. Ошибка управления на заданном интервале оптимизации подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + B(t)J_{opt}(t)\hat{X}(t) + G(t)V(t)$$

или в замкнутой форме относительно ошибки фильтрации

$$\frac{dX}{dt} = (A + BJ_{opt})X + BJ_{opt}\tilde{X} + GV(t).$$

Как видно из полученного уравнения ошибка управления формируется белым задающим шумом модели объекта и цветным шумом, представляющим ошибку

калмановской фильтрации $\hat{X}(t)$ которая описывается стохастическим дифференциальным уравнением фильтра.

4. Система уравнений для ошибок фильтрации и управления позволяет определить их статистические характеристики (средние и корреляционные матрицы) на основе решения уравнения Ляпунова для расширенного вектора состояния системы «объект-управление-фильтр». В принципе, такой подход справедлив для любых (не обязательно оптимальных) коэффициентов усиления фильтра и канала управления. Однако это не гарантирует устойчивость систем наблюдения и управления. Фундаментальным результатом теории статистически оптимального управления в линейных динамических системах как раз является гарантия его устойчивости в большом при произвольных значениях матриц моделей объекта и системы измерений при выполнении условий его наблюдаемости и управляемости. Это справедливо и для случая, когда исходный объект является неустойчивым.

5. Стационарный режим управления по типу обратной связи возможен лишь при больших интервалах времени оптимизации, когда $t_1 \gg t_0$. В этом случае коэффициент усиления обратной связи не зависит от граничного условия вблизи начального момента времени t_0 и может быть найден из решения алгебраического уравнения Риккати.

Отметим, что возможны и другие виды статистически оптимальных управлений, это, в частности, **управление** с ненулевыми заданными точками и компенсация цветного возмущения.

Управление с ненулевыми заданными точками.

Этот вид управления возможен только в стационарных устойчивых управляемых линейных системах. Данное управление решает задачу нахождения стационарного решения уравнения модели объекта с отдельными заданными значениями компонент вектора состояния (или его среднего)

$$Z_z = H_z \cdot X_z, \text{ где}$$

X_z – заданное значение вектора состояния (или его оценка),

H_z – матрица преобразований.

Из элементарных матричных преобразований уравнения динамики в стационарном режиме следует, что такое управление (если оно существует) определяется по формуле

$$U_z = -(H_z A^{-1} B)^{-1} \cdot Z_z.$$

Из полученного выражения видно, что все обратные матрицы должны существовать, размерность вектора заданной точки Z_z должна совпадать с размерностью вектора управления. Отметим, что если исходный объект неустойчив, то его матрица динамики

может быть улучшена оптимальным управлением по типу обратной связи, алгоритм которого изложен в предыдущем разделе.

Если вектор заданной ненулевой точки медленно изменяется во времени случайным образом, то должен быть определен формирующий фильтр ее динамики, и в законе управления должна быть использована статистически оптимальная оценка заданной точки (если последняя наблюдаема). Все это требует расширение модели фильтрации блоком оценивания вектора ненулевой заданной точки. А при расчете ошибки вектора управления – расширения вектора состояния обобщенного стохастического дифференциального уравнения модели системы «объект-точка-фильтрация-управление».

Управление с ненулевыми заданными точками используется в задачах преследования маневренной цели, облета препятствий, посадки и др.

Компенсирование цветного возмущения

Рассмотрим модель динамического объекта, представленную в разделе 5 уравнениями (5.11), (5.12). Это часто встречающийся на практике случай, когда на входе наблюдаемого и управляемого объекта действует неизвестное цветное возмущение. Расширенная система «объект-возмущение» является наблюдаемой, то есть компоненты возмущения могут быть оценены с использованием фильтра Калмана по измерениям компонент вектора состояния объекта (он полагается наблюдаемым). Однако расширенная система будет неуправляемой – хотя бы из определения управляемости, поскольку вектор состояния модели возмущения **не может** быть переведен сигналом управления $U(t)$ в нулевое значение.

В то же время, как следует из уравнения модели объекта (5.12), статистически оптимальные оценки возмущения могут быть использованы в задаче его компенсации (гашения) путем решения матричного уравнения

$$B \cdot U_c + G_c \cdot \hat{V}_c \approx 0.$$

Возможность точного или приближенного решения этого уравнения и определяют возможность решения задачи компенсации возмущения.

Лекция 5. Примеры аналитического конструирования и численного моделирования фильтров Калмана – Бьюси для различных радиофизических задач

9. Примеры аналитического конструирования и численного моделирования фильтров Калмана – Бьюси для различных радиофизических задач

Для динамических объектов порядок больше 2 конструирование и реализация фильтров типа Калмана-Бьюси возможны только с привлечением вычислительной техники. Аналитически удается решить задачи оптимальной фильтрации лишь для

объектов первого и второго порядков, которые также имеют определенное практическое значение. Рассмотрим некоторые из этих задач в стационарном варианте, то есть все параметры моделей полагаются постоянными. Все шумы, присутствующие в задачах являются гауссовыми белыми с нулевыми средними. Также приведем пример прогнозирования беспроводного канала связи ДКМВ диапазона на основе обратного фильтра Калмана – Бьюси с использованием численного моделирования.

9.1. Оптимальное оценивание динамического объекта, описываемого дифференциальным уравнением первого порядка

Объект описывается скалярным стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = -ax + v(t), \quad (9.1)$$

где

a – обратная постоянной времени переменной $x(t)$,

$v(t)$ – задающий шум интенсивности q .

В этом случае уравнение для среднего процесса $\langle x(t) \rangle$ и его дисперсии $p(t)$ очевидно будут такими

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = -a \langle x \rangle, \quad (9.2)$$

$$\frac{dp}{dt} = -2ap + q \quad (\text{уравнение Ляпунова}) \quad (9.3)$$

при начальных условиях $\langle x_0 \rangle, p_0$.

При $a > 0$ процесс (9.1) устойчив и уравнения (9.2), (9.3) имеют стационарные решения

$$\langle x \rangle_c = 0,$$

$$p_c = q / (2a).$$

Модель измерения переменной $x(t)$ очевидно будет такой

$$Y(t) = hx(t) + w(t),$$

где

h – коэффициент усиления канала измерений,

$w(t)$ – шум измерения интенсивности r .

Уравнение фильтра примет вид

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -a\hat{x} + k(y(t) - h\hat{x}(t)),$$

или в замкнутой форме

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -m_1\hat{x} + ky(t) + kw(t), \text{ где}$$

$$m_1 = a + kh \quad (9.4)$$

m_1 – обратная постоянной времени фильтра,

k – коэффициент усиления фильтра.

Очевидно, что процесс фильтрации будет устойчивым при $m_1 > 0$.

Оптимальное значение коэффициента усиления согласно (4.19) примет вид

$$k_{opt} = \frac{h \cdot p_{opt}}{r}, \quad (9.5)$$

где p_{opt} – оптимальное значение дисперсии фильтрации найденное из решения алгебраического уравнения Риккати, которое согласно (4.18) для нашей задачи примет вид

$$-2ap - \frac{hp^2}{r} + q = 0.$$

Его решение с учетом (9.4),(9.5) можно представить в виде

$$P_{opt} = \frac{q}{a + m_{1opt}}, \quad (9.6)$$

где

$$m_{1opt} = a + k_{opt}h = \sqrt{a^2 + \frac{h^2 q}{r}} \quad (9.7)$$

оптимальное значение обратной постоянной времени фильтра.

Как видно из (9.7), собственное значение оптимального фильтра $l = -m_{1opt}$ отрицательно при любых значениях a , т.е. оптимальный фильтр устойчив всегда, даже при наблюдении неустойчивого процесса ($a \leq 0$).

Как видно из полученного выражения (9.7) дисперсия ошибки фильтрации зависит от отношения интенсивностей задающего шума объекта и шума наблюдений. Это отношение можно назвать отношением сигнал/шум (ОСШ). При ОСШ, стремящимся к бесконечности, дисперсия ошибки фильтрации стремится к нулю. И, наоборот, при нулевом ОСШ дисперсия ошибки фильтрации равна дисперсии ненаблюдаемого процесса (если он устойчив).

Рассмотренная выше модель динамического объекта может быть применена для фильтрации сигнала типа экспоненты, константы, в том числе ограниченных по длительности.

Отметим, что введением в правую часть уравнения динамики (9.1) белого шума (а он может быть и виртуальным с интенсивностью q), предполагается возможность случайного изменения динамического сигнала. Таким приемом можно воспользоваться при конструировании ждущих стационарных фильтров при приеме детерминированных сигналов, моменты появления и окончания которых априори неизвестны. Для детерминированных сигналов при отсутствии возбуждающего шума $v(t)$, $q=0$,

стационарный фильтр, строго говоря, не оптимален, стационарное решение уравнения Риккати имеет тривиальное нулевое решение. Здесь необходимо полное его решение с переходным процессом, а это возможно, если момент появления детерминированного зашумленного ($w(t) \neq 0$) известен. Эффективность применения стационарного (ждущего) фильтра может быть определена экспериментальным путем.

9.2. Оптимальное оценивание динамического объекта, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка

В этом разделе мы рассмотрим стационарный динамический объект, модель которого представлена в форме уравнения (4.10) с вектором состояния, имеющем две компоненты $X^T = (X(1,1), X(2,1))$. Такая модель описывает уже более широкий класс динамических сигналов, в том числе, полученных от источника типа гармонического осциллятора, т.е. радиосигналов.

Обозначим элементы матрицы динамики A через

$$A = \begin{pmatrix} -a & g \\ -c & -b \end{pmatrix}$$

при этом $g \neq 0$.

Без потери общности положим вектор управления нулевым, матрицу $G = 1$ единичной, полагая, что вектор возбуждающего шума имеет квадратную положительно определенную матрицу интенсивности вида:

$$Q = \begin{pmatrix} q & v_{12} \\ v_{12} & v \end{pmatrix}$$

т.е. компоненты задающего шума могут быть коррелированными.

Полагаем, что измеряется только первая компонента вектора состояния $X(1,1)$ с шумом $w(t)$ интенсивности r , то есть

$$Y(t) = hX(1,1) + w(t).$$

Следовательно, матрица H в уравнении (4.11)

$$H = (h \ 0),$$

а матрица интенсивности шума измерения есть скаляр

$$R = r.$$

Система уравнений линейного стационарного фильтра второго порядка в замкнутой форме будет следующей

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{X}(1,1)}{dt} &= -m_{11}\hat{X}(1,1) + g\hat{X}(2,1) + K(1,1)y(t), \\ \frac{d\hat{X}(2,1)}{dt} &= -m_{21}\hat{X}(1,1) - b\hat{X}(2,1) + K(2,1)y(t),\end{aligned}\tag{9.8}$$

где

$$\begin{aligned}m_{11} &= a + K(1,1) \cdot h, \\ m_{21} &= c + K(2,1) \cdot h.\end{aligned}\tag{9.9}$$

$K(1,1)$, $K(2,1)$ – компоненты матричного (размерности 2×1) коэффициента усиления фильтра Калмана.

Характеристическое уравнение системы (9.8), определяющее устойчивость работы фильтра имеет вид

$$\lambda^2 + \tilde{m}\lambda + m_{21}g = 0,\tag{9.10}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= \tilde{a} + m_{11}, \\ \tilde{a} &= a + b.\end{aligned}\tag{9.11}$$

Процесс фильтрации будет устойчивым, если корни (собственные значения) квадратного уравнения будут иметь отрицательные действительные части. Обозначения (9.9), (9.11) введены для удобства изложения дальнейшего материала.

Исследуем оптимальный режим работы фильтра. В этом случае значения коэффициентов усиления можно записать в виде:

$$\begin{aligned}K_{opt}(1,1) &= \frac{P(1,1)h}{r}, \\ K_{opt}(2,1) &= \frac{P(2,1)h}{r},\end{aligned}$$

где $P(1,1)$, $P(2,1)$ – компоненты корреляционной матрицы ошибки фильтрации P , которая является решением алгебраического уравнения Риккати. Учитывая симметричность этой матрицы распишем уравнение Риккати в виде системы трех нелинейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} -2aP(1,1) + 2gP(1,2) - \frac{h^2 P^2(1,1)}{r} + q &= 0, \\ -(a+b)P(2,1) - cP(1,1) + gP(2,2) - \frac{h^2 P(1,1)P(2,1)}{r} + v_{12} &= 0, \\ -2bP(2,2) - 2cP(1,2) - \frac{h^2 P^2(2,1)}{r} + v &= 0. \end{aligned} \right.\tag{9.12}$$

Выражая из первого и третьего уравнения $P(2,1)$ и $P(2,2)$ через $P(1,1)$ и подставляя их во второе уравнение, получим частный случай уравнения четвертой степени, имеющего аналитическое решение, которое можно представить в виде

$$P(1,1) = \frac{\tilde{q}}{\tilde{\alpha} + \tilde{m}}, \quad (9.13)$$

где

$$\tilde{q} = q + \frac{2Q}{d + \sqrt{d^2 + \frac{h^2 Q}{r}}},$$

$$Q = b^2 q + g^2 v,$$

$$v = v + \frac{2bv_{12}}{g},$$

$d = ab + cg$ - детерминант матрицы A ,

$$\tilde{m} = \tilde{\alpha} + K_{opt}(1,1)h = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \frac{h^2 \tilde{q}}{r}}. \quad (9.14)$$

Отметим, что выражения (9.13), (9.14) аналогичны по форме, что и выражения (9.6), (9.7) для фильтра первого порядка.

Как видно из первого уравнения системы (9.12) оптимальные значения компонент коэффициента усиления фильтра Калмана связаны соотношением

$$2ghK_{opt}(2,1) = (a + K_{opt}(1,1) \cdot h)^2 - m_1^2 = m_{11opt}^2 - m_1^2, \quad (9.15)$$

или

$$m_{21opt} = \frac{(m_{11opt}^2 - m_1^2)}{2g} + c,$$

где m_1 находится из выражения (9.7), а оптимальные m_{11} , m_{21} из выражений (9.9):

$$m_{11opt} = a + K_{opt}(1,1)h,$$

$$m_{21opt} = hK_{opt}(2,1) + c.$$

Другие элементы корреляционной матрицы оптимального фильтра второго порядка будут такими (далее индекс opt мы упустим)

$$P(2,1) = \frac{(a + m_{11})P(1,1) - q}{2g},$$

$$P(2,2) = \frac{m_{21}P(1,1) + \tilde{\alpha}P(2,1) - v_{12}}{g}.$$

Отметим, что в оптимальном фильтре Калмана компоненты его коэффициента усиления однозначно связаны соотношением (9.15). В этом случае корни характеристического уравнения фильтра (9.10) будут следующими

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\bar{m}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{m}}{2}\right)^2 - \sqrt{d^2 + \frac{h^2 Q}{r}}}. \quad (9.16)$$

Как видно из (9.16), собственные значения матрицы динамики фильтра всегда имеют отрицательные действительные части, что гарантирует устойчивость процесса стационарной линейной фильтрации. При этом сам процесс может иметь как апериодический, так и колебательный характер. Отметим и другую особенность оптимальной фильтрации. Динамические параметры оптимального фильтра m_{11} , m_{21} зависят только от отношений интенсивностей задающих возмущений q , v к интенсивности шума измерений r . Эти отношения можно рассматривать как ОШС.

9.3. Оптимальная фильтрация узкополосного радиосигнала с известными параметрами на фоне белого гауссовского шума

Рассмотрим частный случай линейного стационарного фильтра второго порядка, полагая, что источник сигнала представляет собой гармонический осциллятор, возбуждаемый белым шумом. В этом случае вектор состояния объекта содержит фазовые координаты осциллятора (переменную и ее скорость). Введением задающего белого шума моделируется возможность случайного изменения амплитуды и фазы сигнала.

Значения постоянных параметров модели объекта и фильтра в этом случае будут следующими

$$a=0, b=0; g=1; q=0; v_{12}=0;$$

Варьируемые параметры $c=w^2$, h , v , r имеют физический смысл квадрата собственной частоты осциллятора, коэффициента усиления канала измерения сигнала и интенсивностей возбуждающего шума и шума измерений соответственно.

При данных параметрах характеристики оптимального наблюдения объекта (осциллятора) будут подчиняться следующим выражениям

$$m_{21} = \sqrt{c^2 + \frac{h^2 v}{r}},$$

$$\tilde{q} = \frac{2v}{c + m_{21}},$$

$$P(1,1) = \sqrt{\frac{r\tilde{q}}{h^2}},$$

$$P(2,1) = \frac{\tilde{q}}{2},$$

$$P(2,2) = m_{21}P(1,1),$$

$$K(1,1) = \sqrt{\frac{\tilde{q}}{r}},$$

$$K(2,1) = \frac{hK^2(1,1)}{2},$$

$$\tilde{m} = m_{11} = \sqrt{\frac{h^2 q}{r}},$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{m_{11}}{2} \pm i \cdot \sqrt{\left(\frac{m_{11}}{2}\right)^2 + c}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Полученные выражения позволяют исследовать процесс оптимальной стационарной фильтрации фазовых координат гармонического осциллятора, с задающим белым гауссовым шумом.

Укажем возможный подход для оценки огибающей и фазы сигнала. Напомним, что решение дифференциального уравнения модели осциллятора имеет при заданных начальных условиях $X_0(1,1)=x_0$,

$X_0(2,1) = \frac{dx}{dt_0}$ в комплексной форме будет таким

$$X(t) = A_c \cos(\omega t) + A_s \sin(\omega t),$$

где $A_c=X_0(1,1)$, $A_s=X_0(2,1)/\omega$ - коэффициенты комплексного представления радиосигнала.

Амплитуда сигнала A и его начальная фаза φ_0 находятся из известных выражений

$$A = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}, \quad \varphi_0 = \arctg\left(\frac{A_s}{A_c}\right).$$

Таким образом, полагая, что моменты времени t_0 и t отличаются на бесконечно малую величину, текущие оценки фазовых координат осциллятора можно использовать для вычисления приближенных значений квадратурных составляющих A_c , A_s , и следовательно амплитуды и фазы сигнала.

Следует подчеркнуть, что реальный сигнал может иметь определенные законы модуляции амплитуды и фазы. Здесь же описаны возможные алгоритмы обработки измеряемого сигнала на базе теории оптимальной фильтрации для изложенной выше модели динамического источника сигнала.

9.4. Оценка неизвестных параметров радиосигнала на фоне белого гауссовского шума

Возможен и другой подход к приложению теории фильтрации Калмана-Бьюси к задаче оптимального приема радиосигнала. В этом случае полагается исходное комплексное представление радиосигнала с заданной несущей частотой и полагается зашумленность его измерения. В этом случае вектор сообщения содержит компоненты $X(1,1)=A_c(t)$, $X(2,1)=A_s(t)$.

Измерение радиосигнала описывается классической моделью

$$Y=H(t) X(t)+w(t).$$

Однако матрица измерений $H(t)$ будет уже нестационарной и примет вид

$$H(t)=(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

И фильтр будет уже нестационарным.

В то же время фильтр останется линейным если мы зададим линейную модель динамики изменения квадратурных составляющих радиосигнала, например, в виде рассмотренной модели второго порядка.

И, наконец, возможен наиболее сложный случай – нелинейная фильтрация радиосигнала. Модель его измерения полагается исходно нелинейной вида:

$$Y(t)=A(t) \cdot \cos(W(t) \cdot t+F(t))+w(t),$$

то есть полагается модулированным по амплитуде, частоте и фазе. Соответственно вектор сообщения будет содержать компоненты амплитуды, частоты и фазы, а измерение этого вектора будет представлено указанной выше нелинейной моделью. Фильтрация будет нелинейной даже в случае линейной модели динамики сообщения.

9.5. Прогнозирование беспроводного канала связи на основе теории оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси.

Предсказание канала связи (импульсной переходной характеристики) представляет большой интерес для различных целей: контроль и адаптивное распределение мощности по подканалам, выбор модуляции для подканалов. Предсказание канала позволяет системе выбирать оптимальные методы модуляции по предсказанным значениям будущего состояния канала и таким образом уменьшать ошибки передачи информации.

В основном, подходы к прогнозу импульсной переходной характеристики сводятся к следующему: рассматривается модель канала, с учетом моделируемых или реальных данных предлагается модель изменения канала во времени, и на основе модели делается прогноз. Причем прогноз может осуществляться как во временной области $h(t, \tau)$, так и в частотной $h(f, t)$, и можно прогнозировать, например, как саму импульсную переходную характеристику (в квадратурах), так и ее мощность. В настоящей работе мы будем рассматривать прогноз импульсной переходной характеристики (прогноз канала во временной области).

В качестве примера рассмотрим алгоритм прогнозирования беспроводного канала связи ДКМВ диапазона на основе обратного фильтра Калмана – Бьюси, модернизированного для случая комплексных сигналов. В качестве модели канала используется двухлучевая модель Ваттерсона ВЧ радиоканала (см. Приложение С и [10]).

Приведем результаты компьютерного моделирования, сравнения эффективности работы методов прогнозирования беспроводного канала связи и представим рекомендации по выбору динамической модели изменения канала.

9.5.1. Математическая модель канала.

Физические каналы, которые возникают в условиях меняющегося во времени многопутевого распространения передаваемого сигнала, могут быть описаны математически как линейные фильтры с переменными параметрами. Такие линейные фильтры характеризуются меняющейся во времени импульсной характеристикой канала $h(t, \tau)$, где $h(t, \tau)$ – отклик канала в момент времени t на δ -импульс. Линейный фильтровый канал с переменными параметрами и аддитивным шумом иллюстрируется на Рис. 9.1.

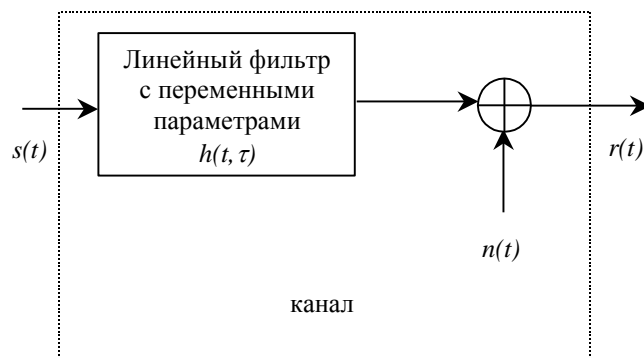


Рис. 9.1. Линейный фильтровый канал с переменными параметрами и аддитивным шумом.

Для передаваемого сигнала $s(t)$ принимаемый сигнал $r(t)$ можно записать:

$$r(t) = s(t) * h(t, \tau) + n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \cdot s(t - \tau) d\tau + n(t). \quad (9.17)$$

здесь ‘*’ – оператор свертки.

Хорошей моделью для многопутевого распространения волн через физические каналы типа ионосферы (на частотах меньше 30 МГц) и каналы подвижной сотовой радиосвязи является частный случай (9.17), когда переменная во времени импульсная характеристика имеет вид:

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^L h_l(t) \delta(\tau - \tau_l) \quad (9.18)$$

где $h_l(t)$ – случайные комплексные коэффициенты затухания, τ_l – соответствующие им времена задержки, L – число путей (компонентов распространения).

Если (9.18) подставить в (9.17), то принимаемый сигнал

$$r(t) = \sum_{l=1}^L h_l(t) \cdot s(\tau - \tau_l) + n(t). \quad (9.19)$$

Следовательно, полученный сигнал состоит из L компонент распространения, где каждый компонент умножается на $h_l(t)$ и запаздывает на τ_l .

9.5.2. Временное представление канала. Фильтр Калмана – Бьюси.

В общем случае задачу прогнозирования можно разбить на 2 этапа. Первый этап – задача идентификации – по данным измерения вектора состояния объекта X выполняется в известном смысле оптимальная оценка параметров выбранной модели случайного процесса. В нашем случае задачу идентификации параметров модели решаем с помощью обратного фильтра Калмана-Бьюси. Второй этап – на основе известных оценок параметров динамической модели производится прогноз.

Изменение импульсной переходной характеристики во времени $\vec{h}(t) = \{h_1(t), h_2(t), \dots, h_L(t)\}^T$ может быть описано некоторым случайным дискретным комплексным векторным процессом. В настоящей работе предполагается, что уравнение динамики процесса – авторегрессионная модель (АР) порядка p .

Рассмотрим работу фильтра Калмана-Бьюси на примере АР модели первого порядка. Динамическую модель процесса (изменение импульсной переходной характеристики во временной области $h(t, \tau)$) можно представить в виде следующей компактной формы:

$$X^T(i+1) = X^T(i) \cdot F + V \quad (9.20)$$

где

$$H_F = X^T(i), \quad (9.21)$$

$$Z^T = F_d^T, \quad (9.22)$$

где $X^T(i)$ – вектор строка размерности $[1 \times L]$ (L – количество путей), F – матрица динамики размерности $[L \times L]$, V – задающий белый шум с заданной корреляционной матрицей.

Полагаем, что эта матрица диагональная с элементами $V_J(i)$, $J = \overline{1:L}$.

Выделим J -е скалярные элементы левой и правой части уравнения (4):

$$Y_J(i+1) = X_J(i+1) = H_F \cdot Z_J(i) + V_{dJ}(i) \quad (9.23)$$

где

$Z_J^T(i) = F_J$ – J -я строка матрицы Z^T (соответственно Z_J – вектор столбец),

V_{dJ} – скалярный белый шум с дисперсией V_J .

Таким образом, мы получили линейное уравнение измерения вектора параметров Z_J . Для того чтобы применить алгоритмы линейного оптимального фильтра для обработки измерения (9.23) необходимо задать модель динамики вектора Z_J . Предполагаем, что их

динамика моделируется стохастическим уравнением вида (медленно меняется по закону диффузии):

$$Z_J(i+1) = Z_J(i) + q_J(i) \quad (9.24)$$

где q_J – гауссовый дискретный шум с корреляционной матрицей q_{dJ} .

Задающий шум в уравнении (9.24), вообще говоря, виртуален и его введением учитывается возможность изменения параметров модели увеличением корреляционной матрицы вектора параметров в соответствии с уравнением Ляпунова:

$$P_{zJ}(i+1) = P_{zJ}(i) + q_{dJ}(i) \quad (9.25)$$

Здесь и в дальнейшем начальные условия разностных уравнений полагаются заданными.

Выполненная формализация процесса измерения вектора параметров линейных моделей динамического процесса (9.20)-(9.24) позволяет применить рекуррентный алгоритм фильтра Калмана-Бьюси, который в случае комплексных сигналов примет следующий вид:

Блок апостериорной корреляционной матрицы ошибки оценивания

1. При заданной корреляционной матрице ошибки фильтрации в момент времени i $P_J(i)$ вычисляется корреляционная матрица ошибки прогнозирования вектора сообщения $P_J(i+1/i)$ на шаг вперед:

$$P_J(i+1/i) = P_J(i) + q_{dJ}, \quad (9.26)$$

3. Вычисляется коэффициент усиления фильтра

$$K_J(i+1) = \frac{P_J(i+1/i)H_F^{*T}}{\rho_J}, \quad (9.27)$$

где

$$\rho_J = H_F P_J(i+1/i)H_F^{*T} + V_J \quad (9.28)$$

Знак ‘*T’ - оператор эрмитова сопряжения.

4. Вычисляется корреляционная матрица ошибки фильтрации для следующего шага

$$P_J(i+1) = (I - K_J(i+1) \cdot H_F) \cdot P_J(i+1/i). \quad (9.29)$$

Блок апостериорного среднего (оптимальной оценки) параметров модели

Производится оценка параметров модели с учетом поступающей информации:

$$\hat{Z}_J(i+1) = \hat{Z}_J(i) + K_J(i+1) \cdot (Y_J(i+1) - H_F \cdot \hat{Z}_J(i)), \quad J = \overline{1:L}. \quad (9.30)$$

Как видно из полученного результата, оценивание матрицы параметров (9.22) разбивается на L независимых блоков (по количеству строк матрицы (9.20)). Если же корреляционные матрицы q_{dJ} и дисперсии V_J задающих шумов модели (9.20) - (9.26)

одинаковы для всех ее составляющих, то уравнение (12) можно записать компактно для всей матрицы \hat{Z}

$$\hat{Z}(i+1) = \hat{Z}(i) + (Y(i+1) - H_F \hat{Z}(i)) \cdot K^{*T}(i+1) \quad (9.31)$$

где

Y – L -мерный вектор, составленный из элементов (9.23) в предположении, что все шумы его компонент V_{dj} имеют одинаковые дисперсии $V_j = V$, $J = \overline{1:L}$.

K – коэффициент усиления фильтра, вычисленный по формуле (9.27), в которой в качестве корреляционной матрицы задающего шума в уравнении (9.24) принято значение $q_{dJ} = q_d$, одинаковое для всех $J = \overline{1:L}$.

Напоминаем, что при $V=1$ и $q_d=0$ алгоритм фильтра Калмана - Бьюси переходит в рекуррентный алгоритм метода наименьших квадратов. Принципиальное отличие полученного обратного фильтра состоит в присутствии в модели динамики параметров (9.24) задающих возмущений типа белого шума.

Начальные условия вычислительных процедур полагались заданными. Начальные значения оценок параметров полагаются нулевыми, а начальное значение корреляционной матрицы ошибки оценивания имеет вид диагональной матрицы с большими ($\gg 1$) значениями ее элементов.

9.5.3. Расширенный вектор состояния

При помощи расширенных матриц можно легко записать динамическую модель изменения процесса для АР модели более высокого порядка.

Например, компактная форма динамической модели процесса для АР второго порядка может быть представлена в виде:

$$X^T(i+1) = H_F \cdot Z + V \quad (9.32)$$

где расширенные матрицы записываются как:

$$H_F = \text{blok}(X^T(i), X^T(i-1)), \quad (9.33)$$

$$Z^T = \text{blok}(F_d^T(i), F_d^T(i-1)). \quad (9.34)$$

Далее применяется приведенный выше рекуррентный алгоритм обратного фильтра Калмана – Бьюси с учетом размерностей расширенных матриц.

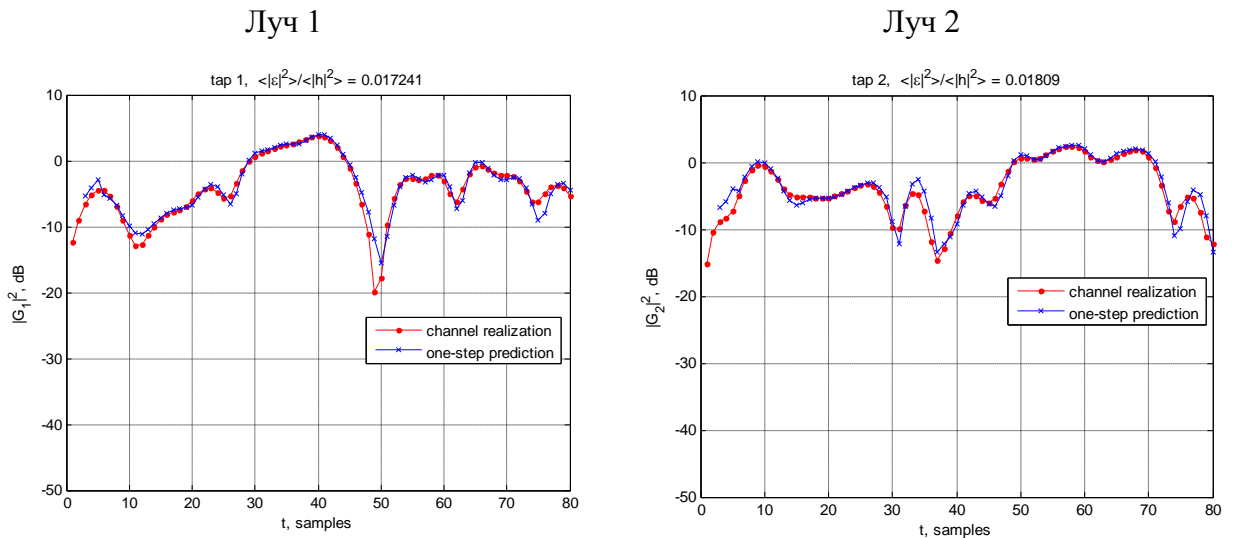
9.5.4. Результаты компьютерного моделирования

Исследуем эффективность работы алгоритма прогнозирования беспроводного канала радиосвязи ДКМВ диапазона на основе численного моделирования. В качестве примера приведем сравнение эффективности двух алгоритмов прогнозирования – обратного фильтра Калмана – Бьюси и рекуррентного алгоритма наименьших квадратов.

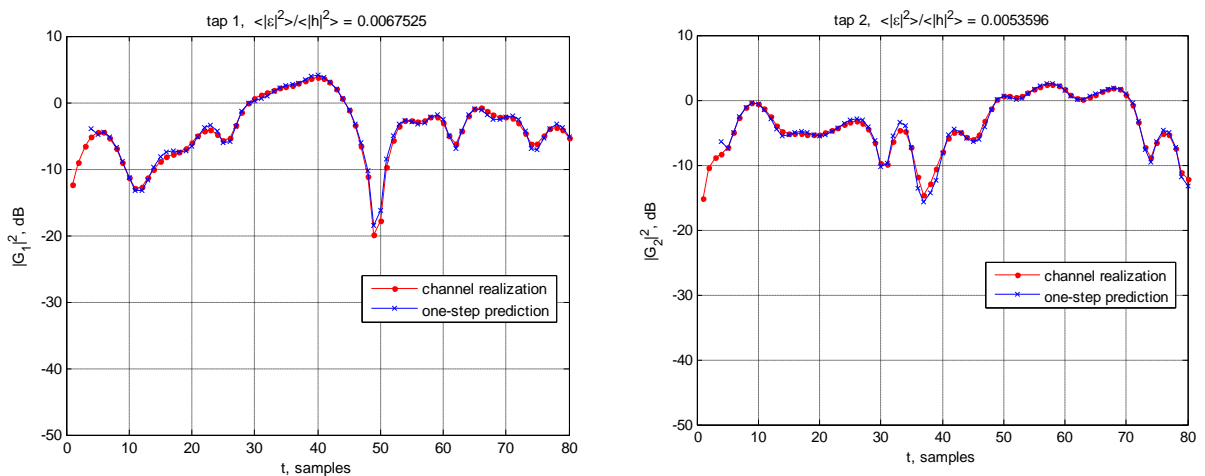
В качестве *исходных данных* используется двухлучевая ($L = 2$) модель Ваттерсона ВЧ радиоканала с одинаковым доплеровским сдвигом частоты в соответствии с рекомендациями ITU-R F.1487 (см. Приложение С и [10]). Времена задержки между лучами считаются фиксированными и выбраны равными 2 мсек. В качестве входных данных для прогноза используются оценки импульсной переходной характеристики, в предположении, что оценки являются идеальными (оценки без ошибок). Время дискретизации между отчетами канала – 0.0833 сек.

Предварительный корреляционный анализ имеющихся оценок канала связи показал, что в качестве модели динамики канала связи для фильтра Калмана – Бьюси необходимо использовать АР модели 1 – 3 порядков.

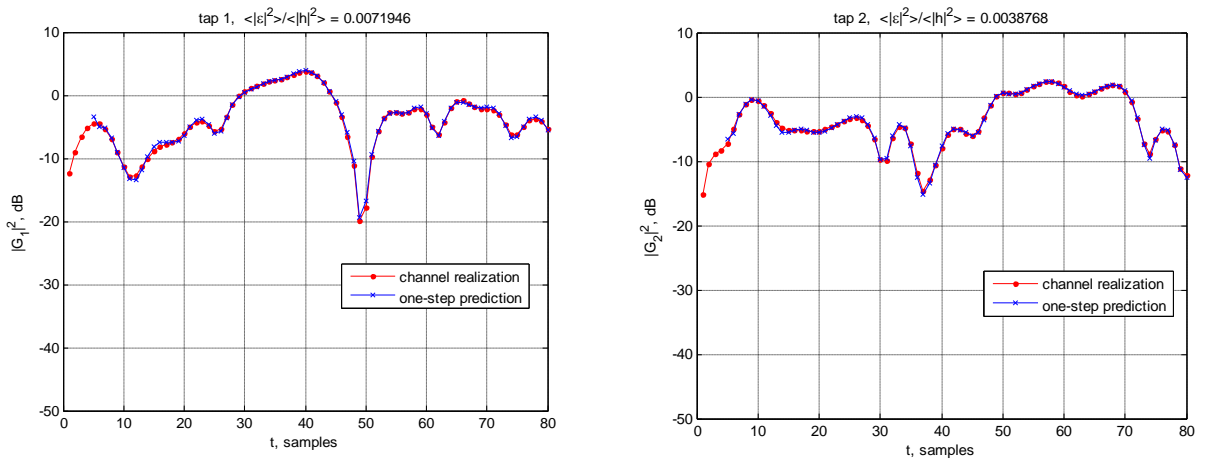
На Рис. 9.2 представлено сравнение поведения канала связи (2-х лучей) и результаты одношагового прогнозирования для разных порядков АР модели ($p = 1 - 3$) импульсной переходной характеристики.



а) Динамическая модель канала - АР модель 1-го порядка



б) Динамическая модель канала - АР модель 2-го порядка



в) Динамическая модель канала - АР модель 3-го порядка

Рис. 9.2. Сравнение реализации канала (красная кривая) и одношагового прогноза (синяя кривая) для различных динамических моделей импульсной переходной характеристики

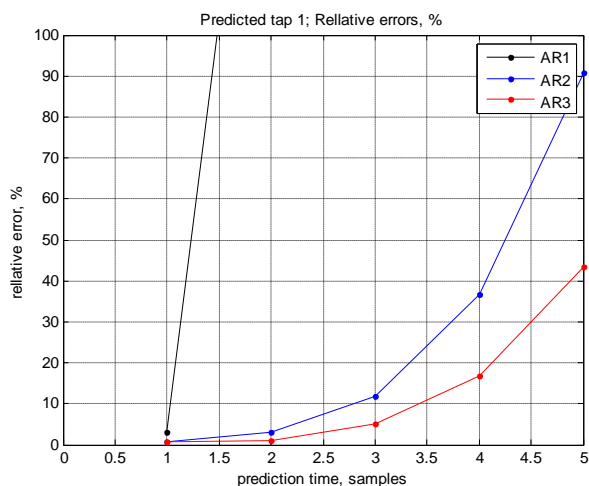
Как видно из рисунков, с увеличением порядка модели (увеличением памяти процесса) происходит улучшение прогноза. Относительные ошибки прогнозирования, полученные по представленной реализации, уменьшаются с 1.7 % до 0.7 % для первого луча и с 1.8 % до 0.38 % для второго луча. В то же самое время, АР модель более высокого порядка (4 и выше) не даёт существенного улучшения в прогнозе канала связи.

Относительная ошибка считалась как отношение среднего квадрата отклонений прогноза от реального значения к мощности луча в следующем виде:

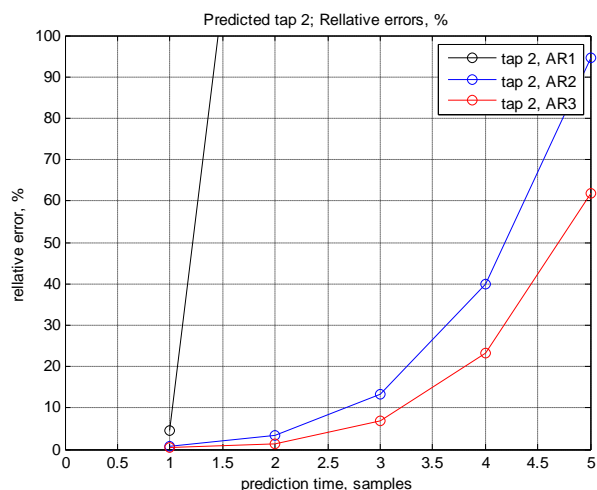
$$\delta\varepsilon = \frac{\langle |h_{i \text{ real}} - h_{i \text{ predict}}|^2 \rangle}{\langle |h_i|^2 \rangle} \quad (9.35)$$

$h_{i \text{ real}}$ – вектор реальных значений i -го луча, $h_{i \text{ predict}}$ – вектор прогнозируемых значений i -го луча; усреднение производится по времени.

На Рис. 9.3 представлены относительные ошибки прогноза на 5 шагов вперед для разных порядков АР модели. Прогноз на несколько шагов вперед осуществляется на основе хорошо известного рекурсивного метода, учитывающего предыдущие прогнозируемые значения. Как видно из рисунков с увеличением дальности прогноза растет относительная ошибка, причем глубина прогноза, как и следовало ожидать, напрямую зависит от порядка АР модели.



а) Луч 1



б) Луч 2

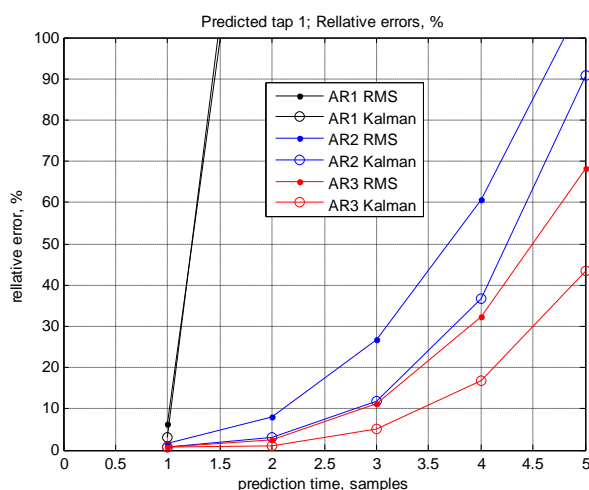
Рис. 9.3. Зависимость относительных ошибок предсказания канала от глубины прогноза для разных порядков АР модели канала связи.

AR1 – АР модель 1-го порядка (черная кривая),

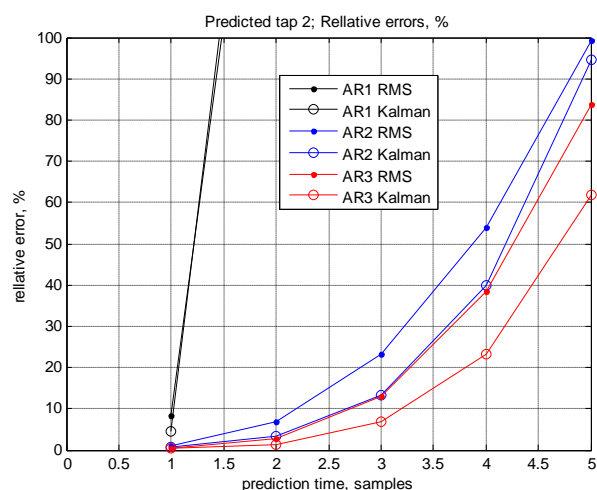
AR2 – АР модель 2-го порядка (синяя кривая),

AR3 – АР модель 3-го порядка (красная кривая).

На Рис. 9.4 представлено сравнение относительных ошибок прогноза для разных методов прогнозирования: обратный фильтр Калмана-Бьюси и рекуррентный метод наименьших квадратов. Как видно из представленных графиков оптимальный фильтр Калмана-Бьюси существенно выигрывает в плане прогноза у метода наименьших квадратов.



а) Луч 1



б) Луч 2

Рис. 9.4. Сравнение относительных ошибок предсказания канала от глубины прогноза для разных порядков АР модели канала связи и разных методов прогноза.

1. Рекуррентный метод наименьших квадратов:

AR1 RMS– АР модель 1-го порядка (черная кривая с точками),

AR2 RMS – AP модель 2-го порядка (синяя кривая с точками),
 AR3 RMS – AP модель 3-го порядка (красная кривая с точками).

2. Фильтр Калмана - Бьюси

AR1 Kalman – AP модель 1-го порядка (черная кривая с кружками),
 AR2 Kalman – AP модель 2-го порядка (синяя кривая с кружками),
 AR3 Kalman – AP модель 3-го порядка (красная кривая с кружками).

Приложение А. Дифференцирование скалярной функции по матричному аргументу.

Пусть

$$\rho = \rho(K)$$

где

ρ – скаляр;

K – прямоугольная матрица размера $[n \times m]$.

$\frac{\partial \rho}{\partial K}$ – есть матрица размерности $[n \times m]$, с элементами $\frac{\partial \rho}{\partial K_{ij}}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Дифференцирование следа (Sp) квадратной матрицы по матричному аргументу K .

$$\frac{\partial \text{Sp}(KD)}{\partial K} = D^T$$

$$\frac{\partial \text{Sp}(BK^T)}{\partial K} = B$$

$$\frac{\partial \text{Sp}(A(K) \cdot B(K))}{\partial K} = \frac{\partial A(K) \cdot B}{\partial K} + \frac{\partial B(K) \cdot A}{\partial K}$$

$B, A(K), B(K)$ – K – переменная,

а A, B – K – постоянная.

В частном случае

$$\frac{\partial \text{Sp}(KAK^T)}{\partial K} = KA^T + KA$$

Если A – симметричная матрица, т.е. $A^T = A$, то $\frac{\partial \text{Sp}(KAK^T)}{\partial K} = 2KA$

Приложение В. Уравнение Эйнштейна-Фокера-Планка для априорной плотности вероятностей.

Предположение о дельта – коррелированности шума возмущений динамической системы $\zeta(t)$ является удобной математической абстракцией, из которой следует, что

оцениваемый сигнал $X(t)$ представляет собой марковский случайный процесс. Пусть выполняются необходимые требования, связанные с гладкостью и ограниченностью функций B и G . Тогда $X(t)$ – непрерывный марковский процесс, и его априорная плотность вероятностей $P_X(X,t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\frac{\partial P_X(X,t)}{\partial t} = LP_X(X,t), \quad P_X(X,t)|_{t=0} = P_X(X)$$

Здесь введен оператор $L(\cdot)$, определяемый выражением

$$LP_X(X,t) = -\sum_{i=1}^r \frac{\partial [a_i(X,t)P_X(X,t)]}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^r \frac{\partial^2 [b_{ij}(X,t)P_X(X,t)]}{\partial X_i \partial X_j}$$

где коэффициенты сноса $a_i(X,t)$ и диффузии $b_{ij}(X,t)$ равны:

$$a_i(X,t) = B_i(X,t) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^r \sum_{k,l=1}^p G_{jk}(X,t) Q_{kl}(t) \frac{\partial G_{il}(X,t)}{\partial X_j}$$

$$b_{ij}(X,t) = \sum_{k,l=1}^p G_{il}(X,t) Q_{lk}(t) G_{jk}(X,t)$$

причем $G_{ik}(X,t)$ и $Q_{ik}(t)$ – соответственно элементы матриц $G(X,t)$ и $Q(t)$.

Приложение С. Статистические характеристики ионосферного ДКМВ радиоканала. Описание модели канала Ваттерсона.

Модель Ваттерсона ВЧ радиоканала, представлена на Рис. С1:

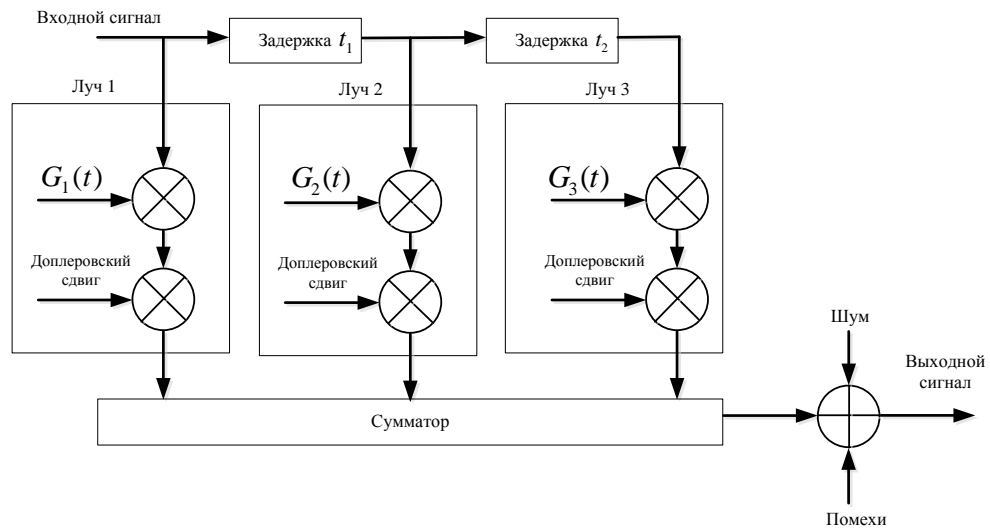


Рис. С1. Модель КВ связи Ваттерсона для трёхлучевого случая.

Здесь t_i – задержка $(i+1)$ -го луча относительно i -го; $G_i(t)$ – комплексная функция времени вида:

$$G_i(t) = G_{ia}(t) \cdot \exp(j2\pi f_{ia}t) + G_{ib}(t) \cdot \exp(j2\pi f_{ib}t), \quad (C1)$$

где $G_{ia}(t)$, $G_{ib}(t)$ - $G_i(t)$ независимые комплексные гауссовские случайные эргодические процессы с нулевым средним, независимой реальной и мнимой частями с одинаковой дисперсией. Индексы a , b обозначают две компоненты магнитоионного расщепления; f_{ia} , f_{ib} - доплеровский сдвиг частоты.

Спектральная плотность мощности $S(f)$ случайного процесса, отражающего поведение во времени комплексной функции времени определяется следующим образом:

$$S_i(f) = \frac{1}{A_{ia}\sigma_{ia}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(f-f_{ia})^2}{2\sigma_{ia}^2}\right) + \frac{1}{A_{ib}\sigma_{ib}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(f-f_{ib})^2}{2\sigma_{ib}^2}\right) \quad (C2)$$

где A_{ia} и A_{ib} - коэффициенты ослабления магнитоионных компонент; $2\sigma^2$ - среднеквадратическое расширение спектра.

Для ДКМВ канала связи характерно состояние, когда выделяется два, реже три луча. Исходя из этого, анализ работы модемов обычно (за исключением особых случаев) проводится на двухлучевой модели канала и для одной компоненты магнитоионного расщепления.

Сценарии распространения для различных широт

Для исследования ДКМВ канала, на основе рекомендаций МСЭ, рекомендовано использовать два луча с одинаковым доплеровским сдвигом частоты. Параметры модели канала характерные для авиационной системы радиосвязи для различных условий распространения сигнала и различных широт представлены в Табл. С1.

Табл. С1. Сценарии параметров модели канала

Широты	Условия	Дискретная и/или диффузная многолучевость с рассеянием, мс	Амплитудные релеевские замирания с двухсторонним среднеквадратическим рассеянием, Гц
Низкие	хорошие	0.5	0.5
	умеренные	2	1.5
	плохие	6	10
Средние	хорошие	0.5	0.1
	умеренные	1	0.5
	плохие	2	1
Высокие	хорошие	1	0.5
	умеренные	3	10
	плохие	7	30

В параметры модели канала входят условия распространения («хорошие», «умеренные», «плохие»), задержки между лучами (от 0,5 мс, до 7мс) и амплитудные релеевские замирения (от 0,1 до 30 Гц).

Результаты моделирования (частотно-временные характеристики)

В качестве анализа модели канала вычисляется модуль функция частотной когерентности (ФЧК) для разных сценариев, Рис. С2 (выбран сценарий для средних широт). ФЧК определяется как преобразование Фурье от спектра мощности задержанных сигналов.

$$\Psi(\Delta f) = \sum_n P(\tau_n) \exp(-j2\pi\Delta f\tau_n) \quad (С3)$$

где, $P(\tau_n)$ - средний коэффициент передачи, τ_n - задержка между лучами, Δf - шаг частоты.

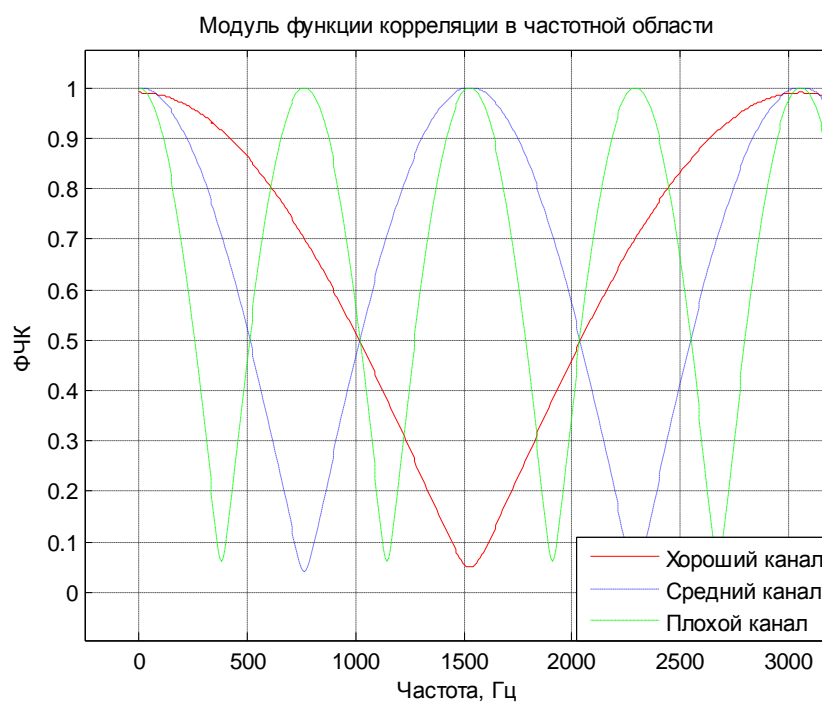


Рис. С2. Функция частотной когерентности для сценария средних широт

Представленные на Рис. С2 результаты моделирования показывают, что канал является частотно селективным, т.к. полоса частотной когерентности меньше ширины спектра сигнала $\Delta f \leq W$.

Комплексная функция времени (С2) одного луча для средних широт приведена на Рис. С3 – С5, условия распространения («хорошие», «умеренные», «плохие»).

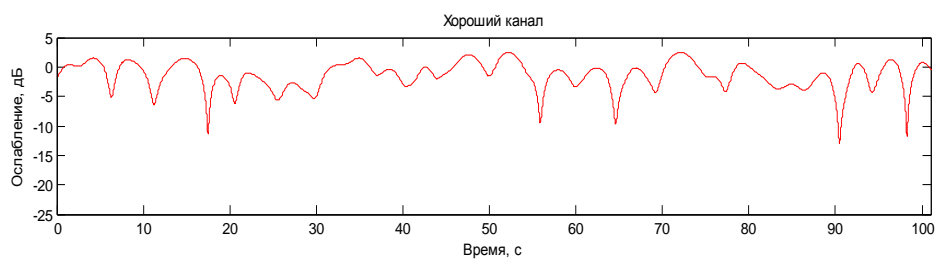


Рис. С3. Комплексная функция времени для хороших условий распространения.

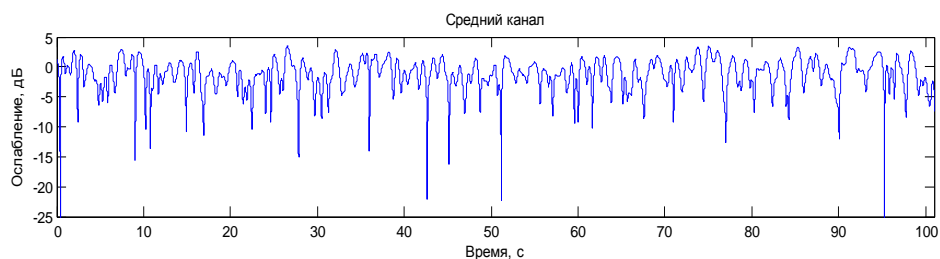


Рис. С4. Комплексная функция времени для умеренных условий распространения.

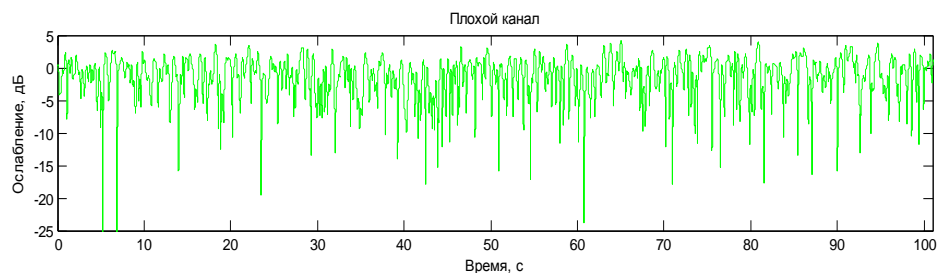


Рис. С5. Комплексная функция времени для плохих условий распространения.

Представленные на Рис. С3 – С5 результаты моделирования показывают релейские замирания. С увеличением частотного уширения происходит ослабление сигнала.

Функция корреляции для средних широт приведена на Рис. С6, условия распространения («хорошие», «умеренные», «плохие»).

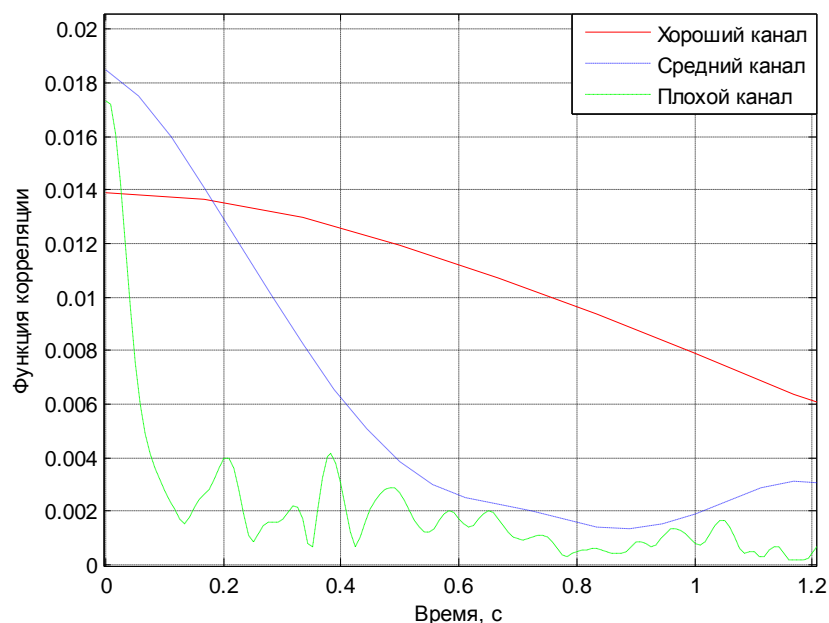


Рис. С6. Функция корреляции для различных условий распространения.

Представленные на Рис. С6 результаты моделирования показывают, что при переходе от хороших условий распространения сигнала к плохим уменьшается время когерентности канала (происходят более быстрые замирания во времени).

Контрольные вопросы

1. Динамический процесс как источник информационных сообщений и объект наблюдения и управления.
2. Оптимальная оценка, ошибка фильтрации. Функции потерь.
3. Оценивание марковских сигналов (общая постановка задачи).
4. Уравнение Стратоновича для апостериорной плотности распределения вероятностей.
5. Линейное оценивание марковских сигналов.
6. Линейная модель гауссовских марковских сообщений.
7. Дискретный фильтр Калмана-Бьюси.
8. Точное решение уравнение Стратоновича в задаче линейной фильтрации. Структурная схема фильтра.
9. Непрерывный фильтр Калмана-Бьюси. Структурная схема фильтра.
10. Стационарный фильтр Калмана-Бьюси.
11. Структурные схемы и уравнения алгоритмов для оценок и корреляционных матриц ошибок фильтрации.

12. Оптимальные квадратичные линейные регуляторы. Структурная схема.
13. Оценивание параметров модели динамического процесса. Обратный фильтр Калмана.
14. Квазиоптимальные алгоритмы нелинейной фильтрации.
15. Решение уравнения Стратоновича в гауссовском приближении.
16. Обобщенный фильтр Калмана.
17. Рекуррентно-поисковые алгоритмы оценивания.
18. Фильтрация амплитудно и частотно-модулированных сигналов.
19. Фазовая автоподстройка частоты. Фильтрация огибающей фазы узкополосного сигнала.

Литература

1. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука. 1968
2. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М: Энергия. 1973.
3. Сейдж Э., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М: Связь, 1976.
4. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М: Мир .1977.
5. Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П. Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М: Наука. 1979.
6. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М: Радио и связь. 1973.
7. Курочкин И.В., Мальцев А.А. Статистическая оптимизация взаимодействия элементов эргатической системы управления на ранних стадиях ее проектирования // АиТ. 1994. № 8. С. 103-110.
8. Бодянский Е.Б., Борячок М.Д. Локально-оптимальное псевдодуальное управление объектами с неизвестными параметрами. АиТ//. 1992. №2. с 90-96.
9. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Университетская книга, Логос. 2006. - 640 с.
10. ITU-R Rec. F1487 “Testing of HF Modems with Bandwidth of up to about 12 kHz Using Ionospheric Channel Simulator”. – Geneva: Int. Telecom. Union, 2000.